Лекция 5.

Градуированные модули; ряд Пуанкаре, полином Гильберта. Фильтрации и лемма Артина-Риса. Теория размерности. Пополнения. Лемма Гензеля и структура разветвленных накрытий над полным кольцом дискретного нормирования.

Градуированные модули; ряд Пуанкаре, полином Гильберта

Сегодня мы построим теорию размерности локальных колец (в частности, докажем, что круллевская размерность любого нетерова локального кольца конечна). Для этого нам понадобится некоторый способ измерять величину конечно-порожденного модуля над нетеровым локальным кольцом.

Начнем со следующего. Говорят, что абелева группа V *градуирована* каким-то множеством I, если задано разложение

$$V^\bullet = \bigoplus_{i \in I} V^i.$$

Элементы подруппы $V^i \subset V$ в такой ситуации называются *однородными степени* i. В наших сегодняшних рассуждениях, множество I всегда будет множеством неотрицательных целых чисел. Пусть $A^\bullet$ – градуированное кольцо: это значит, что $A^\bullet$ градуировано как аддитивная группа, причем $A^m \cdot A^n \subset A^{n+m}$. Предложим также, что A^0 нетерово, и что $A^\bullet$ порождено как A^0-алгебра какими-то d элементами из $A^1 \subset A^\bullet$. По теореме Гильберта о базисе, все кольцо $A^\bullet$ тоже нетерово.

Упражнение 5.1. *Более общо, докажите, что градуированное неотрицательными целыми числами кольцо $A^\bullet$ нетерово тогда и только тогда, когда A^0 нетерово, а $A^\bullet$ конечно порождено как A^0-алгебра.*

Пусть $M^\bullet$ – некоторый градуированный модуль над $A^\bullet$ (т.е. M градуировано как группа, и $M^l \cdot A^n \subset M^{l+n}$), и пусть $M^\bullet$ конечно порожден. Заметим, что, заменив каждую образующую $M^\bullet$ на все ее однородные компоненты, можно считать, что $M^\bullet$ порожден конечным числом *однородных* элементов.

Наконец, предположим, что дана *аддитивная функция* l на классе всех конечно порожденных A^0-модулей – а именно, каждому такому модулю M сопоставлено число $l(M)$, причем если $M' \subset M$, то $l(M) = l(M') + l(M/M')$. *Рядом Пуанкаре* модуля M по отношению к функции l называется выражение

$$P(M,t) = \sum_{n \geq 0} l(M^n) t^n.$$

Лемма 5.1. *Ряд Пуанкаре $P(M,t)$ равен $P(M,t) = p(M,t)/(1-t)^d$, где d – число образующих A^0-алгебры $A^\bullet$ (напомним, что по предположению $A^\bullet$ порождено однородными элементами степени* 1*), а $p(M,t)$ – какой-то многочлен.*

Доказательство. Индукция по d. Возьмем образующую $x \in A^1$, рассмотрим отображение $x : M^\bullet \to M^{\bullet+1}$, и обозначим через $N^\bullet$ и $K^\bullet$ его ядро и коядро. Тогда в силу аддитивности, для любого $p \geq 0$ имеем

$$l(M^{p+1}) - l(M^p) = l(K^{p+1}) - l(N^p),$$

откуда $(1-t)P(M,t) = P(K,t) + tP(N,t)$. Но и K, и N есть на самом деле модули над алгеброй $A^\bullet/xA^\bullet$, которая порождена $d-1$ образующими. $\square$

Упражнение 5.2. *Пусть $A^\bullet = k[x_1, \dots, x_d]$ – алгебра полиномов, градуированная по степени полинома, а l – размерность над $A^0 = k$. Чему равно $P(A,t)$?*

Упражнение 5.3. *Пусть $P(t) = p(t)/(1-t)^d$, где $p(t)$ – многочлен. Разложим $P(t) = \sum_n p(n)t^n$. Докажите, что существует такой многочлен $\chi(t)$ степени не больше d, что $p(n) = \chi(n)$ при всех достаточно больших n.*

По Лемме 5.1 ряд Пуанкаре $P(M,t)$ удовлетворяет условию этого Упражнения; поэтому по каждому конечно порожденному модулю M можно построить канонический многочлен $\chi(M,n)$. Этот многочлен называется *полиномом Гильберта* модуля M.

