1. Общие свойства схем Гильберта.

Пусть X — проективная схема над алгебраически замкнутым полем k характеристики 0, а $\mathcal{O}_X(1)$ — очень обильное линейное расслоение.

1.1. Мы интересуемся семействами подсхем в X. По естественным причинам мы ограничимся плоскими семействами.

Определение 1. *Плоское семейтсво подсхем в X над схемой S — это замкнутая подсхема $Z \subset X \times S$, такая что проекция $Z \to S$ — плоский морфизм.*

Пусть $P_s(m) := \chi(\mathcal{O}_{Z_s} \otimes \mathcal{O}_X(m))$ — *полином Гильберта* подсхемы $Z_s \subset X$ (χ обозначает характеристику Эйлера–Пуанкаре, то есть знакопеременную сумму рангов групп когомологий). Основным свойством плоских семейств является следующее свойство:

если Z — плоская проективная схема над связной схемой S,
то полином Гильберта $P_s(m)$ не зависит от точки $s \in S$.

Если схема S — целая нетерова схема, то верно и обратное — постоянность полинома Гильберта является достаточным свойством плоскости семейства.

1.2. Ввиду вышесказанного, при изучении плоских семейств подсхем в X достаточно ограничиться семействами с фиксированным полиномом Гильберта. Схема Гильберта Hilb_X^P — это, грубо говоря, многообразие модулей подсхем в X с полиномом Гильберта P.

Точное определение удобно давать на языке функторов. Рассмотрим контравариантный функтор Hilb_X^P из категории схем в категорию множеств, определенный на объектах как

$$\mathit{Hilb}_X^P(S) = \left\{ Z \subset X \times S \;\middle|\; \begin{array}{l} Z \text{ — замкнутая подсхема,} \\ Z \text{ — плоская над } S \text{ и } P_{Z/S} = P \end{array} \right\}$$

а на морфизмах $f : S' \to S$ как

$$\mathit{Hilb}_X^P(f) := f^* : \mathit{Hilb}_X^P(S) \to \mathit{Hilb}_X^P(S') \quad Z \subset X \times S \mapsto Z \times_S S' \subset X \times S'.$$

Теорема 1. *Функтор Hilb_X^P представим проективной схемой* Hilb_X^P.

Представимость, по определению означает наличие функториального изоморфизма

$$\mathit{Hilb}_X^P(S) = \mathrm{Map}(S, \mathrm{Hilb}_X^P), \tag{1}$$

где $\mathrm{Map}(\cdot,\cdot)$ обозначает множество морфизмов в категории схем.

Замечание 1. Пусть $Z \subset X \times \mathrm{Hilb}_X^P$ — семейство, соответствующее тождественному морфизму $\mathbf{id} \in \mathrm{Map}(\mathrm{Hilb}_X^P, \mathrm{Hilb}_X^P)$. Функториальность равенства (1) означает, что произвольному отображению $f : S \to \mathrm{Hilb}_X^P$ соответствует семейство $f^*Z = Z \times_{\mathrm{Hilb}_X^P} S \subset X \times S$, то есть Z — универсальное семейство подсхем.

1.3. Вместо теоремы 1 мы докажем несколько более общую теорему о представимости функтора $Quot$.

Пусть X — проективное многообразие, а $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на X. Обозначим через $\mathcal{F}_S$ пучок $\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{O}_S$ на произведении $X \times S$. Положим

$$Quot^P_{X,\mathcal{F}}(S) = \left\{ \mathcal{G} \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathcal{G} \text{ — когерентный пучок на } X \times S, \\ \mathcal{G} \text{ — факторпучок пучка } \mathcal{F}_S, \\ \mathcal{G} \text{ — плоский над } S \text{ и } P_{\mathcal{G}} = P \end{array} \right\}$$

Теорема 2. *Функтор $Quot^P_{X,\mathcal{F}}$ представим проективной схемой $\mathrm{Quot}^P_{X,\mathcal{F}}$.*

Пример 1. Пусть $X = \{\mathrm{pt}\}$ — точка, $\mathcal{F} = V$ — конечномерное векторное пространство и $P(m) \equiv r$ — постоянный многочлен. Обозначим функтор $Quot^r_{\{\mathrm{pt}\},V}$ через Gr^r_V. Легко видеть, что

$$Gr^r_V(S) = \{\mathcal{G} \mid \mathcal{G} \text{ — локально свободный факторпучок ранга } r \text{ пучка } V \otimes \mathcal{O}_S\}$$

и функтор Gr^r_V представляется многообразием Грассманна Gr^r_V r-мерных факторпространств пространства V.

Для доказательства теоремы 2 нам понадобятся некоторые технические результаты.

1.4. **Открытые и замкнутые подфункторы.** Пусть G — контравариантный функтор из категории схем в категорию множеств, а F — его подфунктор, то есть для каждой схемы S имеем $F(S) \subset G(S)$.

Определение 2. *Подфунктор F называется открытым (замкнутым), если $\forall S$, $\forall x \in G(S)$ существует открытая (замкнутая) подсхема $T_x \subset S$, такая что $\forall f : S' \to S$ условие $f^*x \in F(S')$ равносильно тому, что f пропускается через подсхему T_x.*

Грубо говоря, подфунктор открыт (замкнут), если он задается открытыми (замкнутыми) условиями. Вообще, как видно из следующего предложения, в случае если функтор G представим схемой X, определение 2 является преформулировкой в категорных терминах того, что функтор F представим открытой (замкнутой) подсхемой схемы X.

Предложение 1. *Пусть функтор G представим схемой X. Следующие условия эквивалентны:*

(i) функтор F представим открытой (замкнутой) подсхемой $Y \subset X$;

(ii) F — открытый (замкнутый) подфунктор.

