В. С. Атабекян, Л. Д. Беклемишев, В. С. Губа, И. Г. Лысёнок, А. А. Разборов, А. Л. Семенов, Вопросы алгебры и математической логики. Научное наследие С. И. Адяна, *УМН*, 2021, том 76, выпуск 1(457), 3–30

DOI: https://doi.org/10.4213/rm9980

2021 г. январь — февраль *т. 76, вып. 1 (457)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 510+512.5

Вопросы алгебры и математической логики. Научное наследие С. И. Адяна

В. С. Атабекян, Л. Д. Беклемишев, В. С. Губа, И. Г. Лысёнок, А. А. Разборов, А. Л. Семенов

Дан обзор результатов по проблеме Бернсайда и свойствам бернсайдовых групп, проблеме конечного базиса групповых тождеств, периодическим произведениям групп и проблеме Мальцева, построению групп со специальными свойствами (монстры Тарского), конструктивным оценкам в проблеме Бернсайда–Магнуса и алгоритмическим проблемам: проблеме распознавания групповых свойств, проблеме равенства для полугрупп с одним соотношением, односторонним системам Туэ. В центре внимания находятся наиболее важные результаты, полученные в работах С. И. Адяна и в его работах с учениками.

Библиография: 81 название.

Ключевые слова: комбинаторная теория групп и полугрупп, периодическая группа, проблема Бернсайда, проблема конечного базиса, алгоритмическая проблема, теорема Адяна–Рабина.

DOI: https://doi.org/10.4213/rm9980

Содержание

Настоящая статья посвящена 90-летию со дня рождения выдающегося математика Сергея Ивановича Адяна (1 января 1931 г. – 5 мая 2020 г.). Имя С. И. Адяна широко известно благодаря нескольким крупным достижениям, прежде всего решению, полученному совместно с его учителем П. С. Новиковым в 1968 г., знаменитой проблемы Бернсайда о периодических группах, одной из центральных проблем алгебры [1], [2]. Методы, развитые в работах Новикова и Адяна, в дальнейшем были усовершенствованы в монографии С. И. Адяна [3]. Они позволили решить несколько других известных проблем в теории групп, долгое время остававшихся открытыми, в частности явно указать бесконечную систему независимых групповых тождеств (решив проблему, поставленную Б. Нейманом). Введенные С. И. Адяном операции периодического произведения групп дали ответ на вопрос, поставленный А. И. Мальцевым.

Центральной темой в работах С. И. Адяна и его школы были алгоритмические вопросы теории групп и полугрупп. Ярким достижением Сергея Ивановича является теорема Адяна–Рабина [4], утверждающая алгоритмическую нераспознаваемость широкого класса свойств групп по заданию группы с помощью конечного числа образующих и соотношений. Эта теорема в дальнейшем была с успехом использована А. А. Марковым [5] для доказательства алгоритмической неразрешимости проблемы гомеоморфизма топологических многообразий. Результаты С. И. Адяна по проблеме равенства для полугрупп, заданных одним соотношением, до сих пор остаются, по существу, непревзойденными.

Данная работа представляет собой обзор наиболее важных результатов, полученных в работах С. И. Адяна и его учеников; обсуждается также контекст и современное состояние затронутых в этих работах вопросов. При этом мы уделяем внимание не только самым главным достижениям Сергея Ивановича, но и другим, сравнительно менее известным результатам. Наш обзор разбит на разделы в соответствии с их тематикой; мы старались по возможности следовать естественному хронологическому порядку. Краткий биографический очерк читатель может найти в некрологе, публикуемом в данном выпуске журнала, а также в более ранней статье [6]. Авторы выражают благодарность А. Л. Таламбуце за помощь в написании обзора.

1. Дескриптивная теория функций

Мы начинаем с двух работ в области дескриптивной теории функций, выполненных С. И. Адяном в студенческие и аспирантские годы под руководством П. С. Новикова.

В заметке 1950 г. (которая, насколько нам известно, никогда не была опубликована) было доказано, что график любой функции f действительного переменного, удовлетворяющей функциональному уравнению $f(x+y) = f(x)+f(y)$ и имеющей точки разрыва, всюду плотен на плоскости; отметим для сравнения, что все непрерывные решения этого уравнения линейны. Много позже этот результат был переоткрыт американским ученым из Сиэтла Э. Хьюитом.

Второй результат (см. [7]) решил проблему, поставленную основателем советской школы дескриптивной теории множеств и функций Н. Н. Лузиным. Исходный вопрос Лузина относился к так называемым измеримым по Бэру функциям (мы позволим себе опустить определение, так как пример Адяна–Новикова строится в намного более узком [8; следствие 2.5.2] классе полунепрерывных функций).

Итак, "естественная" интуиция, связанная с понятием полунепрерывной (например, снизу) функции состоит в том, что у нас имеется счетное замкнутое множество $\Gamma \subseteq [0,1]$. Его дополнение разбивается в счетное же число дизъюнктных интервалов: $[0,1] \setminus \Gamma = \dot{\bigcup\limits_n} I_n$. Предположим, что на замыканиях $\overline{I}_n$ заданы непрерывные функции f_n, удовлетворяющие (если Γ бесконечно) очевидным условиям совместности. Тогда эту систему функций можно продолжить в точках из Γ полунепрерывным образом.

Результат Адяна–Новикова показывает, что, как это часто случается в дескриптивной теории функций, возможны патологические ситуации, никак с этой интуицией не сообразующиеся. А именно, ими была построена полунепрерывная функция f, для которой не существует вообще никакого (а не только интервального) счетного разбиения $[0,1] = \dot{\bigcup\limits_n} A_n$, для которого все ограничения $f\big|_{A_n}$ непрерывны. Мы отсылаем заинтересованного читателя к монографии [8], в которой можно прочитать о месте, занимаемом этим результатом в контексте современной дескриптивной теории множеств.

2. Теорема Адяна–Рабина

На последнем году аспирантуры (осенью 1954 г.) в научной карьере С. И. Адяна произошло важное событие: Пётр Сергеевич Новиков предложил ему заняться важной нерешенной проблемой (подробности см. ниже) теории групп. С тех пор работа в области комбинаторной теории групп и полугрупп, как алгоритмической, так и структурной, стала не только содержанием кандидатской диссертации С. И. Адяна, но и фактически делом всей жизни. Этой теме посвящена и бо́льшая часть нашего обзора, поэтому мы начнем с того, что напомним необходимые определения, а также зафиксируем некоторые обозначения.

Свободная группа ранга m с образующими $a_1, \ldots, a_m$ будет обозначаться через $F_m = \langle a_1, \ldots, a_m \rangle$. Ее элементами являются неприводимые слова в групповом алфавите $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_m, a_1^{-1}, \ldots, a_m^{-1}\}$. Для элементов $r_1, \ldots, r_n \in F_m$ (как правило, называемых *определяющими соотношениями*) через

$$G = \langle a_1, \ldots, a_m \mid r_1 = 1, \ldots, r_n = 1 \rangle \tag{1}$$

обозначается факторгруппа F_m по минимальной нормальной подгруппе, содержащей $r_1, \ldots, r_n$. Само представление (1) называется (конечным) *заданием группы G в терминах порождающих и определяющих соотношений* или, сокращенно, *заданием*[1] группы G. Абстрактная группа G называется *конечно определенной* (к. о.), если она обладает хотя бы одним заданием вида (1). Всякая конечно определенная группа очевидным образом является конечно порожденной; обратное же, вообще говоря, неверно.

[1] Сам С. И. Адян активно пропагандировал использование термина "задание" (перевод английского "presentation") как более удачную замену терминов "представление", "копредставление" и "генетический код".

Тождеством называется групповое слово $X(x, y, z, \ldots)$ в отдельном групповом алфавите $\{x, y, z, \ldots, x^{-1}, y^{-1}, z^{-1}, \ldots\}$. Группа G *удовлетворяет тождеству* X, если $X(A, B, C, \ldots) = 1$ для любых $A, B, C, \ldots \in G$. Для системы тождеств $\{X_i\}_{i \in I}$ определяемое ими (групповое) *многообразие* состоит из всех групп, удовлетворяющих этим тождествам. Для всякого n *относительно свободная n-порожденная группа* в этом многообразии определяется как

$$\langle a_1, \ldots, a_n \mid X_i(A, B, C, \ldots) = 1 \ (i \in I;\ A, B, C, \ldots \in \Sigma^*)\rangle. \tag{2}$$

За редкими исключениями эта группа *не* является конечно определенной, даже если I состоит из одного элемента.

Аналогичные определения даются для случая полугрупп (моноидов). Единственная разница состоит в том, что, ввиду отсутствия возможности сокращений, определяющие соотношения теперь имеют более сложный вид $U = V$, где U и V – слова в алфавите $\{a_1, \ldots, a_m\}$.

Алгоритмические вопросы, которые естественно возникают в теории к. о. групп и полугрупп, можно условно разделить на два класса. В вопросах первого типа задание (1), как правило, фиксировано и входом алгоритмической проблемы обычно служат элементы F_m, т. е. слова. Наиболее ярким примером такого рода является полученный незадолго до описываемых событий и ставший классическим результат П. С. Новикова об алгоритмической неразрешимости проблемы равенства слов [9].

Поставленная П. С. Новиковым задача относится ко второму типу, проверке выполнения *абстрактных* свойств к. о. групп по их заданию. В качестве небольшого исторического контекста отметим, что до работ С. И. Адяна или практически одновременно с ними задачи такого рода рассматривались, насколько нам известно, лишь для к. о. полугрупп (А. А. Марков [10]), рекурсивно перечислимых множеств (Г. Райс [11]) и вычислимых функций (В. А. Успенский [12]).

Более конкретно, вопрос, поставленный П. С. Новиковым, заключался в том, можно ли по данному заданию (1) выяснить, является группа G тривиальной или нет. Первый основной результат работ [4], [13] дает отрицательный ответ на этот вопрос в намного более сильной форме: *ни для какой* к. о. группы G_0 не существует алгоритма проверки изоморфизма $G \approx G_0$, где G задана в виде (1).

Второй основной результат работ [4], [13] является слегка ослабленной формой одного из самых замечательных, красивых и общих результатов алгоритмической теории групп, известного в настоящее время как *теорема Адяна–Рабина.* Во время написания статей [4], [13] более ранняя работа Маркова [10] была Сергею Ивановичу, по-видимому, неизвестна, что отразилось на формулировке результата. Но уже следующая работа [14] содержит вполне современную формулировку теоремы Адяна–Рабина (независимо доказанной в [15]), к изложению которой мы и переходим.

Назовем свойство конечных заданий вида (1) *абстрактным* (или *инвариантным*), если оно инвариантно относительно группового изоморфизма, и *нетривиальным*, если существуют конечные задания как обладающие этим свойством, так им и не обладающие. В этих терминах теорема Райса–Успенского [11], [12] утверждает, что *любое* абстрактное нетривиальное свойство машин Тьюринга алгоритмически неразрешимо, что является в некотором смысле окончательным результатом.

К сожалению, для групп такой амбициозный план невыполним, что было отмечено уже в работе С. И. Адяна [13]. Простейшим контрпримером является свойство "иметь тривиальную факторгруппу по коммутанту" (факторгруппа $G/[G,G]$ обозначается G_{ab}). Контрпримерами могут служить и любые другие разумные свойства G_{ab}, а также некоторые свойства более старших членов нижнего или верхнего центрального ряда группы G. Тем не менее оказывается, что значительную часть этого плана удается спасти, если воспользоваться понятием, аналогичным введенному ранее Марковым для полугрупп [10].