Стабильные фильтрации и Лемма Артина-Риса

На практике, нам будут нужны не градуированные, а фильтрованные модули. А именно, мы будет работать в следующей ситуации. Пусть $\mathfrak{a} \subset A$ – идеал в кольце A, и пусть M – некоторый A-модуль. Тогда $\mathfrak{a}$-фильтрацией на M мы будем называть такой набор подмодулей $M_n \subset M$, $M_{n+1} \subset M_n$, что $\mathfrak{a}M_n \subset M_{n+1}$. Будем говорить, что $\mathfrak{a}$-фильтрация $M_\bullet \subset M$ *стабильная*, если для всех n начиная с какого-то n_0 имеем $M_n = \mathfrak{a}^{n-n_0}M_{n_0}$. Тривиальный пример $\mathfrak{a}$-фильтрации – это $M_n = \mathfrak{a}^n M$ (и эта фильтрация, очевидно, стабильна).

Упражнение 5.4. *Докажите, что любые две стабильные $\mathfrak{a}$-фильтрации $M_\bullet, M'_\bullet \subset M$ соизмеримы с том смысле, что для какого-то n_0 имеем $M_n \subset M'_{n+n_0}$ и $M'_n \subset M'_{n+n_0}$ (указание: заметьте, что можно положить $M'_n = \mathfrak{a}^n M$).*

Главный факт про стабильные фильтрации такой.

Предложение 5.2 (Лемма Артина-Риса). *Пусть A – нетерово кольцо, $\mathfrak{a} \subset A$ – идеал, а M – нетеров A-модуль, снабженный стабильной $\mathfrak{a}$-фильтрацией $M_\bullet$. Тогда для любого подмодуля $N \subset M$ фильтрация $N_n = M_n \cap N$ – стабильная $\mathfrak{a}$-фильтрация на N.*

Доказательство. Это утверждение было независимо доказано Артином (E. Artin) и Рисом (D. Rees). Существуют разные способы излагать по сути одно и то же доказательство, из которых наиболее поучителен, пожалуй, вот какой. Рассмотрим градуированную алгебру $\widetilde{A}^\bullet = \bigoplus_n \mathfrak{a}^n$ (она называется иногда алгеброй Риса). Имеем $A^0 = A$, и A-алгебра $\widetilde{A}^\bullet$ очевидно порождена компонентой $A^1 = \mathfrak{a}$ (причем, поскольку A нетерово, достаточно взять конечное число образующих). Для любого A-модуля M, снабженного $\mathfrak{a}$-фильтрацией $M_\bullet$, сумма $\widetilde{M}^\bullet = \bigoplus M_n$ есть градуированный $\widetilde{A}^\bullet$-модуль.

Упражнение 5.5. *Пусть A-модуль M нетеров. Тогда фильтрация $M_\bullet$ стабильна тогда и только тогда, когда $\widetilde{A}^\bullet$-модуль $\widetilde{M}^\bullet$ конечно порожден.*

Теперь утверждение очевидно: $\widetilde{A}^\bullet$-модуль $\widetilde{N}^\bullet$, отвечающий фильтрации $N_n = M_n \cap N \subset N$, есть подмодуль нетерова $\widetilde{A}^\bullet$-модуля $\widetilde{M}^\bullet$. $\square$

Следствие 5.3. *Пусть $\mathfrak{m} \subset A$ – максимальный идеал локального нетерова кольца A. Тогда $\cap_n \mathfrak{m}^n = 0$.*

Доказательство. Обозначим $I = \cap_n \mathfrak{m}^n$. Тогда в силу нетеровости I конечно порожден, и по Лемме Артина-Риса, примененной к $I \subset A$, имеем $I = I \cap \mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n-n_0}(\mathfrak{m}^{n_0} \cap I) = \mathfrak{m}^{n-n_0}I$ для какого-то n_0, откуда $I = \mathfrak{m}I$. Следовательно, по Лемме Накаямы $I = 0$. $\square$

Теория размерности

Будем теперь строить теорию размерности локальных колец. Прежде всего опишем некоторую аддитивную функцию на модулях. Это на самом деле часть совершенно общей теории, в которой даже комутативность кольца не важна.

