Задачи к спецкурсу
Доказуемость и формальная арифметика, 2022
15.12.2022

1. (1) Докажите, что существует подмножество $\mathbb{N}$, выразимое Π_1-формулой, но не выразимое никакой Σ_1-формулой. И наоборот.

2. (1) Докажите, что множество истинных Π_1-предложений неразрешимо и имеет перечислимое дополнение.

3. (1) Докажите, что множество истинных Π_2-предложений не перечислимо и не имеет перечислимого дополнения.

4. (1) Приведите пример определимого в $\mathbb{N}$ множества, для которого ни оно само, ни его дополнение не являются перечислимыми.

5. (2) Докажите, что если тотальная функция f Σ_1-определима в $\mathbb{N}$, то такова и функция $f(n,x) := f(f(\dots f(x)\dots))$ (n раз).

6. (2) Докажите, что если функция f доказуемо рекурсивна в $I\Sigma_1$, то такова и функция $f(n,x) := f(f(\dots f(x)\dots))$ (n раз).

7. (4) Для непротиворечивой гёделевой теории T определим отношение $<_T$ на множестве всех арифметических предложений

   $$\varphi <_T \psi :\equiv (T \vdash \varphi \to \psi \,\&\, T \nvdash \psi \to \varphi).$$

   Докажите опираясь на теорему Россера, что $<_T$ является плотным:

   $$\forall \varphi, \psi\, (\varphi <_T \psi \Rightarrow \exists \theta\, (\varphi <_T \theta \,\&\, \theta <_T \psi).$$

8. (1) Привести пример арифметической формулы $\varphi(x)$ такой, что

   (a) Для любого $n \in \mathbb{N}$ $\mathsf{PA} \vdash \varphi(\underline{n})$;

   (b) $\mathsf{PA} \nvdash \forall x \varphi(x)$.

9. (2) Приведите пример арифметической теории T, содержащей PA, для которой теория $U := T + \mathrm{Con}_T$ непротиворечива, а $T + \mathrm{Con}_U$ противоречива.

10. Пусть $\Box(x)$ удовлетворяет условиям Лёба в PA.

    (a) (2) Пусть $m = \ulcorner 0 = 0 \urcorner$. Найти все (с точностью до доказуемой эквивалентности в PA) неподвижные точки формулы $\varphi(x) := (x = \underline{m})$, т.е. такие формулы ψ, что

    $$\mathsf{PA} \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \psi \urcorner).$$

    (b) (3) Докажите, что формула $\Box(x)$ имеет единственную (с точностью до доказуемой эквивалентности в PA) неподвижную точку. То же для $\neg\Box(x)$. Найдите эти неподвижные точки.

11. (3) Докажите, что существует тотальная вычислимая функция $f(x)$ такая, что $\mathsf{PA} \nvdash \forall x\, \exists y\, \varphi(x, y)$ для любой Σ_1-формулы $\varphi(x, y)$, выражающей $f(x) = y$ в $\mathbb{N}$. (*Указание:* рассмотрите перечисление всех доказательств в PA и примените канторовскую диагонализацию.)

12. (3) Пусть π — истинное Π_1-предложение. Докажите, что множества доказуемо рекурсивных функций в теории PA и в теории $\mathsf{PA} + \pi$ совпадают.

13. (3) Докажите, что в PA доказуемо:

$$\mathrm{Con}_{\mathsf{PA}} \leftrightarrow \mathrm{Con}_{\mathsf{PA}+\neg\mathrm{Con}_{\mathsf{PA}}}.$$

14. (3) Докажите, что если $\mathsf{PA} + \neg\mathrm{Con}_{\mathsf{PA}} \vdash \pi$, где $\pi \in \Pi_1$, то $\mathsf{PA} \vdash \pi$.

15. (Неподвижная точка Россера) Пусть T — перечислимое расширение PA и формула $\mathrm{Prf}_T(y, x) \in \Delta_1$ выражает[1] утверждение *y есть гёделев номер вывода формулы с номером x в теории T*, при этом $\Box_T(x) = \exists y \mathrm{Prf}_T(y, x)$ удовлетворяет условиям Лёба. Рассмотрим неподвижную точку

$$\mathsf{PA} \vdash \rho \leftrightarrow \exists x\, (\mathrm{Prf}_T(x, \ulcorner\neg\rho\urcorner) \wedge \forall y < x\, \neg\mathrm{Prf}_T(y, \ulcorner\rho\urcorner).$$

1) (4) Докажите, что формула ρ не доказуема и не опровержима в T, если T непротиворечива.

2) (4) Докажите, что $\mathsf{PA} \vdash \Box_T\rho \to \Box_T\bot$ и $\mathsf{PA} \vdash \Box_T\neg\rho \to \Box_T\bot$.

16. (3) Для данной теории T определим последовательность Тьюринга $T_0 := T$, $T_{n+1} := T_n + \mathrm{Con}_{T_n}$. Привести пример теории T для которой T_n непротиворечива, а T_{n+1} — противоречива.

17. (5) Докажите, что найдутся n примеров схемы локальной рефлексии, из которых в T выводима формула $\neg\Box_T^n\bot$. Докажите,[2] что если $\neg\Box_T^n\bot$ следует из некоторых n примеров схемы локальной рефлексии, то в свою очередь все эти примеры следуют из $\neg\Box_T^n\bot$. (Указание: запишите это утверждение в виде формулы логики доказуемости и докажите ее выводимость в GL.)

18. (3) Пусть T — непротиворечивая гёделева теория. Докажите, что существуют арифметические предложения φ, ψ такие, что $T + \varphi \nvdash \psi$ и $T + \psi \nvdash \varphi$. (Указание: теорема Россера.)

[1] Δ_1-формлуы — это формулы, эквивалентные в PA как Σ_1, так и Π_1-формуле.

[2] Для знакомых с моделями Крипке логики GL.