Доказательство. (i)⇒(ii). Пусть $x \in G(S)$ представлен морфизмом $\varphi : S \to X$. Возьмем $T_x = S \times_X Y \subset S$. Для всякого морфизма $f : S' \to S$ элемент $f^*x \in G(S')$ представлен морфизмом $\varphi \cdot f$. Поэтому, $f^*x \in F(S')$ тогда и только тогда, когда $\varphi \cdot f$ пропускается через Y, то есть f пропускается через T_x.

(ii)⇒(i). Возьмем $S = X$ и элемент $x_0 \in G(X)$, соответствующий тождественному морфизму $\mathbf{id}_X$. Докажем, что подсхема $Y = T_{x_0} \subset X$ представляет функтор F. Рассмотрим произвольную схему S', элемент $x \in F(S') \subset G(S')$ и морфизм $f : S' \to X$, представляющий x. Тогда $x = f^*x_0$ и, значит, f пропускается через Y. □

1.5. **Когеррентные пучки на проективных многообразиях.** Пусть X — проективное многообразие и $\mathcal{O}_X(1)$ — очень обильное линейное расслоение на X. Тогда $X = \operatorname{Proj} A$, где $A = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots$ — градуированнное кольцо, с $A_0 = k$, порожденное множеством A_1 как k-алгебра.

Каждому конечно порожденному градуированному A-модулю M можно сопоставить когерентный пучок $\widetilde{M}$ (слой которого над точкой, соответствующей простому однородному идеалу $\mathfrak{p} \subset A$ равен множеству $M_{(\mathfrak{p})} \subset M_{\mathfrak{p}}$ однородных элементов степени 0 в локализации $M_{\mathfrak{p}}$ модуля M в простом идеале $\mathfrak{p}$). Кроме того, каждому когерентному пучку $\mathcal{F}$ на X сопоставляется градуированный A-модуль $\Gamma_*(\mathcal{F}) = \oplus_{n=0}^{\infty}\Gamma(X, \mathcal{F}(n)$ (структура A-модуля задается каноническими отображениями $A_m \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X(m))$ и изоморфизмами $\mathcal{O}_X(m) \otimes \mathcal{F}(n) = \mathcal{F}(m+n)$).

Оказывается, функторы $\widetilde{\ }$ и Γ_* индуцируют эквивалентность категории когерентных пучков на X и факторкатегории конечнопорожденных A-модулей по подкатегории конечномерных модулей.

В частности, всегда $\widetilde{\Gamma_*(\mathcal{F})} = \mathcal{F}$, а каноническое отображение $M \to \Gamma_*(\widetilde{M})$ имеет конечномерные ядро и коядро. В частности, если $\mathcal{F} = \widetilde{M}$, то при больших n отображение $M_n \to \Gamma(X, \mathcal{F}(n))$ является изоморфизмом. Кроме того, при больших n имеем $H^{>0}(X, \mathcal{F}(n)) = 0$, поэтому при больших n

$$\chi(\mathcal{F}(n)) = \dim \Gamma(X, \mathcal{F}(n)) = \dim M_n.$$

С другой стороны, при больших ν все образующие модуля M лежат в компонентах M_k с $k < \nu$, поэтому $A_k M_\nu = M_{\nu+k}$, следовательно $A_k H^0(X, \mathcal{F}(\nu)) = H^0(X, \mathcal{F}(\nu+k))$.

1.6. **Доказательство теоремы о представимости.** Сперва приведем план доказательства. Пусть $X = \operatorname{Proj} A$ и $M = \Gamma_*(\mathcal{F})$. Обозначим для краткости функтор $Quot^P_{X,\mathcal{F}}$ через $\mathcal{Q}$.

Пусть $\pi : X \times S \to S$ и $p : X \times S \to S$ — проекции. Обозначим $\mathcal{F}^S = p^*\mathcal{F} \otimes \pi^*\mathcal{O}_S$, $M_n^S = M_n \otimes \mathcal{O}_{X\times S}$. Рассмотрим для каждого $\nu \geq 0$ следующие функторы:

$$
\begin{array}{l}
Gr^{P(\nu)}_{M_\nu}(S) = \left\{ R_\nu \subset M_\nu^S \;\middle|\; {M_\nu}^S/R_\nu \text{ — л.св. ранга } P(\nu) \right\} \\
\quad\bigcup \\
\mathcal{U}(S) = \left\{ R_\nu \subset {M_\nu}^S \;\middle|\; \ldots + \forall k \geq 0 \;\; \mathbf{rk}\left({M_{\nu+k}}^S / A_k R_\nu \right) \leq P(\nu+k) \right\} \\
\quad\bigcup \\
\mathcal{Z}(S) = \left\{ R_\nu \subset {M_\nu}^S \;\middle|\; \ldots + \forall k \geq 0 \; {M_{\nu+k}}^S/A_k R_\nu \text{ — л.св. ранга } P(\nu+k) \right\} \\
\quad\bigcup \\
\mathcal{Y}(S) = \left\{ R_\nu \subset {M_\nu}^S \;\middle|\; \ldots + \begin{array}{l} \text{если } \mathcal{H} = (\widetilde{\oplus A_k R_\nu}),\ \mathcal{G} = \mathcal{F}^S/\mathcal{H}, \text{ то} \\ \text{при } n \geq \nu \; R^{>0}\pi_*\mathcal{H}(n) = R^{>0}\pi_*\mathcal{G}(n) = 0 \end{array} \right\} \\
\\
\mathcal{Q}_\nu(S) = \left\{ \mathcal{H} \subset \mathcal{F}^S \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{пучок } \mathcal{G} = \mathcal{F}^S/\mathcal{H} \text{ — плоский над } S,\ P_{\mathcal{G}} = P, \\ \text{при } n \geq \nu \; R^{>0}\pi_*\mathcal{H}(n) = R^{>0}\pi_*\mathcal{G}(n) = 0 \\ \text{и при } k \geq 0 \; \pi_*\mathcal{H}(\nu+k) = A_k \pi_*\mathcal{H}(\nu) \end{array} \right\} \\
\quad\bigcap \\
\mathcal{Q}(S) = \left\{ \mathcal{H} \subset \mathcal{F}^S \;\middle|\; \text{пучок } \mathcal{G} = \mathcal{F}^S/\mathcal{H} \text{ — плоский над } S \text{ и } P_{\mathcal{G}} = P \right\}
\end{array}
$$