Итак, пусть дано (не обязательно коммутативное) кольцо B. Тогда левый B-модуль называется *неприводимым*, если у него нет нетривиальных собственных подмодулей. Говорят, что B-модуль M имеет *конечную длину*, если существует такая убывающая фильтрация $M_n \subset M$, что M_n/M_{n+1} – неприводимый B-модуль (такая фильтрация называется *насыщенной*), и $M_n = 0$ при достаточно больших n. Очевидно, что если $M' \subset M$ – подмодуль, причем и M', и M/M' имеют конечную длину, то M тоже имеет конечную длину.

Определение 5.4. Пусть M – B-модуль конечной длины, Тогда *длиной* $l(M)$ называется минимальное возможное число ненулевых присоединенных градуированных факторов M_n/M_{n+1} в насыщенной фильтрации $M_\bullet \subset M$.

Лемма 5.5. *В любой насыщенной фильтрации $M_\bullet$ имеется ровно $l(M)$ штук нетривиальных присоединенных градуированных факторов M_n/M_{n+1}.*

Доказательство. Индукция по $l(M)$. Если $l(M) = 1$, то M неприводим, и утверждение следует из определения неприводимого модуля. Иначе, имеем неприводимый подмодуль $M' \subset M$ с $l(M/M') = l(M) - 1$. Тогда все члены насыщенной фильтрации M_n начиная с некоторого момента k не содержат M', а до этого момента – содержат; и для всех $n \neq k$ присоединенные градуированные факторы фильтрации $M_n/(M_n \cap M')$ на M/M' те же, что на M – а кроме того, M' нетривиально отображается в M_k/M_{k+1}. Поэтому $M_k/M_{k+1} = M'$, $M_k/(M_k \cap M') = M_{k+1}/(M_{k+1} \cap M)$, и соответствующий просоединенный градуированный фактор в фильтрации на M/M' равен нулю. □

Упражнение 5.6. *Докажите, что длина $l(M)$ – аддитивная функция, т.е. что $l(M) = l(M') + l(M/M')$ для любого подмодуля $M' \subset M$.*

Пусть теперь A – нетерово локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m} \subset A$. Тогда ниоткуда не следует, и неверно, что любой конечно порожденный A-модуль имеет конечную длину. Верно, однако, следующее.

Упражнение 5.7. *Докажите, что A-модуль $A/\mathfrak{m}^n$ имеет конечную длину для любого n. Выведите отсюда, что любой конечно порожденный $A/\mathfrak{m}^n$-модуль M имеет конечную длину.*

Замечание 5.6. Если разобраться, то причина, по которой это упражнение работает, такая – в кольце $A/\mathfrak{m}^n$ верно условие обрыва *убывающих* цепочек идеалов: любая цепоча вложенных идеалов $\mathfrak{a}_0 \supset \mathfrak{a}_1 \supset \cdots$ стабилизируеся на конечном шаге. Такие кольца называются *артиновыми*. Про них можно доказать, что они автоматически нетеровы, и развить некоторую теорию – в частности, доказать, что любой конечно-порожденный модуль над артиновым кольцом имеет конечную длину. Терминологию эту полезно знать, но сама теория не особенно интересная, и мы пропускаем ее для экономии места.

Пусть теперь дан $\mathfrak{m}$-примарный идеал $\mathfrak{q} \subset A$ и какой-то конечно порожденный A-модуль M. Пусть дана какая-то $\mathfrak{q}$-стабильная фильтрация $M_\bullet \subset M$.