Нетривиальность абстрактного свойства P означает, что существуют к. о. группы G_0, G_1, для которых выполняется $\neg P(G_0)$ и $P(G_1)$. Абстрактное нетривиальное свойство P называется *марковским*, если первое условие усиливается до требования $\neg P(H)$ для всякой к. о. группы H, в которую G_0 может быть вложена в качестве подгруппы; второе условие при этом не меняется.

В этой терминологии теорема Адяна–Рабина может быть сформулирована следующим образом:

> *Всякое марковское свойство конечных заданий* (1) *алгоритмически неразрешимо.*

Внушительный список марковских свойств можно найти в разных местах, в том числе в статье из Википедии[2]. Однако, пожалуй, лучший способ представить себе степень общности и завершенности теоремы Адяна–Рабина – это попробовать самим найти естественные примеры нетривиальных свойств P таких, что ни P, ни $\neg P$ не является марковским (отметим, что заключение теоремы не меняется при взятии отрицания), не сводящиеся по существу к вышеприведенным. Еще лучше, чтобы P при этом было алгоритмически неразрешимым, т. е. не подпадающим под действие теоремы Адяна–Рабина. Нам известны лишь два примера такого рода, и оба основаны на глубоких фактах, полученных позднее самой теоремы.

Первый пример естественно связан с упоминавшейся выше теоремой из [4], [13] о неразрешимости проблемы изоморфизма фиксированной группе G_0 и естественным вопросом о том, не покрывается ли она теоремой Адяна–Рабина. Легко видеть, что отрицание свойства "быть изоморфной G_0" не может быть марковским ни для какой G_0, а само это свойство *не* является марковским тогда и только тогда, когда к. о. группа G *универсальна* в том смысле, что в нее вкладывается *любая* другая к. о. группа. Таким образом, наш вопрос эквивалентен следующему: существуют ли к. о. универсальные группы?

Существование таких групп было установлено лишь в 1961 г. американским математиком Г. Хигманом [16] как составная часть знаменитой *теоремы Хигмана о вложении.* Напомним ее формулировку.

Конечно порожденная подгруппа к. о. группы совсем не обязана быть конечно определенной. Однако можно утверждать, в силу очевидных причин, что H в таком случае является *рекурсивно представленной*, т. е. обладает заданием, в котором множество определяющих соотношений рекурсивно *перечислимо* (можно взять, например, задание, в котором $\{r_i\}$ – это просто множество

[2] см. https://en.wikipedia.org/wiki/Adian-Rabin_theorem.

всех равных единице слов в алфавите образующих группы). Теорема Хигмана утверждает обратное в слегка более сильной форме: существует фиксированная к. о. группа, в которую вложима *любая* конечно порожденная рекурсивно представленная группа. В частности, эта группа будет универсальной.

Стоит отметить, что это доказательство существования универсальной группы использует теорию вычислимости; насколько нам известно, чисто алгебраической конструкции до сих пор не найдено.

Второй пример возник в топологии. Группа G называется *хопфовой*, если всякий эпиморфизм $G \twoheadrightarrow G$ непременно является изоморфизмом. Отрицание этого свойства, очевидно, не является марковским, и оно алгоритмически неразрешимо. Однако доказательство того, что само свойство не является марковским (т. е. то, что любая к. о. группа может быть вложена в к. о. хопфову группу) весьма нетривиально [17].

Как сама теорема Адяна–Рабина, так и методы, используемые в ее доказательстве (так называемые "последовательности Адяна"), нашли различные применения в других областях математики. Наиболее важным из таких приложений, по-видимому, является доказательство А. А. Марковым [5] алгоритмической неразрешимости проблемы распознавания гомеоморфности топологических многообразий. Мы отсылаем заинтересованного читателя к работам М. А. Штанько [18], [19], по которым читатель может ознакомиться с доступным доказательством теоремы Маркова и узнать о том месте, которое в нем занимают идеи из ранних работ С. И. Адяна.

За цикл работ по алгоритмическим вопросам алгебры, включающий теорему Адяна–Рабина, Сергей Иванович был награжден премией Московского математического общества (1956) и премией им. П. Л. Чебышёва АН СССР (1963).

3. Проблема Бернсайда о периодических группах

В 1902 г. английский математик У. Бернсайд сформулировал вопрос, ставший впоследствии знаменитой проблемой, носящей его имя, следующим образом:

> Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m$ – конечное число независимых элементов, порождающих группу G, в которой для любого элемента x выполнено соотношение $x^n = 1$, где n – данное целое число. Будет ли определенная таким образом группа конечной, и если да, то каков ее порядок?

В современной терминологии речь идет об относительно свободной группе одного из наиболее простых и естественных многообразий групп – многообразия периодических групп фиксированной экспоненты n. Эта группа называется *свободной m-порожденной бернсайдовой группой экспоненты n* и обычно обозначается $B(m, n)$. Вопрос о конечности или бесконечности группы $B(m, n)$ привлекает внимание не только простотой формулировки, но и несомненной важностью для теории групп. Конечность $B(m, n)$ при данном n для всех значений $m \geqslant 2$ эквивалентна *локальной конечности* групп экспоненты n, т. е. конечности всех конечно порожденных групп данной экспоненты.

Утверждение о локальной конечности групп экспонент 2 и 3 – несложное упражнение. Помимо этого, локальная конечность групп экспоненты n была доказана в случае $n = 4$ ленинградским математиком И. Н. Сановым [20] в 1940 г. и в случае $n = 6$ М. Холлом [21] в 1958 г. С тех пор и по настоящее время экспонентами 2, 3, 4 и 6 исчерпываются все известные положительные результаты по проблеме Бернсайда.

К концу 50-х годов прошлого столетия среди алгебраистов было распространено мнение, что проблема Бернсайда должна решаться положительно для всех значений параметров m и n. Однако ряд полученных к тому времени результатов позволили П. С. Новикову, научному руководителю Сергея Ивановича, в этом усомниться и впервые разработать план построения бесконечно конечно порожденной группы ограниченной экспоненты. К таким результатам относится, прежде всего, работа В. А. Тартаковского [22], где впервые были рассмотрены группы с так называемым условием малого сокращения и для них была доказана разрешимость проблемы равенства. Кроме того, из статьи С. Е. Аршона [23] было известно о существовании бесконечных слов в двухбуквенном алфавите, не содержащих подслов вида X^3 (такие бесконечные слова, часто называемые последовательностями Туэ–Морса, были открыты независимо несколькими авторами).

В заметке 1959 г. [24] П. С. Новиков изложил некоторую схему доказательства утверждения о бесконечности группы $B(m, n)$ для значений $n \geqslant 72$. Эта схема по существу представляла собой формулировку ряда технических утверждений о выводах соотношений в группах $B(m, n)$, вместе с идеями их возможного доказательства.

Через несколько лет после опубликования заметки [24] Е. С. Голод в работе [25] построил примеры бесконечных конечно порожденных групп, у которых все элементы имеют конечный (но неограниченный в совокупности) порядок. Тем самым был получен отрицательный ответ на вопрос о локальной конечности периодических групп, часто называемый *неограниченной проблемой Бернсайда.*

В 1960 г. к реализации замысла П. С. Новикова присоединился С. И. Адян. В результате совместной работы на протяжении семи лет была создана совершенно новая система понятий, в которой первоначальные идеи П. С. Новикова претерпели весьма существенные изменения. Итогом этой работы явилась серия из трех статей [1] общим объемом более 300 страниц, вышедших в "Известиях АН СССР" в 1968 г. Без преувеличения можно сказать, что данная серия представляет собой одну из наиболее сложных написанных к тому времени математических работ, посвященных доказательству одного результата.

Этим результатом является утверждение о бесконечности бернсайдовой группы $B(m, n)$ с $m \geqslant 2$ порождающими для всех нечетных $n \geqslant 4381$. Тем самым было получено отрицательное решение проблемы Бернсайда в общем случае. Фактически в [1] была создана целая теория, дающая описание выводов из соотношений группы $B(m, n)$ для указанных значений экспоненты n и составляющая техническую основу для изучения различных свойств этой группы. Забегая вперед, отметим, что в 1975 г. вышла монография С. И. Адяна [3], основное содержание которой составляла переработанная и улучшенная система понятий и утверждений из [1]. Оценка для нечетной экспоненты n была снижена до значения 665, и усиленный вариант утверждения о бесконечности свободной бернсайдовой группы известен теперь как теорема Новикова–Адяна:

При любых $m \geqslant 2$ и нечетных $n \geqslant 665$ группа $B(m,n)$ бесконечна.

Следует сразу отметить, что из-за технической сложности и тесной взаимозависимости основных понятий теории Новикова–Адяна (где несколько десятков основных понятий определяются совместной индукцией) мы не можем дать здесь точные формулировки. Ограничимся лишь неформальным пояснением нескольких ключевых понятий и утверждений.

В основе теории лежит построение группы G, заданной системой определяющих соотношений вида

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_m \mid A^n = 1\ (A \in E_1 \cup E_2 \cup \cdots)\rangle. \tag{3}$$

Определяющие соотношения здесь разбиты на подмножества $\{A^n = 1\ (A \in E_\alpha)\}$, индексированные натуральным параметром α. Слова из множества E_α называются *элементарными периодами ранга* α. Эти множества подбираются таким образом, чтобы любой элемент группы G был сопряжен некоторой степени элементарного периода некоторого ранга α, и тем самым группа G оказывается изоморфной группе $B(m,n)$. Цель этой конструкции – свести изучение группы $B(m,n)$ к изучению последовательности групп $B_\alpha(m,n)$, определяемых соотношениями ранга, не превосходящего α:

$$B_\alpha(m,n) = \langle a_1, a_2, \dots, a_m \mid A^n = 1\ (A \in E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_\alpha)\rangle.$$

Из определения непосредственно вытекает, что группа $B(m,n)$ является прямым пределом последовательности групп $B_\alpha(m,n)$, т. е. равенство двух слов в группе $B(m,n)$ эквивалентно равенству этих слов в группе $B_\alpha(m,n)$ для некоторого α.

Утверждения, относящиеся к группе $B_\alpha(m,n)$, доказываются на основе уже установленных утверждений, относящихся к группе $B_{\alpha-1}(m,n)$. Таким образом, возникает естественная индукция по рангу. Отметим, что все известные подходы к доказательству существования бесконечных групп ограниченной экспоненты (в том числе более общие результаты [26], [27] о существовании таких факторгрупп для некоторого широкого класса групп) используют описанную конструкцию представления искомой группы в виде прямого предела последовательности групп, полученных итерированным добавлением определяющих соотношений.

Основная часть утверждений теории – несколько сот штук – доказывается совместной индукцией по рангу α. Хотя все эти утверждения в [1], [3] сформулированы на комбинаторном языке слов, вхождений в слова и преобразований слов, нетрудно видеть, что на самом деле основным объектом изучения является группа $B_\alpha(m,n)$. Мы отметим здесь два важных понятия теории, непосредственно относящихся к группе $B_\alpha(m,n)$.

