Детерминантали. Многообразия Веронезе и Сегре

Часть 1. Напоминание

Два основных базовых класса многообразий в алгебраической геометрии — это аффинные многообразия и проективные многообразия, то есть многообразия, которые можно вложить либо в аффинное либо в проективное пространство подходящей размерности. И те и другие можно описывать в терминах "координатной алгебры" — если X — аффинно, то

$$A_X = \Gamma(X, \mathcal{O}_X),$$

а если X — проективно, то

$$A_X^\bullet = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Gamma(X, \mathcal{O}_X(k)),$$

где $\mathcal{O}_X(1)$ — очень обильное линейное расслоение на X. Вся геометрия многообразия X в этих случаях может быть восстановлена по координатным алгебрам. В частности, по алгебре восстанавливается как само многообразие

$$X = \begin{cases} \operatorname{Spec} A_X, & \text{в аффинном случае,} \\ \operatorname{Proj} A_X^\bullet, & \text{в проективном случае,} \end{cases}$$

так и категории когерентных и квазикогерентных пучков на нем

$$\mathsf{coh} X = \begin{cases} \mathsf{mod}\text{-}A_X, & \text{в аффинном случае,} \\ \mathsf{qgr}\text{-}A_X^\bullet, & \text{в проективном случае,} \end{cases} \qquad \mathsf{Qcoh} X = \begin{cases} \mathsf{Mod}\text{-}A_X, & \text{в аффинном случае,} \\ \mathsf{Qgr}\text{-}A_X^\bullet, & \text{в проективном случае} \end{cases}$$

(маленькие буквы в обозначениях категорий указывают на конечную порожденность объектов, а эквивалентности задаются формулами $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$ и $\mathcal{F} \mapsto \oplus_{k=0}^{\infty} \Gamma(X, \mathcal{F}(k))$ соответственно).

Если многообразие X является подмногообразием в аффинном пространстве, $X \subset \mathbb{A}^n$, то

$$A_X \cong \mathsf{k}[x_1, \dots, x_n]/I_X,$$

где I_X — идеал в кольце функций на $\mathbb{A}^n$, состоящий из функций, обращающихся в ноль на X. Аналогично, если многообразие X является подмногообразием в проективном пространстве, $X \subset \mathbb{P}^n$, то

$$A_X^\bullet \cong \mathsf{k}[x_0, x_1, \dots, x_n]/I_X,$$

где кольцо многочленов рассматривается как градуированое с естественной градуировкой (а идеал I_X, состоящий из многочлено обращающихся в ноль на X, автоматически однороден). Образующие идеала I_X (он автоматически конечно порожден в силу нетеровости кольца многочленов) называются уравнениями, задающими многообразие.

Две стандартных типа задач, встречающихся в алгебраической геометрии — по вложению многообразия определить уравнения, его задающие, и наоборот, по данной системе уравнений понять, что за многообразие ими задается.

Часть 2. Многообразие Веронезе

Пусть $X = \mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(U)$ и рассмотрим морфизм $\nu : X \to \mathbb{P}(S^d U)$, задаваемый естественной сюръекцией $S^d U^* \otimes \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X(d)$ (получающейся применением симметрической степени к тавтологической сюръекции $U^* \otimes \mathcal{O}_X = \Gamma(X\mathcal{O}_X(1)) \otimes \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X(1)$).

Во-первых, для большей наглядности выберем базис u_0, u_1 в U^* (однородные координаты на X) и рассмотрим мономиальный базис в $S^d U^*$: $x_0 = u_0^d$, $x_1 = u_0^{d-1} u_1$, $\dots x_d = u_1^d$. По определению морфизм имеет вид

$$(u_0 : u_1) \mapsto (u_0^d : u_0^{d-1} u_1 : \dots : u_1^d).$$

Попробуем описать идеал I_X для данного вложения. Сразу видно, что $f_{ij}(x) = x_i x_j - x_{i+1}x_{j-1}$ лежит в I_X. В самом деле, подставляя, получаем $f_{ij}(u) = u_0^{d-i}u_1^i \cdot u_0^{d-j}u_1^j - u_0^{d-i-1}u_1^{i+1} \cdot u_0^{d-j+1}u_1^{j-1} = 0$. Покажем, что

$$I_X = (f_{ij})_{0\leqslant i\leqslant j-2\leqslant d-2}.$$

В самом деле, легко видеть, что пространство мономов вида $\langle x_0^p x_i x_d^{k-p-1}\rangle_{0\leqslant p\leqslant k-1,\ 1\leqslant i\leqslant d}$ проектируется изоморфно на компоненту степени k в факторкольце $\mathsf{k}[x]/(f_{ij})$. С другой стороны, при гомоморфизме $\mathsf{k}[x]/(f_{ij}) \to \mathsf{k}[u]$, моном $x_0^p x_i x_d^{k-p-1}$ переходит в $u_0^{pd}\cdot u_0^{d-i}u_1^i \cdot u_1^{d(k-p-1)} = u_0^{pd+d-i}u_1^{d(k-p-1)+i}$, а такие мономы составляют базис в компоненте степени dk в $\mathsf{k}[u]$. Следовательно, $\mathsf{k}[x]/(f_{ij})$ изоморфно d-му подкольцу Веронезе в $\mathsf{k}[u]$, и значит $I_X = (f_{ij})$.