Предложение 2. *Подфункторы $\mathcal{Q}_\nu$ составляют открытое покрытие функтора $\mathcal{Q}$, то есть для всех ν подфунктор $\mathcal{Q}_\nu \subset \mathcal{Q}$ открыт и $\mathcal{Q} = \bigcup \mathcal{Q}_\nu$.*

Предложение 3. *Подфунктор $\mathcal{U} \subset Gr_{M_\nu}^{P(\nu)}$ открыт.*

Предложение 4. *Подфунктор $\mathcal{Z} \subset \mathcal{U}$ замкнут.*

Предложение 5. *Подфунктор $\mathcal{Y} \subset \mathcal{Z}$ открыт.*

Предложение 6. *Функторы $\mathcal{Q}_\nu$ и $\mathcal{Y}$ изоморфны.*

Из предложений 2–6 уже следует представимость функтора $\mathcal{Q}$. Действительно, согласно примеру 1 функтор $Gr_{M_\nu}^{P(\nu)}$ представим проективной схемой. Поэтому, в силу предложений 1 и 3–5 следует, что функтор $\mathcal{Y}$, а следовательно, по предложению 6 и функтор $\mathcal{Q}_\nu$, представим некоторой квазипроективной схемой Q_ν. Всилу предложений 1 и 2 схемы Q_ν образуют возрастающую последовательность открытых подсхем, поэтому схема $Q = \bigcup Q_\nu$ представляет функтор $\mathcal{Q}$.

Проективность схемы Q требует отдельного доказательства. Априори даже неясно, что схема Q конечного типа. Однако, это следует из следующего предложения.

Предложение 7. *Схема Q квазикомпактна.*

Из квазикомпактности схемы Q следует, что $Q = Q_\nu$ для некоторого ν (так как схемы Q_ν составляют открытое покрытие схемы Q), поэтому Q квазипроективна. Для квазипроективных схем проективность равносильна собственности, поэтому окончательно теорема следует из следующего предложения.

Предложение 8. *Схема Q — собственна.*

Теперь приступим к доказательствам.

1.6.1. *Д-во предложения 2.* Пусть S — некоторая схема и $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}^S$ — подпучок, такой что $\mathcal{G} = \mathcal{F}^S/\mathcal{H}$ — плоский и $P_\mathcal{G} = P$. Необходимо доказать, что подмножества

$$S_\nu = \left\{ s \in S \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{при } k \geq 0 \; H^{>0}(X_s, \mathcal{H}_s(\nu+k)) = H^{>0}(X_s, \mathcal{G}_s(\nu+k)) = 0 \\ \text{и } H^0(X_s, \mathcal{H}_s(\nu+k)) = A_k H^0(X_s, \mathcal{H}_s(\nu)) \end{array} \right\}$$

открыты и составляют покрытие схемы S. Здесь $X_s = X \times Ss$ — слой проекции $\pi : X \times S \to S$ над точкой $s \in S$ и $\mathcal{H}_s$, $\mathcal{G}_s$ — ограничения пучков $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}$ на слой X_s.

Рассмотрим подмножества

$$S_\nu^N = \left\{ s \in S \;\middle|\; \begin{array}{l} H^{>0}(X_s, \mathcal{H}_s(\nu+k)) = H^{>0}(X_s, \mathcal{G}_s(\nu+k)) = 0 \text{ при } 0 \leq k \leq N \\ \text{и } H^0(X_s, \mathcal{H}_s(\nu+k)) = A_k H^0(X_s, \mathcal{H}_s(\nu)) \text{ при } 0 \leq k \leq N \end{array} \right\}$$

Очевидно

$$S_\nu^N = S - \bigcup_{0 \leq k \leq N} \mathbf{supp}\, R^{>0}\pi_*\mathcal{H}(\nu+k) - \bigcup_{0 \leq k \leq N} \mathbf{supp}\, R^{>0}\pi_*\mathcal{G}(\nu+k) - \bigcup_{0 \leq k \leq N} \mathbf{supp}\, \mathrm{Coker}\,\varphi_k,$$

где $\varphi_k : A_k \pi_*\mathcal{H}(\nu) \to \pi_*\mathcal{H}(\nu+k)$ — каноническое отображение. Значит S_ν^N — открытое подмножество. Докажем теперь, что убывающая последовательность открытых множеств $\{S_\nu^N\}$ стабилизируется. Для этого заметим, что если $V = H^0(X, \mathcal{O}_X(1))^*$ и $M = \dim V$, то комплекс Кошуля в проективном пространстве $\mathbb{P}(V)$ при ограничении на X дает точную последовательность

$$0 \to \mathcal{O}_X(-M) \to V \otimes \mathcal{O}_X(1-M) \to \cdots \to V^* \otimes \mathcal{O}_X(-1) \to \mathcal{O}_X \to 0.$$

Домножая последовательность на $\mathcal{H}_s(\nu + N + 1)$ и переходя к когомологиям получаем, что если $H^0(X_s, \mathcal{H}_s(\nu + k)) = 0$ при $k = N + 1 - M, \ldots, N$, то это верно и при $k = N + 1$. То же самое справедливо и для пучка $\mathcal{G}$. Кроме того, коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V^* \otimes A_N \otimes H^0(X_s, \mathcal{H}_s(\nu) & \xrightarrow{\varphi_N} & V^* \otimes H^0(X_s, \mathcal{H}_s(\nu + N)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{N+1} \otimes H^0(X_s, \mathcal{H}_s(\nu)) & \xrightarrow{\varphi_{N+1}} & H^0(X_s, \mathcal{H}_s(\nu + N + 1)) \end{array}$$

показывает, что если отображение $V^* \otimes H^0(X_s, \mathcal{H}_s(\nu + N)) \to H^0(X_s, \mathcal{H}_s(\nu + N + 1))$ сюрьективно (а это выполнено если $H^{>0}(X_s, \mathcal{H}_s(\nu + k)) = 0$ при $k = N + 1 - M, \ldots, N$), то сюрьективность отображения φ_N влечет за собой сюрьективность отображения φ_{N+1}. Отсюда следует, что при $N > M$ последовательность S_ν^N стабилизируется, и, значит, $S_\nu = \bigcap_N S_\nu^N = S_\nu^M$ — открыто.