В качестве нормальных форм элементов группы $B_\alpha(m,n)$ вводится множество R_α *приведенных слов ранга* α. Так как $B_0(m,n)$ – свободная группа ранга m, то R_0 по определению есть просто множество всех несократимых слов в групповом алфавите $\{a_1^{\pm 1}, a_2^{\pm 1}, \dots, a_m^{\pm 1}\}$. Идею нормальной формы элементов группы $B_\alpha(m,n)$ при $\alpha \geqslant 1$ проиллюстрируем следующим образом. Если некоторое слово X имеет вид PEQ, где подслово E входит в определяющее соотношение A^n ранга α, скажем, $A^n = ED$ для некоторого D, и при этом длина слова E удовлетворяет неравенству $|E| > n|A|/2$, то замену $PEQ \to PD^{-1}Q$ можно рассматривать как операцию приведения, так как при такой операции длина слова X уменьшается. Таким образом, естественно считать, что нормальная форма элемента группы $B_\alpha(m,n)$ не содержит никакого подслова E, входящего в определяющее слово A^n ранга α, с условием $|E| > r|A|$, где $n/2 < r < n$ – некоторый числовой параметр. В теории Новикова–Адяна к этому условию добавляется "по модулю равенства в группе $B_{\alpha-1}(m,n)$": слово X считается приведенным в ранге α, если X приведено в ранге $\alpha - 1$ и не существует слова $Y \in R_{\alpha-1}$, содержащего подслово E указанного вида (определение в [1], [3] близко к сформулированному и использует техническое уточнение, связанное, во-первых, с понятием так называемого нормированного вхождения ранга α и, во-вторых, со специальной функцией измерения количества периодов периодического слова, отличной от длины слова).

Понятие приведенного слова ранга α играет фундаментальную роль: все слова, участвующие в утверждениях и определениях теории, принадлежат соответствующим множествам приведенных слов (их на самом деле несколько, они различаются, в терминах нашей приблизительной формулировки, выбором значения параметра r).

Заметим, что описанная нормальная форма элементов группы $B_\alpha(m,n)$ не является однозначно определенной, так как разные приведенные слова ранга α могут представлять один и тот же элемент группы. Для описания равенства в группе $B_\alpha(m,n)$ приведенных слов ранга α вводится понятие *поворота ранга* α – преобразования слов, состоящего в применении одного соотношения ранга α по модулю равенства в группе $B_{\alpha-1}(m,n)$. Более формально, поворот ранга α есть переход от слова X к слову Y, где X и Y равны в группе $B_{\alpha-1}(m,n)$ некоторым словам PEQ и $PD^{-1}Q$ соответственно, $ED = A^n$ для некоторого элементарного периода ранга α и оба периодических слова E и D содержат достаточно большое число периодов A, например $|E|, |D| \geqslant n|A|/3$.

Одно из утверждений теории: если слова X и Y приведены в ранге α и равны в группе $B_\alpha(m,n)$, то от X к Y можно перейти некоторой последовательностью поворотов ранга α. Отсюда, в частности, несложно выводится следующее утверждение: если несократимые слова X и Y равны в группе $B_\alpha(m,n)$ и не содержат подслов вида A^t, где t – достаточно большое число (в [3] t берется равным 90), то X и Y равны графически. Это утверждение непосредственно переносится на всю группу $B(m,n)$. В качестве следствия вместе с упомянутым выше результатом о существовании бесконечных бескубных слов в двухбуквенном алфавите мы получаем бесконечность группы $B(m,n)$.

Один из ключевых моментов теории Новикова–Адяна – способ определения множества E_α элементарных периодов ранга α. Для этого вводится так называемая классификация периодических слов по рангу. Идею такой классификации можно проиллюстрировать на следующем упрощенном примере. Зафиксируем значение некоторого параметра p, например, $p = 10$. Будем рассматривать слова в некотором алфавите Z. *Периодическим словом с периодом* A будем называть слово X вида $A_1 A^t A_2$, где A_1 – некоторый конец слова A, A_2 – его начало и длина X удовлетворяет неравенству $|X| \geqslant 2|A|$. Непустое слово X назовем *простым*, если X не является собственной степенью другого слова. Элементарным периодом ранга 1 будем считать простое слово A, для которого A^3 не содержит периодического подслова X с периодом B, где $|X| \geqslant p|B|$. Если определены элементарные периоды рангов $1, 2, \ldots, \alpha - 1$, то все остальные простые слова будем называть *периодами ранга* α. Элементарный период ранга α определим как период A ранга α, для которого слово A^3 не содержит периодического подслова X с периодом B ранга α, где $|X| \geqslant p|B|$. Из этого определения легко следует, что ранг соответствует "глубине периодичности": если A – элементарный период ранга $\alpha > 1$, то слово A^3 содержит периодическое подслово X с элементарным периодом B ранга $\alpha - 1$ длины $|X| \geqslant p|B|$ (которое, в свою очередь, при $\alpha > 2$ содержит $p-4$ различных вхождений периодического подслова X_1 с элементарным периодом B_1 ранга $\alpha-2$ с $|X_1| \geqslant p|B_1|$, и т. д.).

С минимальными изменениями эта конструкция работает для определения элементарных периодов ранга 1 в теории Новикова–Адяна. При этом в качестве алфавита Z нужно взять групповой алфавит $\{a_1, \ldots, a_m, a_1^{-1}, \ldots, a_m^{-1}\}$, а в качестве периодов рассматривать только циклически несократимые слова, т. е. слова, несократимые в свободной группе и не имеющие вида $a_i^{\varepsilon} Y a_i^{-\varepsilon}$, $\varepsilon = \pm 1$. В случае ранга $\alpha > 1$ определение элементарного периода ранга α требует более существенной переработки, так как фактически мы имеем дело не со словами, а с элементами группы $B_{\alpha-1}(m, n)$. Прежде всего, мы должны работать внутри множества приведенных слов ранга $\alpha - 1$. Для этого вводится понятие *периода ранга* α – слова A, представляющего элемент бесконечного порядка в группе $B_{\alpha-1}(m, n)$, для которого любое периодическое слово с периодом A является приведенным ранга $\alpha - 1$. Вместо простых периодов далее рассматриваются *минимальные периоды ранга* α – не представимые в виде собственной степени в группе $B_{\alpha-1}(m, n)$. Наконец, из множества минимальных периодов ранга α выбираются элементарные периоды ранга α процедурой, подобной описанной выше: из множества минимальных периодов ранга α выбрасываются периоды A, для которых некоторое периодическое слово с периодом A содержит, по модулю равенства в группе $B_{\alpha-1}(m, n)$, достаточно длинное периодическое слово с другим минимальным периодом B ранга A, в некотором смысле более коротким чем A. За точной формулировкой мы отсылаем читателя к п. I.4 монографии [3]. Заметим, однако, что эта конструкция является естественным аналогом приведенного выше примера классификации периодических слов по "глубине периодичности".

Отметим, что ряд более поздних работ [28], [26], [27], в которых также построены бесконечные конечно порожденные группы ограниченной экспоненты, используют другой принцип построения множества определяющих соотношений, подобных (3). В частном случае, при применении к бернсайдовым группам $B(m, n)$ и построении соответствующих аналогов групп $B_\alpha(m, n)$, этот принцип можно описать следующим образом. Предположим, что группа $B_{\alpha-1}(m, n)$ уже определена. Мы рассматриваем некоторую функцию $\ell(g)$ на элементах этой группы, играющую роль длины элемента в некоторой метрике (например, в [28] рассматривается просто длина элемента в словарной метрике, а в [26], [27] эта функция возникает из действия группы $B_{\alpha-1}(m, n)$ на определенном метрическом пространстве). В качестве E_α мы выбираем множество элементов бесконечного порядка g группы $B_{\alpha-1}(m,n)$, длина $\ell(g)$ которых лежит в некотором начальном отрезке возможных таких длин. Оказывается, что при таком подходе приходится значительно увеличивать оценку для экспоненты n, при которой удается доказать бесконечность группы $B(m,n)$. Например, в [28] теорема Новикова–Адяна доказана для нечетных значений экспоненты с гораздо худшей оценкой $n > 10^{10}$. Таким образом, подход к построению итерированной системы определяющих соотношений группы $B(m,n)$, основанный на классификации периодических слов по "глубине периодичности", позволяет получить более сильные оценки. В настоящее время (январь 2021 г.) оценка 665 для минимального значения экспоненты, для которой проблема Бернсайда решается отрицательно, все еще остается непревзойденной.

4. Дальнейшие свойства бернсайдовых групп

Как отмечено выше, теория Новикова–Адяна создала техническую основу для исследования других свойств свободных бернсайдовых групп. Вскоре после [1] были опубликованы совместные статьи П. С. Новикова и С. И. Адяна [2], [29], которые явились естественным продолжением серии [1]. В статье [2] были доказаны разрешимость проблемы равенства слов в группе $B(m,n)$ при нечетных $n \geqslant 4381$ и $m \geqslant 2$ и невозможность задания этих групп конечной системой определяющих соотношений. Для доказательства разрешимости проблемы равенства используется нормальная форма элементов группы $B(m,n)$, которая получается пересечением множеств R_α для всех значений α. Непосредственная проверка доказательств утверждений теории показывает, что такая нормальная форма может быть найдена эффективно по данному слову, представляющему элемент группы. Для данных слов X и Y, принадлежащих множеству $R_\infty = \bigcap\limits_\alpha R_\alpha$ и равных в группе $B(m,n)$, легко устанавливается эффективная верхняя оценка ранга α, для которой это равенство выполнено уже в группе $B_\alpha(m,n)$. Если же мы хотим проверить равенство $X = 1$ в группе $B_\alpha(m,n)$, то в качестве Y можно взять пустое слово. В этом случае равенство выполнено тогда и только тогда, когда само слово является пустым, и тем самым проблема равенства сводится к проверке пустоты полученной нормальной формы.

Так же несложно из анализа доказательств утверждений теории вытекает разрешимость проблемы сопряженности, доказанная в [29]. Как уже упоминалось, любой элемент группы $B_\alpha(m,n)$ сопряжен степени A^r элементарного периода A некоторого ранга. Процедура нахождения таких A и r по данному элементу группы эффективна, а эффективность распознавания сопряженности элементов полученного вида легко вытекает из утверждений теории.

Ряд фундаментальных свойств групп $B(m,n)$ при $m \geqslant 2$ и нечетных $n \geqslant 4381$ были установлены в работах С. И. Адяна [30], [31]. Было доказано, что все абелевы и все конечные подгруппы этих групп являются циклическими, группы $B(m,n)$ обладают тривиальным центром, а группа $B(3,n)$ вкладывается в $B(2,n)$. При этом в [30], [31] была использована модификация всей системы понятий из [1] для построения циклического центрального расширения $A(m,n)$

группы $B(m,n)$. Подход, связанный с модификациями теории, оказался плодотворным для построения новых групп с весьма необычными свойствами и решения ряда открытых вопросов теории групп. Некоторые из этих идей и результатов будут освещены в оставшейся части статьи.

Итогом многолетнего труда С.И. Адяна по решению проблемы Бернсайда и различным приложениям созданной им совместно с П.С. Новиковым теории явилась монография "Проблема Бернсайда и тождества в группах" [3], вышедшая в свет в 1975 г. Основное содержание монографии – улучшенная версия теории с понижением нижней границы для нечетной экспоненты до $n \geqslant 665$. Кроме того, в нее вошли доказательства результатов работ [2], [29], [32], [30], [31] с пониженной оценкой экспоненты.

