Субструктурные логики. Задачи

С. Л. Кузнецов, Т. Г. Пшеницын

апрель 2025

1. Докажите, что в мультипликативно-аддитивном исчислении Ламбека FL с добавленными в него правилами нелокального сокращения
$$\frac{\Gamma, A, \Delta, A, \Pi \Rightarrow B}{\Gamma, A, \Delta, \Pi \Rightarrow B}\ (\mathrm{nc}_1) \qquad \frac{\Gamma, A, \Delta, A, \Pi \Rightarrow B}{\Gamma, \Delta, A, \Pi \Rightarrow B}\ (\mathrm{nc}_2)$$
устранимо правило сечения.

2. Докажите, что задача выводимости в исчислении FL для секвенций, использующих только операции $\backslash$ и $\wedge$, является PSPACE-полной.

3. Задайте категориальной грамматикой Ламбека язык правильных скобочных последовательностей.

4. Постройте категориальную грамматику над исчислением FL, задающую язык $\{a^n b^n c^n \mid n \geqslant 1\}$.

5. Логика называется *конечнозначной,* если её можно задать следующим образом. Возьмём конечное множество V истинностных значений и его подмножество $T \subset V$. Зададим для каждом из операций логики *таблицу истинности* — функцию $f\colon V^k \to V$, где V — валентность данной операции (например, для бинарной операции $f\colon V \times V \to V$; константам соответствуют фиксированные элементы V). Для каждой *функции означивания* переменных $v\colon \mathrm{Var} \to V$ по таблицам истинности определяется её продолжение $\bar{v}$ на произвольные формулы. Формула A *общезначима,* если $\bar{v}(A) \in T$ для любой v. Логика задаётся как множество всех общезначимых формул.

   Докажите, что ни одна из логик FL, $\mathrm{FL_c}$, $\mathrm{FL_e}$, $\mathrm{FL_{ec}}$, $\mathrm{FL_w}$, Int не является конечнозначной.

6. Докажите, что фрагменты исчисления FL со следующими множествами операций и констант: $\{\cdot, \backslash, \bot\}$ и $\{\cdot, \backslash, 1\}$ неполны ни относительно L-моделей, ни относительно R-моделей, даже в слабом смысле.

7. Докажите, что секвенция $\Rightarrow B$ семантически следует из секвенции $\Rightarrow A$ на классе L-моделей тогда и только тогда, когда секвенция $1 \wedge A \Rightarrow B$ истинна во всех L-моделях (константа 1 интерпретируется как синглетон пустого слова $\{\varepsilon\}$). Докажите, что множество всех секвенций (в языке FL), истинных во всех L-моделях, алгоритмически неразрешимо.

8. Докажите, что категориальные грамматики над некоммутативной интуиционистской линейной логикой задают все перечислимые языки.

9. Определим отображение ${}^{\mathrm{Q}}$ формул классической логики высказываний в языке $\{\wedge, \vee, \to, \bot\}$ в формулы классической линейной логики следующим образом:

   - $p^{\mathrm{Q}} = p$ для пропозициональных переменных;
   - $\bot^{\mathrm{Q}} = \bot$;
   - $(A \wedge B)^{\mathrm{Q}} = {!}\,A^{\mathrm{Q}} \otimes {!}\,B^{\mathrm{Q}}$;
   - $(A \vee B)^{\mathrm{Q}} = ?{!}\,A^{\mathrm{Q}} \parr ?{!}\,B^{\mathrm{Q}}$;
   - $(A \to B)^{\mathrm{Q}} = {!}\,A^{\mathrm{Q}} \multimap ?{!}\,B^{\mathrm{Q}}$.

   Докажите, что секвенция $\Gamma \Rightarrow \Delta$ выводится в классической логике тогда и только тогда, когда ${!}\,\Gamma^{\mathrm{Q}} \Rightarrow ?{!}\,\Delta^{\mathrm{Q}}$ выводится в линейной логике.

10. Определим отображение † формул классической логики высказываний в языке $\{\to\}$ в формулы линейной логики следующим образом: $p^{\dagger} = p$; $(A \to B)^{\dagger} = {!}\,A^{\dagger} \multimap ?\,B^{\dagger}$. Докажите, что существует секвенция $\Rightarrow A$, выводимая в интуиционистской логике, такая, что $\Rightarrow A^{\dagger}$ не выводится в линейной логике.

11. Определим отображение формул исчисления Ламбека L в формулы линейной логики первого порядка (в сигнатуре без функциональных символов и констант). Будем считать, что каждая пропозициональная переменная p исчисления Ламбека является предикатным символом линейной логики первого порядка с двумя аргументами. Отображение $h_{x,y}(A)$ имеет аргументом формулу исчисления Ламбека A, а также два параметра x, y — переменные логики первого порядка.

   - $h_{x,y}(p) = p(x, y)$;
   - $h_{x,y}(A \cdot B) = \exists z\,(h_{x,z}(A) \otimes h_{z,y}(B))$;
   - $h_{x,y}(B \setminus A) = \forall z\,(h_{z,x}(B) \multimap h_{z,y}(A))$;
   - $h_{x,y}(A \,/\, B) = \forall z\,(h_{y,z}(B) \multimap h_{x,z}(A))$.

   Везде выше переменная z отлична от x, y. Докажите, что секвенция $A \Rightarrow B$ выводится в исчислении Ламбека тогда и только тогда, когда в (интуиционистской коммутативной) линейной логике первого порядка выводится $h_{x,y}(A) \Rightarrow h_{x,y}(B)$, где x, y — различные переменные.

12. Докажите, что фрагмент интуиционистской линейной логики в языке $\otimes, \&, \oplus, !$ разрешим.