Осталось показать, что $\bigcup_\nu S_\nu = S$. Но это очевидно следует из свойств когерентных пучков на проективной схеме (см. 1.5).

1.6.2. *Д-во предложения 3.* Пусть S — схема и $R_\nu \subset M_\nu^S$ — подпучок, такой что M_ν^S / R_ν — локально свободный ранга $P(\nu)$. Рассмотрим градуированный пучок модулей $\mathcal{N} = \oplus(M_{\nu+k}^S / A_k R_\nu)$ над градуированным пучком алгебр $A^S = \oplus A_k^S$. Надо доказать, что подмножество

$$U = \{s \in S \mid \text{при всех } k \geq 0 \ \mathbf{rk}\, \mathcal{N}_{\nu+k} \leq P(\nu + k)\}$$

открыто. Рассмотрим систему множеств

$$U_N = \{s \in S \mid \text{при всех } 0 \leq k \leq N \ \mathbf{rk}\, \mathcal{N}_{\nu+k} \leq P(\nu + k)\}$$

Множества U_N очевидно образуют убывающую последовательность открытых подмножеств, причем $U = \bigcap U_N$. Поэтому достаточно доказать, что последовательность U_N стабилизируется.

Для этого разобьем схему S в объединение конечного числа локально замкнутых подмножеств S_i так что модуль $\mathcal{N}$ является плоским над каждым из S_i. Поскольку для стабилизации последовательности U_N необходима и достаточна стабилизация последовательностей $U_N \cap S_i$, то все сводится к случаю, когда модуль $\mathcal{N}$ плоский.

Если модуль $\mathcal{N}$ плоский, то $\mathbf{rk}\, \mathcal{N}_n = P'(n)$, причем $P'(n)$ — некоторый полином. Имеем две возможности:

либо при $n \gg 0$ $P'(n) > P(n)$, тогда при $n \gg 0$ имеем $U_n = \emptyset$ и последовательность U_n стабилизируется;

либо при $n \gg 0$ $P'(n) \leq P(n)$, тогда при $n \gg 0$ имеем $U_n = U_{n-1}$, то есть и в этом случае последовательность U_n стабилизируется.

1.6.3. *Д-во предложения 4.* В условиях предыдущего раздела надо показать, что подмножество

$$Z = \{s \in S \mid \text{при всех } k \geq 0 \text{ пучок } \mathcal{N}_{\nu+k} \text{ л.св. ранга } P(\nu + k)\}$$

замкнуто. Рассмотрим последовательность множеств

$$Z_k = \{s \in S \mid \mathcal{N}_{\nu+k} \text{ л.св. ранга } P(\nu+k)\}$$

Так как $Z = \bigcap Z_k$, то достаточно проверить, что каждое из множеств Z_k замкнуто. Действительно, по условию $\mathbf{rk}\,\mathcal{N}_{\nu+k} \leq P(\nu+k)$, поэтому локально пучок $\mathcal{N}_{\nu+k}$ можно представить как коядро морфизма $\mathcal{O}^q \to \mathcal{O}^{P(\nu+k)}$, определяемого некоторой матрицей $q \times P(\nu+k)$ с коэффициентами f_{ij} в $\mathcal{O}$. Следовательно Z_k — замкнутая подсхема, определяемая пучком идеалов $J \subset \mathcal{O}$, порожденным элементами f_{ij}.

1.6.4. *Д-во предложения 5.* Доказывается так же, как и предложение 2.

1.6.5. *Д-во предложения 6.* Рассмотрим преобразования функторов

$$\begin{array}{ll} i : \mathcal{Q}_\nu \to \mathcal{Y}, & \mathcal{G} = \mathcal{F}^S/\mathcal{H} \in \mathcal{Q}_\nu(S) \mapsto \pi_*\mathcal{H}(\nu) \quad \text{и} \\ j : \mathcal{Y} \to \mathcal{Q}_\nu, & R_\nu \in \mathcal{Y}(S) \mapsto \mathcal{F}^S/(\widetilde{\oplus A_k R_\nu}) \end{array}$$

Если $\mathcal{G} \in \mathcal{Q}_\nu(S)$, то модуль $\oplus A_k \pi_*\mathcal{H}(\nu) = \oplus \pi_*\mathcal{H}(\nu+k)$ отличается на конечномерный модуль от модуля $\oplus \pi_*\mathcal{H}(n)$, следовательно $(\widetilde{\oplus A_k \pi_*\mathcal{H}(\nu)}) = \mathcal{H}$ и $j(i(\mathcal{G})) = \mathcal{G}$.

Пусть теперь, $R_\nu \in \mathcal{Y}(S)$, $\mathcal{H} = (\widetilde{\oplus A_k R_\nu})$ и $\mathcal{G} = \mathcal{F}^S/\mathcal{H}$. Рассмотрим естественное отображение $\varphi : R_\nu \to \pi_*\mathcal{H}(\nu)$ и индуцированное им отображение факторпучков $\psi : M_\nu^S/R_\nu \to \pi_*\mathcal{G}(\nu)$. Отображение ψ очевидно сюрьективно, и поскольку пучки M_ν^S/R_ν и $\pi_*\mathcal{G}(\nu)$ — локально свободные пучки одинакового ранга, то ψ — изоморфизм. Следовательно и φ — изоморфизм, то есть $i(j(R_\nu)) = R_\nu$.