Отрицательное решение проблемы Бернсайда, полученное совместно П.С. Новиковым и С.И. Адяном, естественным образом стимулировало исследования, связанные как непосредственно с бернсайдовыми группами, так и с, казалось бы, весьма далекой проблематикой. В этой связи заслуживает упоминания неопубликованная работа Е. Рипса (о которой известно благодаря запискам его лекций 1978 г. в университете г. Уорик), где излагался подход к возможному доказательству существования бесконечных 2-порожденных групп, все собственные подгруппы которых – конечные циклические одного и того же простого порядка (так называемых монстров Тарского, о которых речь пойдет ниже). Развитие идей этой работы привело к формулировке одного из определений понятия гиперболической группы, введенного М. Громовым в [33] и являющегося в настоящее время одним из фундаментальных понятий геометрической теории групп. Монстры Тарского впервые построил А.Ю. Ольшанский в работе 1982 г. [34], а несколько ранее в [28] им было опубликовано короткое (примерно тридцать страниц) доказательство теоремы Новикова–Адяна, но со значительно большей оценкой $n > 10^{10}$ для значений нечетной экспоненты n. Сокращение объема доказательства было достигнуто за счет перехода к геометрическому языку диаграмм ван Кампена, а также за счет использования длины путей на диаграммах и словарной длины элементов групп в качестве основных параметров объектов доказательства. Несмотря на существенную разницу в языке доказательств, между системами понятий и утверждениями в работе Ольшанского [28] и в работах Новикова–Адяна [1], [3] имеется естественная аналогия, связанная прежде всего с общностью основного подхода – индуктивным построением группы $B(m,n)$ и анализом соотношений с участием периодических слов во вспомогательных группах $B_\alpha(m,n)$.

В качестве наиболее значительных результатов, связанных с проблемой Бернсайда и полученных после работ Новикова–Адяна, отметим работы С.В. Иванова [35] и И.Г. Лысёнка [36], где подход к свободным бернсайдовым группам достаточно большой экспоненты n был распространен на случай четных значений n. В частности, было получено отрицательное решение проблемы Бернсайда для почти всех значений n. В [35] была разработана теория выводов из соотношений группы $B(m,n)$ для значений $n \geqslant 10^{48}$, делящихся на 2^9, а в [36] – соответствующая теория для значений $n \geqslant 8000$, делящихся на 16. При этом в [36] применялся принцип построения периодических определяющих соотношений групп $B_\alpha(m,n)$ по глубине периодичности, аналогичный использованному в теории Новикова–Адяна. Другим значительным усилением результатов Новикова–Адяна явилось доказательство существования бесконечных факторгрупп ограниченной экспоненты для более широкого класса групп (отрицательное решение проблемы Бернсайда эквивалентно существованию таких факторгрупп для нециклических свободных групп). Для класса гиперболических групп это утверждение было сформулировано без доказательства М. Громовым в [33] и доказано С. В. Ивановым и А. Ю. Ольшанским [37].

5. Проблема конечного базиса групповых тождеств

Первым применением теории Новикова–Адяна к вопросам, не связанным напрямую с группой Бернсайда, стало конструктивное решение проблемы конечного базиса.

Во второй половине 1960-х годов, в том числе благодаря работе Новикова–Адяна, возрос интерес к многообразиям групп и к так называемой проблеме конечного базиса тождеств для многообразий групп. Проблема эта, как видно из самого названия, состоит в том, чтобы указать многообразие групп, система всех тождеств которого не вытекает ни из какой конечной совокупности этих тождеств, или доказать, что такого многообразия не существует. На эту проблему указывает замечание в ранней работе Бернхарда Неймана [38]. В этой работе Нейман пишет на с. 520: “But to get all the identical relations we have to know something about $V_n(G)$ for every n. Whether this question can still be reduced to a finite problem cannot be decided now”; здесь через $V_n(G)$ обозначена относительно свободная группа в многообразии, задаваемом всеми тождествами группы G от не более чем n переменных. В биографии Неймана на сайте Австралийской академии наук мы читаем: “This comment evolved into the finite basis problem: does every group have a finite basis for its identical relations, that is, is there a finite set of identical relations from which all the identical relations follow?” Замечательно при этом, что Нейман начинает свою статью именно с обсуждения “знаменитой проблемы Бернсайда”.

Проблема конечного базиса является проблемой № 3 в монографии одного из лидеров исследований по многообразиям групп и комбинаторной теории групп Ханны Нейман [39]. Бернхард Нейман (супруг Ханны, умершей в 1971 г.) в своем докладе о работах Ханны, опубликованном в 1967 г. [40], начинает со следующей проблемы:

- Сколько существует многообразий групп?

Далее идут проблемы:

- Удовлетворяет ли решетка многообразий групп условию обрыва убывающих цепей? (Это, очевидно, эквивалентно вопросу о существовании многообразия групп, которое нельзя задать конечным числом тождеств.)
- Существует ли бесконечная неприводимая система групповых тождеств, т. е. такая, что определяемое ею многообразие отличается от каждого из многообразий, получаемых в результате удаления одного тождества?

Как пишет сам Сергей Иванович [41], ему “в 1969 году стало ясно, что теорию Новикова–Адяна можно использовать для построения групп с различными наперед заданными свойствами”. Первым значительным примером такого использования стало решение проблемы конечного базиса, включающее решение всех перечисленных выше проблем Неймана. Сергей Иванович представил заметку [42] в “Доклады АН СССР” 23 октября 1969 г. Независимо от С. И. Адяна другими средствами проблему решил молодой математик из МГУ А.Ю. Ольшанский. Сергей Иванович пишет [32]: “Неэффективное решение этой проблемы несколько раньше автора было получено А.Ю. Ольшанским. В работе А.Ю. Ольшанского доказано существование континуума различных многообразий групп. Так как множество всех конечных систем групповых тождеств счетно, то отсюда следует существование многообразий групп, которые не задаются конечными системами тождеств. Из доказательства А.Ю. Ольшанского не удается извлечь эффективное указание такого многообразия”.

Статьи С.И. Адяна и А.Ю. Ольшанского были опубликованы в одном номере журнала “Известия АН СССР, серия математическая” [32], [43]. Также в конце 1969 г. проблему конечного базиса методом, отличным от методов Адяна и Ольшанского, решил молодой английский математик М. Воган-Ли. В своей публикации [44] (представленной в журнал 12 января 1970 г.) он упоминает о результате Ольшанского. Впоследствии Воган-Ли стал профессором Оксфорда, известным, в частности, своими работами по так называемой ограниченной проблеме Бернсайда, о которой речь пойдет ниже.

Перейдем к точным формулировкам результатов С.И. Адяна; в нашем изложении мы следуем обзору [41]. Вот пример Адяна:

Система групповых тождеств

$$\{(x^{pn}y^{pn}x^{-pn}y^{-pn})^n = 1\}, \tag{4}$$

где $n \geqslant 4381$ *– фиксированное нечетное число, а* p *– параметр, пробегающий все простые числа, является независимой, т.е. ни одно из этих тождеств не вытекает из остальных.*

В книге [3] этот результат доказан для нечетных периодов $n \geqslant 1003$. В его доказательстве по любому значению параметра $p = r$ строится группа G_r, удовлетворяющая всем указанным тождествам (4), кроме тождества, которое получается при $p = r$. Искомая группа G_r строится на основе модификации теории Новикова–Адяна. При этом совместной индукцией по рангу α, наряду с обычными понятиями теории (см. выше), определяется понятие отмеченного периода ранга $\alpha+1$. А именно, минимальный период D ранга $\alpha+1$ называется отмеченным в ранге α, если можно указать такие слова A и B, что после подстановки их в левую часть одного из тождеств (4) при $p \neq r$ получается слово, которое сопряжено в аналоге группы $B_\alpha(m,n)$ некоторой степени периода D. В новой теории рассматриваются только такие повороты ранга α, в которых A есть отмеченный элементарный период ранга α. Вносится соответствующая корректировка всех определений основных понятий. В частности, все ограничения на число периодов в ядрах ранга α приведенных слов относятся только к тем ядрам, которые связаны с отмеченными периодами ранга α. Искомая группа G_r строится в новой теории аналогично тому, как в первоначальной теории строилась группа $B(m,n)$. Истинность тождеств (4) при $p \neq r$ в построенной группе также доказывается аналогично тому, как в первоначальной теории доказывалась истинность тождества $x^n = 1$ в группе $B(m,n)$.

Подход, впервые использованный С.И. Адяном при решении проблемы конечного базиса, открыл путь для решения многих других трудных проблем теории групп как им самим, так впоследствии и другими авторами.

6. Периодические произведения и проблема Мальцева

Следующим важным приложением теории Новикова–Адяна стала конструкция периодических произведений групп.

Понятие *периодического произведения периода* n для данного семейства групп $\{G_i\}_{i\in I}$ было введено С. И. Адяном в 1976 г. в работе [45]. Появление этого понятия позволило решить поставленную в 1948 г. известную проблему А. И. Мальцева о существовании операции умножения групп, отличной от классических операций свободного и прямого произведений и удовлетворяющей известным свойствам этих операций [46; § Д.11, п. 2].

В работе [45] искомые новые точные операции умножения групп со свойствами ассоциативности и наследственности по подгруппам, обозначенные через

$$F = \prod_{i\in I}^{n} G_i, \tag{5}$$

строились для нечетных периодов $n \geqslant 665$ и любого заданного семейства групп $\{G_i\}_{i\in I}$. Суть изложенной в работе [45] конструкции заключается в том, чтобы на базе обычного свободного произведения $\prod\limits_{i\in I}^{*} G_i$ нетривиальных групп заданного семейства классифицировать по рангам периодические слова аналогично тому, как это делалось в [3] для слов в алфавите исходной свободной группы, добавляя ранг за рангом все новые определяющие соотношения вида $A^n = 1$ с элементарными периодами A ранга α. Вопрос заключается в том, как индуктивно определять эти элементарные периоды A ранга α. Понятие элементарного периода ранга α, так же как и все сопутствующие ему понятия для ранга α, определяются совместной индукцией аналогично одноименным понятиям, построенным в монографии [3] для свободных бернсайдовых групп (см. выше). Хотя в статье [45] случай, когда исходные группы G_i содержат инволюции, не был разобран подробно, этот пробел был легко устранен в заметке [47].

В следующей работе по этой теме [48] С. И. Адяном был доказан интересный критерий простоты n-периодических произведений групп: периодическое произведение данного семейства групп $\{G_i\}_{i\in I}$, не содержащих инволюцию, является простой группой в том и только том случае, если $G_i^n = G_i$ для каждого множителя G_i этого произведения; здесь через G^n обозначена подгруппа, порожденная всеми n-ми степенями элементов из G. Этот критерий простоты впервые позволил указать серии конечно порожденных бесконечных простых групп в многообразиях периодических групп нечетного составного периода, и, таким образом, был получен положительный ответ на вопрос, поставленный в уже упоминавшейся монографии Ханны Нейман [39]: может ли групповое многообразие, отличное от многообразия всех групп, содержать бесконечное множество неизоморфных (нециклических) простых групп?

Дальнейшие результаты по теории и приложениям периодических произведений были получены Сергеем Ивановичем в соавторстве с его докторантом (а впоследствии профессором Ереванского государственного университета) В. С. Атабекяном.

В [49] было доказано некоторое естественное обобщение критерия простоты n-периодических произведений, описаны их так называемые CEP-подгруппы и получено достаточное условие хопфовости n-периодических произведений.