Лемма 5.7. *Для любого n, A-модуль M/M_n имеет конечную длину. Кроме того, существует такой полином $\chi(t) = \chi(M_\bullet, t)$, называемый* характеристическим полиномом, *что $l(M/M_n) = \chi(n)$ при достаточно больших n, причем степень и старший член $\chi(n)$ не зависят от выбора стабильной $\mathfrak{q}$-фильтрации $M_\bullet$.*

Доказательство. Для любого n имеем $\mathfrak{q}^n M \subset M_n$, т.е. $\mathfrak{q}^n$ аннулирует M/M_n; поскольку $\mathfrak{q}$ $\mathfrak{m}$-примарен, он содержит какую-то степень $\mathfrak{m}^m$, а потому $\mathfrak{m}^{nm}$ аннулирует M/M_n. Следовательно, этот модуль конечной длины. Далее, поскольку фильтрация стабильна, $\widetilde{M}^\bullet = \bigoplus_n M_n$ – нетеров модуль над $\widetilde{A}^\bullet = \bigoplus_n \mathfrak{q}^n$. Алгебра

$$\widetilde{A}^\bullet/\mathfrak{q}\widetilde{A} = \bigoplus_n \mathfrak{q}^n/\mathfrak{q}^{n+1}$$

очевидно удовлетворяет условиям Леммы 5.1, а потому для градуированного модуля $\widetilde{M}^\bullet/\mathfrak{q}\widetilde{M}^\bullet$ существует полином Гильберта $\chi'(M,t)$ (по отношению к аддитивной функции длины). Поскольку $l(M/M_n) = \sum_{0 \le j < n} l(M_j/M_{j+1})$, функция $\chi(n) = \chi'(n-1)+\chi'(n-2)+\dots+\chi'(0)$ – тоже полином от n (степени на единицу большей, чем степень χ'). Наконец, чтобы проверить, что степень и старший член не зависят от выбора фильтрации, достаточно воспользоваться тем, что любые две стабильные фильтрации соизмеримы. $\square$

На самом деле, верно и большее.

Упражнение 5.8. *Пусть $\mathfrak{q} \subset A$ – $\mathfrak{m}$-примарный идеал. Воспользовавшись тем, что $\mathfrak{m}^n \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{m}$ для какого-то n, докажите, что для любого нетерова модуля M имеем $\deg\chi(M_\bullet) = \deg\chi(M'_\bullet)$, где $M_n = \mathfrak{m}^n M$ и $M'_n = \mathfrak{q}^n M$.*

Определение 5.8. Через $d(M)$ мы будем обозначать степень характеристического полинома $\chi(M,\mathfrak{m})$ модуля M минус 1. Через $\delta(A)$ мы будем обозначать минимальное количество элементов $a_1,\dots,a_{\delta(A)} \in \mathfrak{m}$, которые порождают $\mathfrak{m}$-примарный идеал $\mathfrak{q} \subset A$, или 0, если $0 \subset A$ уже $\mathfrak{m}$-примарен.

Упражнение 5.9. *Выведите из Леммы* 5.1 *и Упражнения* 5.3, *что* $\delta(A) \ge d(A)$.

Напомним, что через $\dim A$ обозначается круллевская размерность кольца A. Дальнейший наш план – доказать, что $d(A) \ge \dim A \ge \delta(A)$, откуда следует, что $\dim A$ конечно (и что $\dim A = d(A) = \delta(A)$). Это делается в три шага; первый шаг такой.

Лемма 5.9. *Пусть $x \in A$ – не делитель нуля для модуля M (т.е. $xm \ne 0$ для любого $m \in M$. Тогда $d(M/xM) \le d(M) - 1$.*

Доказательство. Обозначим через $N = xM \subset M$ образ умножения на x. Пскольку x – не делитель нуля, N изоморфно M как абстрактный модуль, и утверждение почти очевидно: для любого n мы имеем точную последовательность

$$0 \longrightarrow N/N_n \longrightarrow M/M_n \longrightarrow K/K_n \longrightarrow 0,$$

где $K = M/xM$, $M_n = \mathfrak{m}^n M$, $K_n = \mathfrak{m}^n K$ и $N_n = \mathfrak{m}^n M \cap N$, а потому $\chi(K_\bullet, n) = \chi(M_\bullet, n) - \chi(N_\bullet, n)$, и, раз по Лемме 5.7 степени и старшие члены $\chi(M_\bullet)$ и $\chi(N_\bullet)$ равны, степень $\chi(K_\bullet)$ должна быть строго меньше. Единственное, что надо отметить – это почему фильтрация $N_\bullet$ стабильная. Это следует из Леммы Артина-Риса. $\square$

Лемма 5.10. *Имеем* $d(A) \ge \dim A$.