Таким образом, мы видим, что преобразования функторов i и j — взаимно обратные. Осталось проверить, что $i(\mathcal{Q}_\nu) \subset \mathcal{Y}$ и $j(\mathcal{Y}) \subset \mathcal{Q}_\nu$. В первом случае, достаточно убедиться, что $\forall k \geq 0$ пучок $M_{\nu+k}^S/A_k\pi_*\mathcal{H}(\nu) = \pi_*\mathcal{F}(\nu+k)^S/\pi_*\mathcal{H}(\nu+k) = \pi_*\mathcal{G}(\nu+k)$ — локально свободный пучок ранга $P(\nu+k)$. Но это очевидно следует из того, что $R^{>0}\pi_*\mathcal{G}(\nu+k) = 0$ и $P_\mathcal{G} = P$.

Во втором случае, достаточно убедиться, что пучок $\mathcal{G}$ — плоский. Для этого заметим, что при $k \gg 0$ имеем $\pi_*\mathcal{H}(\nu+k) = A_k R_\nu$ (по теореме Серра), следовательно, ввиду $R^1\pi_*\mathcal{H}(\nu+k)$ получаем $\pi_*\mathcal{G}(\nu+k) = M_{\nu+k}^S/A_k R_\nu$ — локально свободный пучок ранга $P(\nu+k)$, следовательно $P_\mathcal{G} = P$, то есть $\mathcal{G}$ — плоский над S. Теперь то, что отображение $\pi_*\mathcal{H}(\nu+k) \to A_k\pi_*\mathcal{H}(\nu)$ — изоморфизм, доказывается так же как и то что отображение φ — изоморфизм.

1.6.6. *Д-во предложения 8.* Для доказательства собственности схемы Q мы применим валюативный критерий. Пусть R — кольцо дискретного нормирования с полем частных K. Пусть $\eta = \operatorname{Spec} K \in S = \operatorname{Spec} R$ — общая точка. Необходимо доказать, что всякий факторпучок $\mathcal{G}_\eta = \mathcal{F}_\eta/\mathcal{H}_\eta$ можно продолжить до факторпучка $\mathcal{G} = \mathcal{F}^S/\mathcal{H}$, плоского над S.

Во-первых, можно считать, что пучок $\mathcal{H}_\eta$ порождается глобальными сечениями (в противном случае, подкрутим пучки $\mathcal{H}_\eta$, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}_\eta$ на достаточно обильное линейное расслоение на X). Тогда пучок $\mathcal{G}_\eta$ равен коядру морфизма

$$V \otimes \mathcal{O}_{X\times\eta} \to \mathcal{F}_\eta,$$

задаваемого подпространством $V \subset H^0(X \times \eta, \mathcal{F}_\eta) = H^0(X, \mathcal{F}) \otimes K$, определенным над полем K. Выберем теперь в k-линейном пространстве $H^0(X, \mathcal{F})$

k-подпространство V_0, так чтобы $V = V_0 \otimes K$. Пусть $V_R = V \otimes R \subset H^0(X, \mathcal{F}) \otimes R = H^0(X \times S, \mathcal{F}^S)$. Определим пучок $\mathcal{G}$ как коядро морфизма

$$V_R \otimes \mathcal{O}_{X \times S} \to \mathcal{F}^S.$$

Он очевидно плоский над S.

1.6.7. Таким образом, осталось доказать квазикомпактность схемы Q. Этим мы займемся в следующей лекции.

2. Ограниченные семейства пучков.

Для доказательства квазикомпактности схемы Q мы воспользуемся свойствами ограниченных семейств пучков.

Определение 3. *Пусть X — проективная схема над схемой S, а $\{\mathcal{F}^\alpha\}$ — множество классов изоморфизма пучков на слоях схемы X над S. Множество $\{\mathcal{F}^\alpha\}$ называется* ограниченным семейством*, если существует S-схема конечного типа T и пучок $\mathcal{F}$ на $X \times_S T$, такой что $\{\mathcal{F}^\alpha\} \subset \{\mathcal{F}_{|X_t}\}_{t \in T}$, где X_t — слой схемы $X \times_S T$ над точкой $t \in T$, который мы отождествляем со слоем схемы X над некоторой точкой $s \in S$.*

2.1. Следующая теорема дает критерий ограниченности семейства.

Теорема 3. *Для того, чтобы множество $\{\mathcal{F}^\alpha\}$ было ограниченным семейством необходимо и достаточно выполнения следующих условий:*

(1) *существует когерентный пучок $\mathcal{L}$ на X, такой что все $\mathcal{F}^\alpha$ являются факторпучками пучка $\mathcal{L}$;*

(2) *множество полиномов Гильберта $\{P_{\mathcal{F}^\alpha}\}$ конечно.*

Сначала докажем с помощью теоремы 3 квазикомпактность схемы Q, а затем вернемся к доказательству самой теоремы.

2.1.1. *Д-во предложения 7.* Возьмем $S = \operatorname{Spec} k$, $X = X$ и $\{\mathcal{F}^\alpha\} = \{\mathcal{G} \mid \mathcal{G}$ — факторпучок пучка $\mathcal{F}$ с полиномом Гильберта $P_\mathcal{G} = P\}$. Условия (1) и (2) теоремы 3 очевидно выполняются, поэтому семейство $\{\mathcal{F}^\alpha\}$ ограничено. Следовательно, существует схема конечного типа T и пучок $\mathcal{G}$ на схеме $X \times T$, такой что $\{\mathcal{F}^\alpha\} \subset \{\mathcal{G}_{|X_t}\}$. Разбив схему T на конечное число кусков $T = \bigsqcup T_i$, мы можем считать, что $\mathcal{G}$ плоский над каждым из T_i. Пусть T' — объединение тех T_i, над которыми пучок $\mathcal{G}$ имеет полином Гильберта равный P и $\mathcal{G}'$ — ограничение пучка $\mathcal{G}$ на $X \times T'$. Очевидно $\mathcal{G} \in \mathcal{Q}(T')$, поэтому существует отображение $T' \to Q$, которое очевидно сюрьективно. Однако, T' — схема конечного типа над полем, следовательно T' — квазикомпактна, поэтому Q — тоже квазикомпактна.