В [50] получено характеристическое свойство n-периодических произведений. Оказалось, что свободное произведение данного семейства групп имеет единственную нормальную подгруппу, удовлетворяющую некоторым естественным условиям, факторгруппа по которой изоморфна n-периодическому произведению этого семейства. С помощью этого свойства было показано, что почти все подгруппы n-периодических произведений содержат неабелевы свободные бернсайдовы подгруппы и даже являются равномерно неаменабельными.

В работе 2016 г. [51] доказывается C^*-простота n-периодических произведений широкого класса групп. Это означает, что приведенные C^*-алгебры этих групп не содержат собственных нетривиальных двусторонних замкнутых идеалов. В частности, оказалось, что n-периодические произведения любых конечных или циклических групп (в том числе и свободные бернсайдовы группы) являются C^*-простыми группами. Отметим, что вопрос о существовании C^*-простых групп без свободных подгрупп ранга 2 был поставлен П. де ля Арпом в 2007 г. Построив некоторую модификацию метода, который был использован С. И. Адяном для положительного решения известной проблемы П. Г. Конторовича о существовании некоммутативных аналогов аддитивной группы рациональных чисел с любым конечным числом порождающих (см. ниже), С. И. Адян и В. С. Атабекян в работе 2018 г. [52] показали, что любая счетная абелева группа D может быть вербально вложена в качестве центра в некоторую m-порожденную группу A так, что факторгруппа A/D будет изоморфна свободной бернсайдовой группе $B(m, n)$. В [52] рассматриваются также другие приложения предлагаемого обобщения техники Адяна. В частности, для нечетных $n \geqslant 665$ описываются свободные группы многообразия, определяемого тождеством $[x^n, y] = 1$, и вычисляется мультипликатор Шура группы $B(m, n)$.

В [53] исследуются относительно свободные группы в многообразиях, задаваемых произвольным набором из системы тождеств (4). Доказывается, что централизаторы элементов таких групп являются циклическими, эти группы имеют тривиальный центр и любая их абелева подгруппа – циклическая. Для свободных групп Γ всех этих многообразий получен ответ на вопрос об описании автоморфизмов полугруппы $\mathrm{End}(\Gamma)$, поставленный Б. И. Плоткиным в 2000 г. Доказано также, что каждый нормальный автоморфизм (т. е. автоморфизм, который стабилизирует любую нормальную подгруппу) нециклических свободных групп этих многообразий является внутренним автоморфизмом [54].

Ряд рассматриваемых выше групп являются так называемыми n-кручеными группами; этот класс был введен и исследован в [55]. Группа называется *n-крученой*, если она имеет систему определяющих соотношений вида $A^n = 1$ для некоторой системы элементов, включающей в себя, в частности, все элементы конечного порядка. В [55] показано, что при нечетных $n \geqslant 665$ для каждой n-крученой группы можно построить теорию, аналогичную теории Новикова–Адяна, что позволяет исследовать n-крученые группы развитыми в этой теории методами. В качестве приложений показано, что n-периодическое произведение любого семейства n-крученых групп является n-крученой группой, что любая n-крученая группа может быть задана с помощью некоторой независимой системы определяющих соотношений вида A^n, что центр любой n-крученой группы тривиален, что группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(\mathrm{End}(G))$ канонически вложена в группу $\mathrm{Aut}(\mathrm{Aut}(G))$ для любой n-крученой группы G и др. (см. [55]).

7. Монстры Тарского

Вопрос о существовании бесконечной группы, все собственные подгруппы которой являются циклическими одного и того же простого порядка n, приписывают А. Тарскому.[3] Очевидно, что группа, обладающая этим свойством, является 2-порожденной бесконечной группой экспоненты n. Вопрос о существовании таких групп – монстров Тарского – долгое время оставался открытой проблемой. Положительный ответ на этот вопрос автоматически означал бы решение целого ряда отрытых проблем теории групп, например проблемы О. Ю. Шмидта о существовании отличных от квазициклических бесконечных групп, у которых все собственные подгруппы конечны. Монстры Тарского впервые были построены А. Ю. Ольшанским [34] в 1982 г. для простых $n > 10^{75}$. Этот результат позднее был перенесен на случай составных нечетных $n > 10^{80}$ В. С. Атабекяном и С. В. Ивановым [56], построившими 2-порожденные бесконечные группы, все собственные подгруппы которых являются циклическими и имеют порядок, делящий n.

В совместной работе [57] С. И. Адян и И. Г. Лысёнок построили 2-порожденную бесконечную группу, все собственные подгруппы которой циклические порядка, делящего n, для любого нечетного $n \geqslant 1003$. Тем самым были значительно усилены результаты Ольшанского и Атабекяна–Иванова. Доказательство результата Адяна–Лысёнка проводилось на оригинальном языке теории Новикова–Адяна из монографии [3]. При этом сама идея построения такой группы довольно проста (как, впрочем, и практически во всех применениях теории), а значительные технические трудности возникают лишь при ее реализации. Зафиксируем множество порождающих $\{a, b\}$. При индуктивном построении группы на каждом шаге, соответствующем выбранному значению ранга α, вместе с периодическими определяющими соотношениями вида $A^n = 1$ для $A \in E_\alpha$ добавляется некоторое множество соотношений вида

$$aU(X, Y) = 1, \qquad bV(X, Y) = 1,$$

где $U(X, Y)$ и $V(X, Y)$ – слова, по структуре напоминающие периодические слова вида Z^n, а X и Y пробегают множество пар слов, определяемое специальным образом для данного α. Множества пар (X, Y) подбираются так, чтобы в построенной таким образом группе G перечислялись, с точностью до сопряженности, нециклические подгруппы, порожденные всевозможными парами элементов X и Y. Из определяющих соотношений вытекает, что любая нециклическая подгруппа группы G содержит пару элементов $x^{-1}ax$ и $x^{-1}bx$ для некоторого x, т. е. совпадает с G. Циклические же подгруппы, как и в случае бернсайдовой группы $B(2, n)$, имеют порядок, делящий n.

Работа [57] явилась очередной демонстрацией возможностей теории Новикова–Адяна для построения примеров бесконечных групп с необычными свойствами, причем одного из наиболее ярких таких примеров.

[3]Сергей Иванович рассказывал, что этот вопрос Тарский задал во время дискуссии на его докладе, назвав такие группы “монстрами”.

8. Конструктивные оценки в проблеме Бернсайда–Магнуса

За шестьдесят лет, которые прошли между формулировкой проблемы Бернсайда и анонсом П. С. Новикова [24], попытки продвинуться в ее изучении предпринимались в разных направлениях. О частных результатах по самой проблеме для малых значений экспоненты n мы уже писали выше. Из числа предложенных разными авторами модификаций наиболее плодотворным оказался следующий вопрос, поставленный в 1950 г. В. Магнусом [58].

Обозначим через $R(m,n)$ факторгруппу $B(m,n)$ по пересечению всех ее нормальных подгрупп конечного индекса. *Проблема Бернсайда–Магнуса* (иногда также называемая *ограниченной* или *ослабленной* проблемой Бернсайда) состоит в определении того, является ли группа $R(m,n)$ конечной.

Легко понять, что конечность группы $R(m,n)$ эквивалентна существованию максимальной *конечной* m-порожденной группы экспоненты n. Как мы уже отмечали выше, в то время среди алгебраистов было распространено достаточно сильное убеждение в том, что проблема Бернсайда должна иметь положительное решение, и, тем самым, поставленный Магнусом вопрос рассматривался как важная промежуточная веха в нахождении этого решения.

Реальность оказалась совершенно иной. В нашем обсуждении мы для простоты концентрируемся на наиболее важном случае, когда $n = p$ простое, и отсылаем заинтересованного читателя к работам Е. И. Зельманова [59], [60] за дополнительной информацией по поводу составной экспоненты.

Если группа $R(m,p)$ конечна, то по теореме Силова она является нильпотентной p-группой. Обратное, очевидно, тоже верно: всякая нильпотентная конечно порожденная p-группа конечна. Поэтому проблему Бернсайда–Магнуса можно переформулировать как вопрос о *нильпотентности* групп $R(m,p)$, что открывает дорогу для ее изучения методами теории алгебр Ли.

Более точно, напомним, что *нижний центральный ряд* произвольной группы G определяется индуктивно как $G_1 = G$, $G_{i+1} = [G_i, G]$ $(i \geqslant 1)$. Факторгруппы G_i/G_{i+1} абелевы и конечно порождены, если конечно порожденной является сама группа G. Более того, в случае p-групп они являются (конечномерными) векторными пространствами над $\mathbb{F}_p$. Операция взятия коммутанта превращает прямую сумму $L(G) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} L_i(G)$, где $L_i(G) = G_i/G_{i+1}$, в градуированную алгебру Ли. Проблема Бернсайда–Магнуса тем самым превращается в утверждение о том, что почти все члены $L_i(B(n,p))$ равны нулю.

Пример нетривиального тождества в $L(R(m,p))$ был указан Г. Цассенхаузом [61]; оно имеет вид

$$\underbrace{[\ldots[[y,x],x]\ldots]}_{p-1 \text{ раз}} \tag{6}$$

и обычно называется *тождеством Энгеля*. Таким образом, для решения проблемы Бернсайда–Магнуса достаточно доказать, что всякая конечно порожденная алгебра Ли над $\mathbb{F}_p$ с тождеством Энгеля конечномерна. Эта работа была проделана А. И. Кострикиным в монографии [62]; тем самым им была решена проблема Бернсайда–Магнуса для случая простой экспоненты n.

Доказательство Кострикина, однако, совершенно неконструктивно и проводится от противного: предполагается существование некоторого объекта, называемого “сэндвичем”, и из этого выводится противоречие. При этом естественно встал вопрос (см., например, [62; гл. 6, п. 5.15]) о нахождении конструктивного доказательства этого результата, а также о получении нижних оценок на ступень нильпотентности и размерность алгебр $L(R(m,p))$.

В этот момент на сцене появляются работы С. И. Адяна и его учеников; с обзором предшествовавших результатов для конкретных значений m, p можно ознакомиться по статье [63].

Начнем с нижних оценок. В работе С. И. Адяна и Н. Н. Репина [64] рассматривались свободные энгелевы алгебры Ли, т. е. относительно свободные m-порожденные алгебры Ли в многообразии, задаваемом тождеством (6). Было доказано, что ступень нильпотентности (минимальное n, для которого $L_n = 0$) экспоненциальна по p уже при двух порождающих; более точно, нижняя оценка имеет вид $2^{p/15}$ для достаточно больших p.

Известно [65], что не все тождества, выполненные в $L(R(m,p))$, вытекают из тождеств Энгеля (6), поэтому нижняя оценка из [64] не распространяется на случай $L(R(m,p))$ автоматически. Такая оценка была получена в следующей, технически намного более сложной статье Адяна и Репина [66]: ступень нильпотентности алгебры $L(R(2,p))$ не менее $2^{p/15.4}$. В той же работе была установлена дважды экспоненциальная оценка на размерность:

$$\dim(L(R(2,p))) \geqslant 2^{2^{p/15.5}},$$

что эквивалентно трижды экспоненциальной оценке

$$|R(2,p)| \geqslant p^{2^{2^{p/15.5}}} \tag{7}$$

на размер группы $R(2,p)$. Эти оценки являются непревзойденными до сих пор.