Доказательство. Индукция по $d(A)$ (про которое мы уже знаем, что оно конечно). Если $d(A) = 0$, то длина $A/\mathfrak{m}^n A$ постоянна начиная с некоторого n, а потому $\mathfrak{m}^n = 0$, все элементы $\mathfrak{m}$ нильпотентны, $\mathfrak{m}$ лежит в нильрадикале A, и следовательно, никаких других простых идеалов в A нет, т.е. $\dim A = 0$. Пусть теперь $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_d$ – цепочка вложенных попарно различных простых идеалов. Положим $A' = A/\mathfrak{p}_0$. Тогда поскольку $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}A'$ есть максимальный идеал A', т.е. $A'/\mathfrak{m}^n$ всегда есть фактор $A/\mathfrak{m}^n$, и $d(A') \leq d(A)$. С другой стороны, A' есть область целостности. Возьмем любое $x \in \mathfrak{p}_1$; тогда по доказанному $d(A'/(x)) = d(A') - 1$. По индукции, $d \leq \mathsf{dim}(A'/(x)) + 2 \leq d(A') + 1$; поскольку цепочка идеалов была произвольная, $\mathsf{dim}\, A \leq d(A)$. □

Лемма 5.11. *Имеем* $\mathsf{dim}\, A \geq \delta(A)$.

Доказательство. Пусть $\mathsf{dim}\, A = d$; надо построить такие $a_1, \dots, a_d \subset A$, что идеал

$$(a_1, \dots, a_d) \subset A$$

$\mathfrak{m}$-примарен. Построим сначала такие $a_1, \dots, a_d \subset A$, что любой простой идеал $\mathfrak{p} \subset A$, содержащий $a_1, \dots, a_i$, имеет высоту не меньше i. Будем делать это по индукции. Пусть $a_1, \dots, a_{i-1}$ уже построены (или, если $i = 0$, ничего не построено). Рассмотрим все минимальные простые идеалы $\mathfrak{p}_i$, которые ассоциированы с $(a_1, \dots, a_{i-1})$ и имеют высоту ровно $i - 1$ (если таких нет, тем лучше). Тогда поскольку высота $\mathfrak{m}$ равна d, то $\mathfrak{m}$ не равен ни одному из $\mathfrak{p}_i$.

Упражнение 5.10. *Докажите, что если идеал* $\mathfrak{a} \subset A$ *содержится в конечном объединении* $\cup_{1 \leq i \leq n} \mathfrak{p}_i$ *простых идеалов* $\mathfrak{p}_i \subset A$, *то* $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_i$ *для какого-то* i. *Указание: по индукции, выберите сначала для любого* i *такое* $x_i \in \mathfrak{a}$, *что* $x_i \notin \mathfrak{p}_j$ *для* $j \neq i$, *а потом рассмотрите*

$$y = \sum_i x_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_n.$$

Поскольку ассоциированных простых идеалов в силу нетеровости конечное число, заключаем, что можно выбрать такое $a_i \in \mathfrak{m}$, что a_i не лежит ни в одном из $\mathfrak{p}_i$. Тогда утверждается, что последовательность $a_1, \dots, a_i$ годится. Действительно, пусть $\mathfrak{q} \subset A$ – какой-то простой идеал, содержащий $a_1, \dots, a_i$; тогда он содержит минимальный простой идеал $\mathfrak{p}$, ассоциированный с $(a_1, \dots, a_{i-1})$, и либо $\mathsf{ht}\,\mathfrak{p} = i - 1$ – но тогда по построению $a_i \notin \mathfrak{p}$, а потому $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$ и $\mathsf{ht}\,\mathfrak{q} \geq \mathsf{ht}\,\mathfrak{p} + 1 = i$ – либо $\mathsf{ht}\,\mathfrak{p} \geq i$, и тогда тем более $\mathsf{ht}\,\mathfrak{q} \geq i$.