2.2. Займемся теперь доказательством теоремы 3. Докажем сначала необходимость условий (1) и (2).

Пусть T — схема над S и $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на $X \times_S T$. Поскольку схема $X \times_S T$ проективна над T, то для $n \gg 0$ пучок $\mathcal{F}(n)$ порождается глобальными сечениями, то есть является факторпучком пучка $\mathcal{O}^N_{X \times_S T}$. Значит $\mathcal{F}$ является факторпучком пучка $\mathcal{O}(-n)^N_{X \times_S T}$ и условие (1) выполнено с пучком $\mathcal{L} = \mathcal{O}(-n)^N_X$. Далее, разобъем схему T на конечное число кусков $T = \bigsqcup T_i$, так чтобы ограничения $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_{|X \times_S T_i}$ были плоским над T_i и пусть $P_i = P_{\mathcal{F}_i}$. Тогда $\{P_{\mathcal{F}^\alpha}\} \subset \{P_{\mathcal{F}_{|X_t}}\} = \{P_i\}$ — конечное множество.

2.3. Доказательство достаточности условий (1) и (2) намного сложнее. Пусть $\{\mathcal{F}^\alpha\}$ — множество пучков, удовлетворяющих этим условиям. Пусть $r = \max\dim \mathbf{supp}\,\mathcal{F}^\alpha$. Будем проводить доказательство индукией по r. При $r < 0$ все $\mathcal{F}^\alpha = 0$ и доказывать нечего. Пусть теперь $r \geq 0$ и допустим, что для всех $r' < r$ утверждение доказано. Пусть $\mathcal{N}^\alpha \subset \mathcal{F}^\alpha$ — подпучок, порожденный сечениями с размерностью носителя строго меньше r и пусть $\mathcal{F}^\alpha_{(r)} = \mathcal{F}^\alpha/\mathcal{N}^\alpha$. Докажем сначала что $\{\mathcal{F}^\alpha_{(r)}\}$ ограничено.

Пусть $Z_\alpha = \mathbf{supp}\,\mathcal{F}^\alpha_{(r)}$ — r-мерное подмногообразие в X. Тогда $\deg Z_\alpha \leq a_r(\mathcal{F}^\alpha_{(r)}) = a_r(\mathcal{F}^\alpha)$ — ограничено по условию (2). Здесь $a_k(\mathcal{G})$ по определению коэффициент при $n^k/k!$ в полиноме Гильберта $P_\mathcal{G}(n) = \sum a_k(\mathcal{G})n^k/k!$.

Предложение 9. *Множество структурных пучков r-мерных подмногообразий ограниченной степени в проективной схеме X является ограниченным семейством.*

Доказательство леммы будет дано ниже.

Согласно лемме существует S-схема конечного типа S' и замкнутая подсхема $Z \subset X \times_S S'$, такая что множество слоев Z над S' содержит множество всех носителей пучков $\mathcal{F}^\alpha_{(r)}$. Пусть J — пучок идеалов, определеяющий подсхему $Z \subset X \times_S S'$. Рассмотрим подсхему $Z_m \subset X \times_S S'$, определяемую пучком идеалов J^m, где $m = \max a_r(\mathcal{F}^\alpha_{(r)}) = \max a_r(\mathcal{F}^\alpha)$. Тогда каждый пучок $\mathcal{F}^\alpha_{(r)}$ является пучком модулей на каком-то из слоев схемы Z_m над S'

Таким образом, заменяя X на Z_m, а S на S' мы можем считать, что все пучки в семействе $\mathcal{F}^\alpha_{(r)}$ являются пучками без кручения (кручение имело бы носитель на подмногообразии меньшей размерности, а все такие сечения мы отфакторизовали, когда перешли от пучков $\mathcal{F}^\alpha$ к пучкам $\mathcal{F}^\alpha_{(r)}$). Далее, все пучки $\mathcal{F}^\alpha$ были факторпучками некоторого пучка $\mathcal{L}$ на X. Следовательно, пучки $\mathcal{F}^\alpha_{(r)}$, являясь факторпучками пучков $\mathcal{F}^\alpha$, также являются факторпучками пучка $\mathcal{L}$. Кроме того, поскольку $P_{\mathcal{F}^\alpha} = P_{\mathcal{F}^\alpha_{(r)}} + P_{\mathcal{N}^\alpha}$, то $a_{r-1}(\mathcal{F}^\alpha_{(r)}) = a_{r-1}(\mathcal{F}^\alpha) - a_{r-1}(\mathcal{N}^\alpha)$. Так как пучки $\mathcal{N}^\alpha$ имеют не более чем $(r-1)$-мерный носитель, то $a_{r-1}(\mathcal{N}^\alpha) \geq 0$, сдедовательно $a_{r-1}(\mathcal{F}^\alpha_{(r)}) \leq a_{r-1}\mathcal{F}^\alpha$, значит коэффициенты $a_{r-1}(\mathcal{F}^\alpha_{(r)})$ ограничены сверху.