Прежде чем приступить к обсуждению верхних оценок, т. е. эффективизации теоремы Кострикина, уместно отметить, что по-настоящему неконструктивные доказательства (т. е. те, которые были бы признаны таковыми математическими логиками) в математике действительно встречаются, хотя и реже, чем обычно принято считать. Хорошим примером служат многие великие теоремы диофантовой геометрии, доказываемые, как правило, от противного. Доказательство Кострикина, как мы уже отмечали выше, имеет аналогичную природу. Тем не менее в статье С. И. Адяна и А. А. Разборова [63] было показано, что ступень нильпотентности (а также, по формуле Витта, размерность) алгебры $L(R(m,p))$ оценивается сверху примитивно рекурсивной функцией от m, p. Ключевым моментом в этой работе стало использование языка квазитождеств, заменивших (по существу неконструктивное) понятие сэндвича из доказательства Кострикина.

В отличие от (7), верхние оценки из [63] довольно громоздкие, и поэтому явные формулы мы здесь не приводим. Как было предложено в последующей статье Вогана-Ли и Зельманова [67], для понимания ситуации на концептуальном уровне удобно воспользоваться так называемой *иерархией Гжегорчика* (см., например, [68]) $\mathcal{E}^0 \subseteq \mathcal{E}^1 \subseteq \mathcal{E}^2 \subseteq \cdots$ ($\bigcup\limits_n \mathcal{E}^n$ состоит из всех примитивно рекурсивных функций). Класс $\mathcal{E}^2$ соответствует полиномам, поэтому результат Адяна–Репина влечет, что $|R(m,p)| \notin \mathcal{E}^2$. Верхние оценки на порядок, доказанные Адяном и Разборовым, принадлежат классу $\mathcal{E}^5$, а их усиление из работы Вогана-Ли и Зельманова принадлежит классу $\mathcal{E}^4$.

Принадлежность функции $|R(m,p)|$ классу $\mathcal{E}^3$ остается интересным открытым вопросом. Этот класс состоит из так называемых *элементарных функций*, т. е. тех, которые могут быть вычислены за время, выражаемое башней экспонент фиксированной высоты, и мы предполагаем, что для решения этого вопроса потребуются принципиально новые методы.

9. Полугруппы с одним определяющим соотношением

Классический результат Магнуса [69], полученный задолго до теоремы Новикова [9], утверждает, что проблема равенства слов для групп с одним определяющим соотношением (т. е. обладающих заданием вида (1) с $n = 1$) алгоритмически разрешима. Аналогичный вопрос для полугрупп неожиданно оказался намного более трудным и со временем превратился в одну из центральных открытых проблем во всей области. С. И. Адяном и представителями его школы был внесен весьма существенный вклад в исследование этой проблемы.

К легким случаям можно отнести соотношение с равными длинами определяющих слов (классы конгруэнтности при этом конечны), а также соотношение, в котором более длинное из слов гиперпросто (т. е. никакое его собственное непустое начало не является концом). Здесь последовательные замены длинного подслова на короткое дают нормальную форму слова.

В фундаментальной работе [70] С. И. Адян решил проблему для двух новых принципиальных случаев. Первый из них относится к моноидному соотношению вида $W = 1$, когда одно из определяющих слов пусто. Здесь путем разбиения определяющего слова на подслова удалось свести задачу к проблеме равенства слов в группе с одним определяющим соотношением.

В ситуации, когда оба определяющих слова непусты, можно сравнивать первые буквы определяющих слов, а также последние. На этом пути возникают важные понятия левого и правого графа системы соотношений, впервые введенные в работе [70]. Оказывается, что если левый (правый) граф не имеет циклов, то моноид, заданный такими соотношениями, обладает левым (правым) сокращением. Если же циклов нет ни в том, ни в другом графе, то моноид изоморфно вложим в группу. Таким образом, для несократимого с обеих сторон определяющего соотношения проблема слов также была решена положительно.

Данный результат в дальнейшем был несколько усилен в разных направлениях.

Вместе со своим учеником Г. У. Оганесяном в 1978 г. Сергей Иванович опубликовал работу [71], в которой были сделаны дальнейшие шаги в решении проблемы. Эти исследования были продолжены в последующей статье [72] тех же авторов. Задача была сведена к случаю алфавита из двух образующих, и при этом случай сократимого с обеих сторон соотношения был сведен к случаю, когда хотя бы с одной из сторон соотношение несократимо. Тем самым оставалось исследовать случаи соотношений вида $aPa = bQa$ и $a = bQa$, где P, Q – некоторые слова в двухбуквенном алфавите.

В решение задачи для второго из случаев большой вклад был внесен Оганесяном, который свел ее к проблеме делимости слов в полугруппах без циклов. Также в работе [72] была решена проблема слов для случая, когда короткое определяющее слово гиперпросто и не входит в качестве подслова в длинное.

С учетом того, что соотношение можно считать несократимым слева и при этом возникает полугруппа без циклов, для которой разрешимость проблемы левой делимости влечет разрешимость проблемы равенства, имеет смысл сосредоточиться на этом случае. В работе [73] 1976 г. С. И. Адян излагает алгоритм, который для случая полугрупп без левых циклов по слову U и по букве a выдает первое слева преобразование исходного слова U в слово, начинающееся с a (при условии левой делимости U на a).

Данная процедура, названная в работе алгоритмом $\mathfrak{A}$, может работать бесконечно долго. На практике это может означать зацикливание алгоритма. Также возможен случай “раздувания” слова, когда вместо подслова X получаются слова вида $UXV, U^2XV^2, \dots$. Однако имеются примеры, когда процедура работает бесконечно долго и имеет дело со словами намного более сложного вида. Можно сказать, что “судьба” проблемы слов в целом зависит от понимания того, как устроен данный алгоритм. Несмотря на простоту описания, он недостаточно хорошо изучен.

Нужно заметить, что в устных беседах С. И. Адян высказывал допущение, что проблема равенства для полугрупп с одним соотношением может оказаться алгоритмически неразрешимой. В частности, он сравнивал эту ситуацию с результатом Ю. В. Матиясевича [74], полученным в конце 1960-х годов. Там было построено неразрешимое ассоциативное исчисление с тремя определяющими соотношениями, где у двух соотношений из трех все определяющие слова имеют небольшую длину и только одно из соотношений содержит информацию об универсальной машине Тьюринга.

Проблема равенства слов для полугрупп с одним соотношением все еще ожидает своего решения, и можно предполагать, что на этом пути будут использоваться результаты и конструкции, полученные в работах С. И. Адяна.

10. Односторонние системы Туэ

Односторонние системы подстановок Туэ возникли в алгебре в первой половине XX в. одновременно с полугрупповыми и групповыми исчислениями; последние можно рассматривать как односторонние системы с обратимым набором правил. Роль односторонних систем Туэ в математике сравнительно невелика, однако они намного более интересны с точки зрения приложений в информатике. В настоящее время эта область исследований включена в хорошо развитую часть теоретической информатики, изучающую более общие системы подстановок термов [75]. Системы подстановок термов имеют важные применения в символьных вычислениях (программный пакет Mathematica), функциональных языках программирования (таких, как LISP и Haskell) и других областях.

Одна из поздних работ С. И. Адяна [76] была вызвана к жизни вопросом из этой области, который привлек его внимание конкретностью и простотой формулировки. (В этом проявился хорошо известный коллегам вкус Сергея Ивановича к математическим вопросам, кажущимся простыми, но на самом деле таящим в себе некую “изюминку”.)

Рассматривается односторонняя система Туэ Σ, задаваемая тремя правилами подстановок слов в алфавите из трех букв $\{a, b, c\}$:

$$aa \to bc, \qquad bb \to ac, \qquad cc \to ab.$$

Применение любого из этих правил к данному слову X состоит в замене в X некоторого вхождения подслова слева от стрелки на подслово справа. Любая последовательность применений правил называется *выводом* в данной системе подстановок Σ.

Одностороннюю систему Туэ, в которой всякий вывод конечен, называют *терминирующей*. Это свойство является одним из наиболее важных для систем подстановок термов, и его исследованию – как с теоретической точки зрения, так и с точки зрения построения практически работающих алгоритмов – уделяется большое внимание.

Известно, что в общем случае вопрос о терминируемости данной односторонней системы Туэ алгоритмически неразрешим даже для систем из не более чем трех правил [77]. Поскольку правила системы Σ не меняют длины слова, вопрос о ее терминируемости равносилен вопросу о том, существует ли нетривиальный вывод, приводящий от исходного слова к тому же самому слову.

Вопрос о терминируемости системы Σ, поставленный Х. Зантемой, оказался не таким простым и был решен Д. Хофбауэром и Й. Вальдманом [78] с помощью компьютерного перебора. Хофбауэр и Вальдман нашли интерпретацию букв a, b и c как целочисленных матриц порядка 4, действие которых приводит к убыванию целочисленных 4-векторов в смысле некоторого фундированного порядка.

Вопрос о том, каким образом использовать компьютеры в задачах доказательства терминируемости, сам по себе важен для практики, и работа Хофбауэра и Вальдмана была интересной в этом отношении. Однако их решение не давало оценок на возможную длину вывода в зависимости от длины исходного слова, существенно улучшающих тривиальную экспоненциальную оценку. В частности, остался открытым естественный вопрос: всегда ли вывод в системе Σ обрывается за полиномиальное число шагов от длины исходного слова? Именно этот вопрос и решил Сергей Иванович, подойдя к задаче совершенно с другой стороны.

Обозначим через $D_\Sigma(n)$ число шагов в самом длинном выводе, начинающемся с некоторого слова длины, не превосходящей n. Терминируемость системы Σ равносильна конечности величины $D_\Sigma(n)$ для всех натуральных n. С. И. Адян установил, что функция $D_\Sigma(n)$ является квадратичной. Фактически он не только нашел асимптотику этой величины, но и выписал точное выражение, определяющее $D_\Sigma(n)$.

Метод, который был применен Сергеем Ивановичем для решения этой задачи, состоит в анализе всех возможных выводов, начинающихся со слов данной длины. При выборе начального слова общий случай последовательно сводится к все более специальным случаям. В конце концов устанавливается, что максимум функции $D_\Sigma(n+2)$ достигается на словах c^2b^n и b^na^2, и фактически описывается вид одного из выводов максимальной длины.

Аппарат, используемый для такого анализа, имеет много общих черт с инструментарием, развитым в других работах С. И. Адяна: доказательство нескольких утверждений совместной индукцией, отслеживание “активных” вхождений подслов, разбиение слова на части, выводы в которых развиваются независимо, и другие “фирменные” приемы. Понимая частный характер решенной им конкретной задачи, С. И. Адян рассматривал свою работу скорее как наглядную демонстрацию возможностей применения своей техники, что и отражено в названии его основной публикации на эту тему [76].

11. Другие результаты

Ряд результатов, полученных С. И. Адяном совместно с другими авторами, посвящен линейным группам. В совместной работе [79] С. И. Адяна, И. Г. Лысёнка и Й. Меннике была найдена система определяющих соотношений для группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{H}_{\mathbb{Z}})$ над кольцом $\mathbb{H}_{\mathbb{Z}}$ кватернионов с целыми коэффициентами. Отметим также работу [80], где было найдено элементарное доказательство результата Картера–Келлера, утверждающего, что любая матрица из $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ является произведением ограниченного (зависящего только от n) числа элементарных матриц.