Итак, имеем такую последовательность $a_1, \dots, a_d$, что любой простой идеал, содержащий $a_1, \dots, a_i$, имеет высоту не меньше i. В частности, любой простой идеал $\mathfrak{p} \subset A$, содержащий $(a_1, \dots, a_d)$, имеет высоту $\geq d$. Но поскольку $\mathfrak{m} \subset A$ – максимальный, а кольцо локально, то $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$, а раз $\mathsf{ht}\,\mathfrak{p} \geq d = \mathsf{ht}\,\mathfrak{m}$, то $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$. Поэтому, как и требовалось, $(a_1, \dots, a_d)$ – $\mathfrak{m}$-примарный идеал. □

Итак, мы доказали, что для любого локального кольца A имеем $d(A) = \delta(A) = \mathsf{dim}\, A$, и в частности, $\mathsf{dim}\, A$ конечна (теорема о размерности).

Пополнение

Надо сказать, что изначально теорема о размерности была доказана Круллем без применения градуированных модулей, полиномов Гильберта и Леммы Артина-Риса. А Лемму Артина-Риса придумали для другого применения, которое мы сейчас и опишем.

Пусть дано кольцо A, идеал $\mathfrak{a} \subset A$ и A-модуль M. Изучая модуль с точки зрения размерности, мы рассматривали систему фактормодулей $M/\mathfrak{a}^n M$, $n \geq 1$. Оказывается, что эти фактормодули полезно рассматривать и для многих других применений, и удобно объединить всю систему в один объект.

Определение 5.12. *Пополнением* $\widehat{M}$ модуля M по $\mathfrak{a}$-адической топологии называется проективный предел

$$\lim_{\leftarrow} M/\mathfrak{a}^n M$$

– иными словами, множество таких последовательностей $\{m_n\}$, $m_n \in M/\mathfrak{a}^n M$, что $m_{n+1} = m_n \mod \mathfrak{a}^n M$.

Пополнение самого кольца обозначается $\widehat{A}$ (предполагается, что из контекста ясно, какой именно берется идеал $\mathfrak{a}$). Это очевидно тоже кольцо; $\widehat{M}$, очевидно, модуль над кольцом $\widehat{A}$. Заметим сразу, что в определении пополнения необязательно брать именно фильтрацию $\mathfrak{a}^n M \subset M$.

Лемма 5.13. *Пусть даны две убывающие фильтрации $M_n, M'_n \subset M$ на абелевой группе M, и пусть $M_n \subset M'_n$, так что имеем естественные отображения $M/M_n \to M/M'_n$. Пусть, кроме того, фильтрации соизмеримы. Тогда естественное отображение*

$$\varphi : \lim_{\leftarrow} M/M_n \to \lim_{\leftarrow} M/M'_n$$

– изоморфизм.

Доказательство. Поскольку фильтрации соизмеримы, мы можем зафиксировать такое n_0, что $M'_{n+n_0} \subset M_n$. Тогда легко видеть, что обратное отображение φ^{-1} должно переводить последовательность $\{m'_n\}$ в последовательность $\{m_n\}$, заданную формулой $m_n = m'_{n+n_0} \mod M_n$. □

Тем самым, пополнение зависит не от конкретной фильтации, а от класса соизмеримых фильтраций. Такой класс фильтраций задает на M топологию, причем *линейную* – у $0 \in M$ есть базис окрестностей, состоящий из абелевых подгрупп. Это объясняет, почему используется термин “пополнение”. В частности, если кольцо A нетерово, а M – нетеров A-модуль, у нас есть выделенный класс фильтраций на M – стабильные $\mathfrak{a}$-фильтрации. Соответствующая топология называется $\mathfrak{a}$-*адической*. Но на практике, у нас и так слишком много нестандартных топологий на разных объектах, поэтому проще все-таки думать про класс соизмеримых фильтраций (тем более, что естественным образом появляется именно он).

Упражнение 5.11. *Пусть кольцо A нетерово; докажите, что его пополнение $\widehat{A}$ относительно любого идеала $\widehat{a}$ тоже нетерово. Указание: докажите сначала, что кольцо формальных рядов над нетеровым кольцом нетерово.*

Вот главный технический факт про пополнения.