Предложение 10. *Пусть X — схема над S с не более чем r-мерными слоями, $\{\mathcal{F}^\alpha_{(r)}\}$ — семейство пучков без кручения на слоя X над S. Если все $\mathcal{F}^\alpha_{(r)}$ являются факторпучками фиксированного пучка $\mathcal{L}$, а коэффициенты $a_{r-1}(\mathcal{F}^\alpha_{(r)})$ ограничены сверху, то $\{\mathcal{F}^\alpha_{(r)}\}$ — ограниченное семейство.*

Лемма 10 показывает, что семейство $\{\mathcal{F}^\alpha_{(r)}\}$ ограничено. Значит множество полиномов Гильберта $P_{\mathcal{F}^\alpha_{(r)}}$ конечно, следовательно и множество полиномов Гильберта $P_{\mathcal{N}^\alpha}$ конечно.

Выберем для каждого α сюрьекцию $\mathcal{L} \to \mathcal{F}^\alpha$ и пусть $\mathcal{K}^\alpha$ — ядро отображения $\mathcal{L} \to \mathcal{F}^\alpha \to \mathcal{F}^\alpha_{(r)}$. Тогда индуцированные отображения $\mathcal{K}^\alpha \to \mathcal{N}^\alpha$ сюрьективны.

Лемма 1. *Если $\{\mathcal{F}^\alpha\}$ и $\{\mathcal{G}^\beta\}$ — ограниченные семейства пучков, то следующие множества образуют ограниченные семейства:*

(1) *множества $\{\mathrm{Ker}\,\mathcal{F}^\alpha \to \mathcal{G}^\beta\}$ ($\{\mathrm{Coker}\,\mathcal{F}^\alpha \to \mathcal{G}^\beta\}$) ядер (коядер) всевозможных отображений из пучков первого семейства в пучки второго семейства;*

(2) *множество* $\{0 \to \mathcal{F}^\alpha \to \bullet \to \mathcal{G}^\beta \to 0\}$ *всевозможных расширений пучков из второго семейства пучками из первого семейства.*

(3) *Пусть* $\{\mathcal{F}^\alpha\}$ *— множество пучков на слоях схемы* X *над* S *и пусть* $f : X \to Y$ *— конечный морфизм схем над* S. *Множество* $\{\mathcal{F}^\alpha\}$ *является ограниченным семейством тогда и только тогда, когда множество* $\{f_*\mathcal{F}^\alpha\}$ *является ограниченным семейством.*

Лемма показывает, что множество пучков $\mathcal{K}^\alpha$ — ограничено, поэтому все они являются факторпучками некоторого пучка $\mathcal{L}'$, следовательно и пучки $\mathcal{N}^\alpha$ являются факторпучками пучка $\mathcal{L}'$. Таким образом, для множества пучков $\{\mathcal{N}^\alpha\}$ выполнены условия (1) и (2) теоремы 3, значит по предположению индукции множество $\{\mathcal{N}^\alpha\}$ является ограниченным семейством. Применяя часть (2) леммы 1 получаем, что и семейство $\{\mathcal{F}^\alpha\}$ ограничено.

2.4. Нам осталось доказать предложения 9, 10 и лемму 1.

2.4.1. *Д-во предложения 9.* Можно считать, что $X = P = \mathbb{P}^n_S$ — проективное пространство над схемой S. Достаточно проверить, что множество всех структурных пучков r-мерных подмногообразий степени d в P ограничено. Пусть $Z \subset P$ — такое подмногообразие. Пусть $\check{P}$ — двойственное проективное пространство (пространство гиперплоскостей в P). Рассмотрим $(r+1)$-кратное произведение $\check{P}^{(r+1)}$ пространств $\check{P}$ и подмногообразие в нем $D_Z \subset \check{P}^{(r+1)}$, определяемое следующим образом:

$$D_Z = \{(H_0, H_1, \ldots, H_r) \mid H_0 \cap H_1 \cap \cdots \cap H_r \cap Z \neq \emptyset\}$$

Пусть $p : \check{P}^{(r+1)} \to \check{P}^r$ — проекция на последние r сомножителей. Возьмем общие r гиперплоскостей $H_1, \ldots, H_r$ (тогда $H_1 \cap \cdots \cap H_r \cap Z = \{z_1, \ldots, z_d\}$ — набор из d точек). В этом случае пересечение $p^{-1}(H_1, \ldots, H_r) \cap D_Z$ изоморфно множеству всех гиперплоскостей $H_0 \in \check{P}$, проходящих через одну из точек $z_1, \ldots, z_d$. Множество гиперплоскостей, проходящих через точку $z \in P$ — это гиперплоскость $h_z \subset \check{P}$, поэтому $p^{-1}(H_1, \ldots, H_r) \cap D_Z = h_{z_0} \cup \cdots \cup h_{z_d}$ — гиперповерхность степени d в $\check{P}$. Учитывая инвариантность D_Z относительно перестановок сомножителей в $\check{P}^{(r+1)}$ получаем, что D_Z — дивизор в $\check{P}^{(r+1)}$ мультистепени $(d, d, \ldots, d)$. Более того, подмногообразие Z однозначно определяется по дивизору D_Z (мы знаем все точки пересечения Z с общим подпространством коразмерности r). Поэтому соответствие $Z \mapsto D_Z$ определяет вложение множества всех r-мерных подмногообразий степени d в полную линейную систему всех дивизоров мультистепени $(d, d, \ldots, d)$ в $\check{P}^{(r+1)}$, которая представляет собой проективное пространство, следовательно параметризуется квазипроективным подмногообразием.

2.4.2. *Д-во предложения 10.* Для всякой проективной схемы X над S существует конечное отображение $f : X \to \mathbb{P}^r_S$ на проективное пространство той же размерности (надо вложить X в проективное пространство, а затем спроектировать). Очевидно, что если семейство $\{\mathcal{F}^\alpha\}$ удовлетворяет условиям предложения, то им удовлетворяет и семейство $\{f_*\mathcal{F}^\alpha\}$. С другой стороны, по лемме 1 ограниченность второго семейства равносильна ограниченности первого семейства, поэтому достаточно доказать предложение в случае $X = \mathbb{P}^r_S$.