Последние годы жизни Сергей Иванович активно работал над доказательством бесконечности бернсайдовых групп $B(m,n)$ с $m \geqslant 2$ порождающими для значительно меньших нечетных значений экспоненты n (порядка 100), чем известная нижняя оценка 665 (см. [81]). Эта работа осталась незавершенной.

Список литературы

[1] П. С. Новиков, С. И. Адян, "О бесконечных периодических группах. I", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **32**:1 (1968), 212–244; II, № 2, 251–524; III, № 3, 709–731; англ. пер.: P. S. Novikov, S. I. Adian, "Infinite periodic groups. I", *Math. USSR-Izv.*, **2**:1 (1968), 209–236; II, № 2, 241–479; III, № 3, 665–685.

[2] П. С. Новиков, С. И. Адян, "Определяющие соотношения и проблема тождества для свободных периодических групп нечетного порядка", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **32**:4 (1968), 971–979; англ. пер.: P. S. Novikov, S. I. Adian, "Defining relations and the word problem for free periodic groups of odd order", *Math. USSR-Izv.*, **2**:4 (1968), 935–942.

[3] С. И. Адян, *Проблема Бернсайда и тождества в группах*, Наука, М., 1975, 335 с.; англ. пер.: S. I. Adian, *The Burnside problem and identities in groups*, Ergeb. Math. Grenzgeb., **95**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1979, xi+311 pp.

[4] С. И. Адян, "Алгоритмическая неразрешимость проблем распознавания некоторых свойств групп", *Докл. АН СССР*, **103**:4 (1955), 533–535.

[5] А. Марков, "Неразрешимость проблемы гомеоморфии", *Докл. АН СССР*, **121**:2 (1958), 218–220.

[6] Л. Д. Беклемишев, И. Г. Лысёнок, А. А. Мальцев, С. П. Новиков, М. Р. Пентус, А. А. Разборов, А. Л. Семёнов, В. А. Успенский, "Сергей Иванович Адян (к 75-летию со дня рождения)", *УМН*, **61**:3(369) (2006), 179–191; англ. пер.: L. D. Beklemishev, I. G. Lysenok, A. A. Mal'tsev, S. P. Novikov, M. R. Pentus, A. A. Razborov, A. L. Semenov, V. A. Uspenskii, "Sergei Ivanovich Adian (on his 75th birthday)", *Russian Math. Surveys*, **61**:3 (2006), 575–588.

[7] П. С. Новиков, С. И. Адян, "Об одной полунепрерывной функции", *Уч. зап. МГПИ им. В. И. Ленина*, **138**:3 (1958), 3–10; *Алгоритмические вопросы алгебры и логики*, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Сергея Ивановича Адяна, Тр. МИАН, **274**, МАИК "Наука/Интерпериодика", М., 2011, 10–14; англ. пер.: P. S. Novikov, S. I. Adian, "On a semicontinuous function", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **274** (2011), 4–8.

[8] В. Г. Кановей, В. А. Любецкий, *Современная теория множеств: борелевские и проективные множества*, МЦНМО, М., 2010, 320 с.

[9] П. С. Новиков, "Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп", Тр. МИАН СССР, **44**, Изд-во АН СССР, М., 1955, 3–143; англ. пер.: P. S. Novikov, "On the algorithmic insolvability of the word problem in group theory", Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **9**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1958, 1–122.

[10] А. А. Марков, “Невозможность алгорифмов распознавания некоторых свойств ассоциативных систем”, *Докл. АН СССР*, **77**:6 (1951), 953–956.

[11] H. G. Rice, “Classes of recursively enumerable sets and their decision problems”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **74**:2 (1953), 358–366.

[12] В. А. Успенский, “Системы перечислимых множеств и их нумерации”, *Докл. АН СССР*, **105**:6 (1955), 1155–1158.

[13] С. И. Адян, “Неразрешимость некоторых алгоритмических проблем теории групп”, Тр. ММО, **6**, ГИТТЛ, М., 1957, 231–298.

[14] С. И. Адян, “Конечно-определённые группы и алгоритмы”, *Докл. АН СССР*, **117**:1 (1957), 9–12.

[15] M. O. Rabin, “Recursive unsolvability of group theoretic problems”, *Ann. of Math.* (2), **67** (1958), 172–194.

[16] G. Higman, “Subgroups of finitely presented groups”, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **262**:1311 (1961), 455–475.

[17] C. F. Miller III, P. E. Schupp, “Embeddings into Hopfian groups”, *J. Algebra*, **17**:2 (1971), 171–176.

[18] М. А. Штанько, “Теорема А. А. Маркова и алгоритмически нераспознаваемые комбинаторные многообразия”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:1 (2004), 207–224; англ. пер.: M. A. Shtan’ko, “Markov’s theorem and algorithmically non-recognizable combinatorial manifolds”, *Izv. Math.*, **68**:1 (2004), 205–221.

[19] М. А. Штанько, “К теореме Маркова об алгоритмической нераспознаваемости многообразий”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **11**:5 (2005), 257–259; англ. пер.: M. A. Stan’ko, “On the Markov theorem on algorithmic nonrecognizability of manifolds”, *J. Math. Sci.* (*N. Y.*), **146**:1 (2007), 5622–5623.

[20] И. Н. Санов, “Решение проблемы Бернсайда для показателя 4”, *Уч. зап. ЛГУ. Сер. матем.*, 1940, № 10, 166–170.

[21] M. Hall, Jr., “Solution of the Burnside problem for exponent six”, *Illinois J. Math.*, **2**:4B (1958), 764–786.

[22] В. А. Тартаковский, “Решение проблемы тождества для групп с k-сократимым базисом при $k > 6$”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **13**:6 (1949), 483–494.

[23] С. Е. Аршон, “Доказательство существования n-значных бесконечных асимметричных последовательностей”, *Матем. сб.*, **2(44)**:4 (1937), 769–779.

[24] П. С. Новиков, “О периодических группах”, *Докл. АН СССР*, **127** (1959), 749–752; англ. пер.: P. S. Novikov, “On periodic groups”, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **45**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1965, 19–22.

[25] Е. С. Голод, “О ниль-алгебрах и финитно-аппроксимируемых p-группах”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **28**:2 (1964), 273–276; англ. пер.: E. S. Golod, “On nil-algebras and finitely approximable p-groups”, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **48**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1965, 103–106.

[26] T. Delzant, M. Gromov, “Courbure mésoscopique et théorie de la toute petite simplification”, *J. Topol.*, **1**:4 (2008), 804–836.

[27] R. Coulon, “On the geometry of Burnside quotients of torsion free hyperbolic groups”, *Internat. J. Algebra Comput.*, **24**:3 (2014), 251–345.

[28] А. Ю. Ольшанский, “О теореме Новикова–Адяна”, *Матем. сб.*, **118(160)**:2(6) (1982), 203–235; англ. пер.: A. Yu. Ol’shanskiĭ, “On the Novikov–Adyan theorem”, *Math. USSR-Sb.*, **46**:2 (1983), 203–236.

[29] П. С. Новиков, С. И. Адян, “О коммутативных подгруппах и проблеме сопряженности в свободных периодических группах нечетного порядка”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **32**:5 (1968), 1176–1190; англ. пер.: P. S. Novikov, S. I. Adian, “On abelian subgroups and the conjugacy problem in free periodic groups of odd order”, *Math. USSR-Izv.*, **2**:5 (1968), 1131–1144.

[30] С. И. Адян, "О некоторых группах без кручения", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **35**:3 (1971), 459–468; англ. пер.: S. I. Adjan, "On some torsion-free groups", *Math. USSR-Izv.*, **5**:3 (1971), 475–484.

[31] С. И. Адян, "О подгруппах свободных периодических групп нечетного показателя", *Сборник статей. I*, Посвящается академику Ивану Матвеевичу Виноградову к его восьмидесятилетию, Тр. МИАН СССР, **112**, Наука, М., 1971, 64–72; англ. пер.: S. I. Adjan, "The subgroups of free periodic groups of odd exponent", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **112** (1971), 61–69.

[32] С. И. Адян, "Бесконечные неприводимые системы групповых тождеств", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **34**:4 (1970), 715–734; англ. пер.: S. I. Adjan, "Infinite irreducible systems of group identities", *Math. USSR-Izv.*, **4**:4 (1970), 721–739.

[33] M. Gromov, "Hyperbolic groups", *Essays in group theory*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **8**, Springer, New York, 1987, 75–263.

[34] А. Ю. Ольшанский, "Группы ограниченного периода с подгруппами простого порядка", *Алгебра и логика*, **21**:5 (1982), 553–618; англ. пер.: A. Yu. Ol'shanskiĭ, "Groups of bounded period with subgroups of prime order", *Algebra and Logic*, **21**:5 (1982), 369–418.

[35] S. V. Ivanov, "The free Burnside groups of sufficiently large exponents", *Internat. J. Algebra Comput.*, **4**:1-2 (1994), 1–308.

[36] И. Г. Лысёнок, "Бесконечные бернсайдовы группы четного периода", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **60**:3 (1996), 3–224; англ. пер.: I. G. Lysenok, "Infinite Burnside groups of even exponent", *Izv. Math.*, **60**:3 (1996), 453–654.

[37] S. V. Ivanov, A. Yu. Ol'shanskii, "Hyperbolic groups and their quotients of bounded exponents", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **348**:6 (1996), 2091–2138.

[38] B. H. Neumann, "Identical relations in groups. I", *Math. Ann.*, **114**:1 (1937), 506–525.

[39] Х. Нейман, *Многообразия групп*, Мир, М., 1969, 264 с.; пер. с англ.: H. Neumann, *Varieties of groups*, Ergeb. Math. Grenzgeb., **37**, Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1967, x+192 pp.

[40] B. H. Neumann, "Varieties of groups", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:5 (1967), 603–613.

[41] С. И. Адян, "Проблема Бернсайда и связанные с ней вопросы", *УМН*, **65**:5(395) (2010), 5–60; англ. пер.: S. I. Adian, "The Burnside problem and related topics", *Russian Math. Surveys*, **65**:5 (2010), 805–855.

[42] С. И. Адян, "Бесконечные неприводимые системы групповых тождеств", *Докл. АН СССР*, **190**:3 (1970), 499–501; англ. пер.: S. I. Adjan, "Infinite irreducible systems of group identities", *Soviet Math. Dokl.*, **11** (1970), 113–115.

[43] А. Ю. Ольшанский, "О проблеме конечного базиса тождеств в группах", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **34**:2 (1970), 376–384; англ. пер.: A. J. Ol'šanskiĭ, "On the problem of a finite basis of identities in groups", *Math. USSR-Izv.*, **4**:2 (1970), 381–389.

[44] M. R. Vaughan-Lee, "Uncountably many varieties of groups", *Bull. London Math. Soc.*, **2**:3 (1970), 280–286.

[45] С. И. Адян, "Периодические произведения групп", *Теория чисел, математический анализ и их приложения*, Сборник статей. Посвящается академику Ивану Матвеевичу Виноградову к его восьмидесятипятилетию, Тр. МИАН СССР, **142**, Наука, М., 1976, 3–21; англ. пер.: S. I. Adyan, "Periodic products of groups", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **142** (1979), 1–19.