Лемма 5.14. *Пусть дана короткая точная последовательность*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

нетеровых модулей над нетеровым кольцом A. Тогда последовательность их пополнений по $\mathfrak{a}$-адической топологии

$$0 \longrightarrow \widehat{M'} \longrightarrow \widehat{M} \longrightarrow \widehat{M''} \longrightarrow 0$$

точна для любого идеала $\mathfrak{a} \subset A$.

Доказательство. По Лемме Артина-Риса, можно выбрать такие стабильные $\mathfrak{a}$-фильтрации на всех трех модулях, что для любого n последовательность

$$0 \longrightarrow M'/M'_n \longrightarrow M/M_n \longrightarrow M''/M''_n \longrightarrow 0$$

точна. Поэтому достаточно следующего:

Упражнение 5.12. *Докажите, что что обратный предел точных последовательностей абелевых групп по системе сюръективных отображений точен.*

Замечание 5.15. Предположение сюръективности здесь можно ослабить, но нельзя отбросить совсем: в общей случае, обратный предел системы точных последовательностей точен лишь слева. Мы все это систематически изучим в следующем семестре.

Геометрическая причина, по которой приходится использовать пополнения, в следующем. Поскольку топология Зарисского слишком слабая, мы не можем, как много раз уже отмечали, работать "в маленькой окрестности точки". Один из способов бороться с этим – это работать "в еще меньшей окрестности", а именно, инфинитеземально: чтобы получать информацию о функциях, мы разлагаем их в ряд Тэйлора и последовательно изучаем коэффициенты ряда. При этом никаких разумных условий сходимости на ряды мы наложить не можем, и приходится использовать формальные ряды. Но то, что функции у нас алгебраические, отчасти и облегчает жизнь. Например, верно следующее.

Лемма 5.16. *Пусть A – нетерово локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$. Тогда его $\mathfrak{m}$-адическое пополнение $\widehat{A}$ тоже локально, с максимальным идеалом $\widehat{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}\widehat{A}$, поля вычетов $A/\mathfrak{m}$ и $\widehat{A}/\widehat{\mathfrak{m}}$ изомофрны, а естественное отображение $A \to \widehat{A}$ инъективно.*

Доказательство. Элементы пополнения $\widehat{A}$ можно записывать как формальные ряды $a_0 + a_1 + \dots$, где $a_i \in \mathfrak{m}^i \subset A$. Если такой ряд не лежит в $\mathfrak{m}\widehat{A}$, то a_0 не лежит в $\mathfrak{m}$, а потому обратимо. Домножая на обратный приводим ряд к виду $1 + a_1' + \dots$, а такой ряд, очевидно, обратим в кольце формальных рядов. Поэтому $\widehat{A}$ локально с идеалом $\widehat{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}\widehat{A}$. То, что поля вычетов одинаковые, очевидно. Наконец, то, что отображение $A \to \widehat{A}$ инъективно, равносильно тому, что $\cap \mathfrak{m}^n = 0$, что, как мы знаем, верно для нетерова локального кольца. $\square$

Заметим, что для C^∞-функций в анализе последнее утверждение совершенно неверно: есть много гладких функций, у которых все коэффициенты ряда Тэйлора в выбранной точке равны нулю. Но все такие функции неалгебраические.

Плата за использование пополнения это то, что оно *очень большое* – например, даже если A конечно-порожденная алгебра над полем k, в частности, счетномерна, пополнение $\widehat{A}$ имеет размерность континуум. Но зато, с пополнением можно работать по индукции, шаг за шагов поднимаясь по последовательным факторам $A/\mathfrak{m}^n A$. Чтобы проиллюстрировать полезность пополнения и способ работы с ним, докажем следующее частно применяемое утверждение.