По условию все пучки $\mathcal{F}^\alpha$ являются факторпучками некоторого пучка $\mathcal{L}$. Поскольку на проективном пространстве каждый пучок является факторпучком пучка $\mathcal{O}(-k)^m$ для достаточно больших k и m, то мы можем считать, что

$\mathcal{L} = \mathcal{O}(-k)^m$. Отсюда следует, что $0 \le a_r(\mathcal{F}^\alpha) = \mathbf{rk}\,\mathcal{F}^\alpha \le m$, то есть старший коэффициент полиномов Гильберта пучков $\mathcal{F}^\alpha$ ограничен. Рассмотрим теперь вместо семейства $\{\mathcal{F}^\alpha\}$ семейство $\{\mathcal{F}^\alpha(k)$. Поскольку $P_{\mathcal{F}^\alpha(k)}(n) = P_{\mathcal{F}^\alpha}(n+k)$, то ввиду ограниченности $a_r(\mathcal{F}^\alpha)$ коэффициент $a_{r-1}(\mathcal{F}^\alpha(k))$ останется ограниченным сверху, таким образом все сводится к случаю $\mathcal{L} = \mathcal{O}^m$.

Пусть $\mathbf{rk}\,\mathcal{F}^\alpha = a$. Пусть $Y \subset \mathbb{P}^r$ — множество особенностей пучка $\mathcal{F}^\alpha$, а $U = \mathbb{P}^r \setminus Y$ — открытое множество, на котором пучок $\mathcal{F}^\alpha$ локально свободен. Так как $\mathcal{F}^\alpha$ — пучок без кручения, то $\operatorname{codim} Y \ge 2$. Старшая внешняя степень пучка $\mathcal{F}^\alpha$ на множестве U является линейным расслоением, которое ввиду регулярности пространства $\mathbb{P}^r$ продолжается до линейного расслоения $\mathcal{O}(d)$ на всем $\mathbb{P}^r$, причем a-ая внешняя степень сюрьекции $\mathcal{O}^m \to \mathcal{F}^\alpha$ продолжается до ненулевого отображения $\mathcal{O}^{\binom{m}{a}} \to \mathcal{O}(d)$ (это отображение является сюрьекцией на U). Следовательно, $d \ge 0$, то есть d ограничено снизу.

С помощью теоремы Римана–Роха можно выразить $a_r(\mathcal{F}^\alpha)$ и $a_{r-1}(\mathcal{F}^\alpha)$ через a и d:

$$a_r(\mathcal{F}^\alpha) = a, \qquad a_{r-1}(\mathcal{F}^\alpha) = a\frac{r+1}{2} + d.$$

Отсюда видно, что $a_{r-1}(\mathcal{F}^\alpha)$ ограничено снизу. Поэтому, достаточно доказать ограниченность семейства всех $\{\mathcal{F}^\alpha\}$ с фиксированными a_r и a_{r-1}, то есть с фиксированными a и d.

Напомним, что каждому пучку без кручения $\mathcal{F}^\alpha$ мы сопоставили ненулевое отображение $\varphi : \mathcal{O}^{\binom{m}{a}} \to \mathcal{O}(d)$. Заметим, что по такому отображению можно восстановить пучок $\mathcal{F}^\alpha$ как образ сквозного отображения

$$\mathcal{O}^m \to Hom(\Lambda^{a-1}\mathcal{O}^m, \Lambda^a\mathcal{O}^m) \to Hom(\Lambda^{a-1}\mathcal{O}^m, \mathcal{O}(d)).$$

Здесь первое отображение — это естественное вложение, а второе индуцировано отображение φ. Теперь предложение очевидно следует из леммы 1 (1).

2.4.3. *Д-во леммы 1.* Пусть $\{\mathcal{F}^\alpha\}$ и $\{\mathcal{G}^\beta\}$ — ограниченные семейства. Пусть T и V — S-схемы, а $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — пучки на $X \times_S T$ и $X \times_S V$, такие что $\{\mathcal{F}^\alpha\} \subset \{\mathcal{F}_t\}$, $\{\mathcal{G}^\beta\} \subset \{\mathcal{G}_v\}$. Рассмотрим схемы $W = T \times_S V$, $Y = X \times_S W = (X \times_S T) \times_T W = (X \times_S V) \times_V W$ и пучок $\mathcal{H} = \pi_* Hom(f^*\mathcal{F}, g^*\mathcal{G})$ на ней, где $f : Y \to X \times_S T$, $g : Y \to X \times_S V$ и $\pi : Y \to W$ — проекции. Разбивая схему W на куски можно считать, что пучок $\mathcal{H}$ векторное расслоение. Рассмотрим $p : \mathbb{P}(\mathcal{H}) \to W$ — проективизацию расслоения $\mathcal{H}$ и пусть $\mathcal{L} \subset p^*\mathcal{H}$ — тавтологическое линейное подрасслоение. На пространстве $Y \times_W \mathbb{P}(\mathcal{H}) = X \times_S \mathbb{P}(\mathcal{H})$ имеется каноническое отображение пучков

$$p^*f^*\mathcal{F} \otimes \pi^*\mathcal{L} \to p^*g^*\mathcal{G}.$$

Пусть $\mathcal{K}$ — его ядро. Тогда очевидно, что $\{\operatorname{Ker} \mathcal{F}^\alpha \to \mathcal{G}^\beta\} \subset \{\mathcal{K}_h\}_{h \in \mathbb{P}(\mathcal{H})}$. Случай коядер и расширений доказывается аналогично.

В случае с конечным морфизмом рассмотрим пучок алгебр $\mathcal{A} = f_*\mathcal{O}_X$ на Y. Заметим, что если $\mathcal{M}$ — $\mathcal{O}_Y$-модуль, то множество структур $\mathcal{A}$-модуля в $\mathcal{M}$ находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством гомоморфизмов пучков алгебр $\mathcal{A} \to Hom(\mathcal{M}, \mathcal{M})$. Далее можно действовать аналогично предыдущему случаю.