[46] А. Г. Курош, *Теория групп*, 3-е изд., Наука, М., 1967, 648 с.; нем. пер.: A. G. Kurosch, *Gruppentheorie*, v. I, II, überarb. erw. Aufl., Math. Lehrbucher Monogr. I. Abt. Math. Lehrbucher, v. I, **III/I**, Akademie-Verlag, Berlin, 1970, xxii+360 pp.; v. II, **III/II**, 1972, xiv+358 pp.

[47] С. И. Адян, “Еще раз о периодических произведениях групп и проблеме А. И. Мальцева”, *Матем. заметки*, **88**:6 (2010), 803–810; англ. пер.: S. I. Adyan, “Once more on periodic products of groups and on a problem of A. I. Mal'tsev”, *Math. Notes*, **88**:6 (2010), 771–775.

[48] С. И. Адян, “О простоте периодических произведений групп”, *Докл. АН СССР*, **241**:4 (1978), 745–748; англ. пер.: S. I. Adyan, “On the simplicity of periodic products of groups”, *Soviet Math. Dokl.*, **19**:4 (1978), 910–913.

[49] С. И. Адян, В. С. Атабекян, “О хопфовости n-периодических произведений групп”, *Матем. заметки*, **95**:4 (2014), 483–491; англ. пер.: S. I. Adian, V. S. Atabekyan, “The Hopfian property of n-periodic products of groups”, *Math. Notes*, **95**:4 (2014), 443–449.

[50] С. И. Адян, В. С. Атабекян, “Характеристические свойства и равномерная неаменабельность n-периодических произведений групп”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **79**:6 (2015), 3–17; англ. пер.: S. I. Adian, V. S. Atabekyan, “Characteristic properties and uniform non-amenability of n-periodic products of groups”, *Izv. Math.*, **79**:6 (2015), 1097–1110.

[51] С. И. Адян, В. С. Атабекян, “C^*-простота n-периодических произведений”, *Матем. заметки*, **99**:5 (2016), 643–648; англ. пер.: S. I. Adyan, V. S. Atabekyan, “C^*-simplicity of n-periodic products”, *Math. Notes*, **99**:5 (2016), 631–635.

[52] С. И. Адян, В. С. Атабекян, “Центральные расширения свободных периодических групп”, *Матем. сб.*, **209**:12 (2018), 3–16; англ. пер.: S. I. Adian, V. S. Atabekyan, “Central extensions of free periodic groups”, *Sb. Math.*, **209**:12 (2018), 1677–1689.

[53] С. И. Адян, В. С. Атабекян, “О свободных группах бесконечно базируемых многообразий С. И. Адяна”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **81**:5 (2017), 3–14; англ. пер.: S. I. Adian, V. S. Atabekyan, “On free groups in the infinitely based varieties of S. I. Adian”, *Izv. Math.*, **81**:5 (2017), 889–900.

[54] С. И. Адян, В. С. Атабекян, “О нормальных автоморфизмах свободных групп бесконечно базируемых многообразий”, *Матем. заметки*, **108**:2 (2020), 163–170; англ. пер.: S. I. Adian, V. S. Atabekyan, “Normal automorphisms of free groups of infinitely based varieties”, *Math. Notes*, **108**:2 (2020), 149–154.

[55] С. И. Адян, В. С. Атабекян, “n-крученые группы”, *Известия НАН РА. Математика*, 2019, № 6, 3–18; англ. пер.: S. I. Adian, V. S. Atabekyan, “n-torsion groups”, *J. Contemp. Math. Anal.*, *Armen. Acad. Sci.*, **54**:6 (2019), 319–327.

[56] В. С. Атабекян, С. В. Иванов, *Два замечания о группах ограниченного периода*, Деп. в ВИНИТИ 30.03.1987, № 2243-В87, 1987, 23 с.

[57] С. И. Адян, И. Г. Лысёнок, “О группах, все собственные подгруппы которых конечные циклические”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **55**:5 (1991), 933–990; англ. пер.: S. I. Adyan, I. G. Lysenok, “On groups all of whose proper subgroups are finite cyclic”, *Math. USSR-Izv.*, **39**:2 (1992), 905–957.

[58] W. Magnus, “A connection between the Baker–Hausdorff formula and a problem of Burnside”, *Ann. of Math.* (2), **52** (1950), 111–126.

[59] Е. И. Зельманов, “Решение ослабленной проблемы Бернсайда для групп нечетного показателя”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:1 (1990), 42–59; англ. пер.: E. I. Zel'manov, “Solution of the restricted Burnside problem for groups of odd exponent”, *Math. USSR-Izv.*, **36**:1 (1991), 41–60.

[60] Е. И. Зельманов, “Решение ослабленной проблемы Бернсайда для 2-групп”, *Матем. сб.*, **182**:4 (1991), 568–592; англ. пер.: E. I. Zel'manov, “A solution of the restricted Burnside problem for 2-groups”, *Math. USSR-Sb.*, **72**:2 (1992), 543–565.

[61] H. Zassenhaus, “Über Lie'sche Ringe mit Primzahlcharakteristik”, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **13**:1 (1939), 1–100.

[62] А. И. Кострикин, *Вокруг Бернсайда*, Наука, М., 1986, 232 с.; англ. пер.: A. I. Kostrikin, *Around Burnside*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **20**, Springer-Verlag, Berlin, 1990, xii+220 pp.

[63] С. И. Адян, А. А. Разборов, "Периодические группы и алгебры Ли", *УМН*, **42**:2(254) (1987), 3–68; англ. пер.: S. I. Adian, A. A. Razborov, "Periodic groups and Lie algebras", *Russian Math. Surveys*, **42**:2 (1987), 1–81.

[64] С. И. Адян, Н. Н. Репин, "Экспоненциальная нижняя оценка ступени нильпотентности энгелевых алгебр Ли", *Матем. заметки*, **39**:3 (1986), 444–452; англ. пер.: S. I. Adyan, N. N. Repin, "Exponential lower estimate of the degree of nilpotency of Engel Lie algebras", *Math. Notes*, **39**:3 (1986), 244–249.

[65] G. E. Wall, "On the Lie ring of a group of prime exponent", *Proceedings of the second international conference on the theory of groups* (Australian Nat. Univ., Canberra, 1973), Lecture Notes in Math., **372**, Springer, Berlin, 1974, 667–690.

[66] С. И. Адян, Н. Н. Репин, "Нижние оценки порядка максимальных периодических групп простого периода", *Матем. заметки*, **44**:2 (1988), 161–176; англ. пер.: S. I. Adyan, N. N. Repin, "Lower estimates of the order of maximal periodic groups of prime period", *Math. Notes*, **44**:2 (1988), 571–579.

[67] M. Vaughan-Lee, E. I. Zelmanov, "Upper bounds in the restricted Burnside problem", *J. Algebra*, **162**:1 (1993), 107–145.

[68] H. E. Rose, *Subrecursion*: *functions and hierarchies*, Oxford Logic Guides, **9**, The Clarendon Press, Oxford Univ. Press, New York, 1984, xiii+191 pp.

[69] W. Magnus, "Das Identitätsproblem für Gruppen mit einer definierenden Relation", *Math. Ann.*, **106**:1 (1932), 295–307.

[70] С. И. Адян, "Определяющие соотношения и алгоритмические проблемы для групп и полугрупп", *Тр. МИАН СССР*, **85** (1966), 3–123; англ. пер.: S. I. Adjan, "Defining relations and algorithmic problems for groups and semigroups", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **85** (1966), 1–152.

[71] С. И. Адян, Г. У. Оганесян, "К проблемам равенства и делимости в полугруппах с одним определяющим соотношением", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **42**:2 (1978), 219–225; англ. пер.: S. I. Adjan, G. U. Oganesyan, "On the word and divisibility problems in semigroups with a single defining relation", *Math. USSR-Izv.*, **12**:2 (1978), 207–212.

[72] С. И. Адян, Г. У. Оганесян, "О проблемах равенства и делимости для полугрупп с одним соотношением", *Матем. заметки*, **41**:3 (1987), 412–421; англ. пер.: S. I. Adyan, G. U. Oganesyan, "Problems of equality and divisibility in semigroups with a single defining relation", *Math. Notes*, **41**:3 (1987), 235–240.

[73] С. И. Адян, "О преобразованиях слов в полугруппе, заданной системой определяющих соотношений", *Алгебра и логика*, **15**:6 (1976), 611–621; англ. пер.: S. I. Adyan, "Transformations of words in a semigroup presented by a system of defining relations", *Algebra and Logic*, **15**:6 (1976), 379–386.

[74] Ю. В. Матиясевич, "Простые примеры неразрешимых ассоциативных исчислений", *Докл. АН СССР*, **173**:6 (1967), 1264–1266; англ. пер.: Yu. V. Matiyasevich, "Simple examples of undecidable associative calculi", *Soviet Math. Dokl.*, **8** (1967), 555–557.

[75] Terese, *Term rewriting systems*, Cambridge Tracts Theoret. Comput. Sci., **55**, eds. M. Bezem, J. W. Klop, R. de Vrijer, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003, xxii+884 pp.

[76] С. И. Адян, "О методе нахождения точных оценок длин выводов в системах Туэ", *Матем. заметки*, **92**:1 (2012), 3–18; англ. пер.: S. I. Adian, "On a method for proving exact bounds on derivational complexity in Thue systems", *Math. Notes*, **92**:1 (2012), 3–15.

[77] Y. Matiyasevich, G. Sénizergues, “Decision problems for semi-Thue systems with a few rules”, *Theoret. Comput. Sci.*, **330**:1 (2005), 145–169.

[78] D. Hofbauer, J. Waldmann, “Termination of $\{aa \to bc, bb \to ac, cc \to ab\}$”, *Inform. Process. Lett.*, **98**:4 (2006), 156–158.

[79] S. I. Adian, I. G. Lysionok, J. G. Mennicke, “Defining relations and the algebraic structure of the group SL_2 over integral Hamilton quaternions”, *Internat. J. Algebra Comput.*, **7**:1 (1997), 1–24.

[80] S. I. Adian, J. Mennicke, “On bounded generation of $\mathrm{SL}_n(\mathbf{Z})$”, *Internat. J. Algebra Comput.*, **2**:4 (1992), 357–365.

[81] С. И. Адян, “Новые оценки нечетных периодов бесконечных бернсайдовых групп”, *Избранные вопросы математики и механики*, Сборник статей. К 150-летию со дня рождения академика Владимира Андреевича Стеклова, Тр. МИАН, **289**, МАИК “Наука/Интерпериодика”, М., 2015, 41–82; англ. пер.: S. I. Adian, “New estimates of odd exponents of infinite Burnside groups”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **289** (2015), 33–71.

Поступила в редакцию
10.01.2021

Варужан Сергеевич Атабекян
(Varuzhan S. Atabekyan)
Ереванский государственный университет
E-mail: avarujan@ysu.am

Лев Дмитриевич Беклемишев
(Lev D. Beklemishev)
Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук;
Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”
E-mail: bekl@mi-ras.ru

Виктор Сергеевич Губа
(Victor S. Guba)
Вологодский государственный университет
E-mail: gubavs@vogu35.ru

Игорь Геронтьевич Лысёнок
(Igor G. Lysenok)
Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
E-mail: lysenok@mi-ras.ru

Александр Александрович Разборов
(Alexander A. Razborov)
University of Chicago, Chicago, USA;
Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
E-mail: razborov@mi-ras.ru

Алексей Львович Семенов
(Aleksei L. Semenov)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова;
Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)
E-mail: alsemno@ya.ru