Лемма 5.17 (Лемма Гензеля). *Пусть A – полное локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m} \subset A$ (т.е. $A = \widehat{A}$) и полем вычетов $k = A/\mathfrak{m}$, и пусть дан полином $P(x) \in A[x]$ над A со старшим коэффициентом 1. Пусть его редукция $\overline{P}(x) \in k[x]$ по модулю $\mathfrak{m}$ разлагается в произведение $\overline{P}(x) = a\overline{P}_1(x)\overline{P}_2(x)$ двух взаимно простых полиномов. Тогда существуют такие полиномы $P_1(x), P_2(x) \in A[x]$, что $P_i(x) = \overline{P}_i(x) \mod \mathfrak{m}$.*

Доказательство. По индукции. Пусть уже построены $P_i(x) \in A/\mathfrak{m}^l[x]$, $i = 1, 2$ для какого-то $l \geq 1$. Продолжим их как угодно до полиномов $P_i'(x) \in A/\mathfrak{m}^{l+1}[x]$ и обозначим

$$P'(x) = P_1'(x)P_2'(x).$$

По предположению индукции, все коэффициенты $P'(x)$ лежат в $\mathfrak{m}^l/\mathfrak{m}^{l+1}$. Поскольку $\overline{P}_1(x)$ и $\overline{P}_2(x)$ взаимно просты, существуют такие $q_1(x), q_2(x) \in k[x]$, что $q_2(x)\overline{P}_1(x) + q_1(x)\overline{P}_2(x) = 1$. Тогда, заменяя $P_i'(x)$ на $P_i'(x) - P'(x)q_i(x)$, добиваемся того, что $P'(x) = 0$. $\square$

Гензель, который ввел пополнения (в алгебраической теории чисел), как раз имел в виду эту Лемму, а особенно ее следствие, которое мы докажем только в геометрической ситуации.

Лемма 5.18. *Пусть A – кольцо дискретного нормирования с максимальным идеалом $\mathfrak{m} \subset A$. Предположим, что поле вычетов $A/\mathfrak{m}$ – алгебраически замкнутое поле характеристики 0. Пусть B – нормализация A в каком-то расширении Галуа L поля частных $K = \operatorname{Frac}(A)$ с группой Галуа G, и пусть $\widehat{B}$ – пополнение B относительно идеала $\mathfrak{m}B$. Тогда имеется разложение*

$$\operatorname{Spec} \widehat{B} = \coprod_i \operatorname{Spec} \widehat{B}_i,$$

где все $\widehat{B}_i$ – полные кольца дискретного нормирования, переставляемые группой G. Более того, стабилизатор любого из B_i – группа инерции $I \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \subset G$, и $\widehat{B}_i = \widehat{A}[x]/(x^m - a)$, где $a \in \mathfrak{m}$ – униформизующая, а $\widehat{A}$ – пополнение кольца A.

Таким образом, если есть разветвленное накрытие конечно-порожденной алгебры над конечным полем, то, переходя к нормализации, ограничиваясь точками коразмерности 1, и беря пополнение, мы получаем полное описание ветвления: все распадается в несвязное объединение эталонных циклических разветвленных накрытий $A[x]/(x^m - a)$.

Доказательство. По индукции, достаточно рассмотреть случай $B = A[x]/P(x)$, где $P(x)$ – какой-то полином. Как мы уже доказали на прошлой лекции, редукция слоя $\operatorname{Spec} B$ над замкнутой точкой $o = \operatorname{Spec} k \in \operatorname{Spec} A$ – это накрытие Галуа с группой Галуа G/I. Поскольку k алгебраически замкнуто, это накрытие есть несвязное объединение копий поля k, т.е. полином $P(x)$ разлагается по модулю $\mathfrak{m}$ на взаимно-простые линейные множители. По Лемме Гензеля (и индукции по числу множителей), это разложение поднимается в пополнение $\widehat{B}$ и задает разложение в сумму $\widehat{B}_i$. Все $\widehat{B}_i$, очевидно, полные кольца дискретного нормирования. Наконец, возьмем какую-нибудь униформизующую $b \in \widehat{B}_i$. Тогда b^m инвариантно относительно группы инерции I, а потому $b^m \in \mathfrak{m} \subset \widehat{A}$. Легко видеть, что это униформизующая: поскольку $\widehat{B}_i$ – свободный $\widehat{A}$-модуль ранга m, фактор $B/b^m B$ должен иметь длину, равную m на длину $\widehat{A}/b^m\widehat{A}$, а следовательно, $\widehat{A}/b^m\widehat{A}$ это модуль длины 1. Поэтому $a^{-1}b^m$ задается формальным рядом с ненулевым старшим членом, а из такого ряда очевидной индукцией можно извлечь корень степени m. $\square$