Упражнение 1. Покажите, что аналогичные уравнения задают $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(U)$ при аналогичном вложении (которое, кстати, называется d-кратным вложением Веронезе) в $\mathbb{P}(S^dU)$.

Пусть $V = S^dU$ и рассмотрим в $\mathbb{P}(V)$ множество $X \subset \mathbb{P}(V)$ точек, являющихся тензорами ранга 1, то есть такими, что соответствующий элемент в S^dU является d-ой степенью элемента из U. Убедимся, что на X есть естественная структура схемы, причем такая, что $X \cong \mathbb{P}(U)$. Рассмотрим вложение пучков

$$U^*\otimes S^{d-1}U^*\otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \to S^dU^*\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} = V^*\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$$

(над точкой $P\in\mathbb{P}(V)$ он задается формулами $u_i\otimes(u_0^pu_1^q)\mapsto u_0^{p+\delta_{0i}}u_1^{q+\delta_{1i}} = x_{q+\delta_{1i}} \mapsto x_{q+\delta_{1i}}(P)$). По сопряженности он дает морфизм пучков

$$\varphi : U^*\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \to S^{d-1}U\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$$

(задается формулами $u_i\mapsto \sum_{p+q=d-1} x_{q+\delta_{1i}}(P)e_0^pe_1^q$, где e_0, e_1 — двойственный базис в U). Ясно, что X — это в точности множество точек, в которых ранг φ равен 1. Отсюда на X сразу возникает схемная структура. В самом деле, условие на ранг — это зануление всех миноров порядка 2 (или, если без координат, это зануление морфизма $\Lambda^2\varphi : \Lambda^2U^*\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \to \Lambda^2S^{d-1}U\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(2)$). Согласно предыдущим вычислениям матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{d-2} & x_{d-1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{d-1} & x_d\end{pmatrix}^T,$$

а ее миноры равны f_{ij}. Значит X совпадает с d-кратно вложенным $\mathbb{P}(U)$.

С другой стороны, можно доказать это и не пользуясь тем, что мы знаем уравнения. Для этого удобно воспользоваться следующим полезным утверждением.

Лемма 2.1. *Пусть R — локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}\subset R$ и полем вычетов $\mathsf{k} = R/\mathfrak{m}$. Пусть $\varphi : R^n \to R^m$ — гомоморфизм свободных R-модулей, такой что $\Lambda^{r+1}\varphi = 0$ и ранг индуцированного морфизма $\bar\varphi : \mathsf{k}^n\to\mathsf{k}^m$ равен r. Тогда ядро, коядро и образ φ — свободные модули ранга $n-r$, r и $m-r$ соответственно.*

Доказательство. Так как ранг морфизма $\bar\varphi$ равен r, один из миноров порядка r его матрицы не равен нулю. Аналогичный минор матрицы φ тогда обратим (элемент локального кольца, не лежащий в максимальном идеале всегда обратим!), а значит меняя базисы в R^n и R^m можно считать, что матрица φ имеет вид

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1_r & B \\ C & D\end{pmatrix}.$$

Условие $\Lambda^{r+1}\varphi = 0$ влечет $D = CB$ (равенство нулю окаймляющих миноров). Заметим, что

$$\begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ -C & 1_{m-r}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1_r & B \\ C & D\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1_r & -B \\ 0 & 1_{n-r}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

значит заменами базисов в R^n и R^m матрица φ приводится к указанному виду. Отсюда лемма следует немедленно. □

Обозначим через L образ ограничения φ на X. Заметим, что по определению X ранг $\varphi_{|X}$ не превосходит 1. С другой стороны, он нигде не равен нулю, поэтому выполнены условия леммы. Значит L — линейное расслоение на X, причем у нас есть сюръекция $U^*\otimes\mathcal{O}_X \to L$. Такая сюръекция автоматически дает морфизм $\pi : X\to\mathbb{P}(U)$, такой что $\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(1) = L$. Чтобы проверить, что π и ν взаимно обратны надо убедиться в том, что $\operatorname{Im}\nu^*\varphi$ — это тавтологический морфизм $U^*\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(1)$. В самом деле, применяя ν^* к матрице φ получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} u_0^d & u_0^{d-1}u_1 & \dots & u_0^2u_1^{d-2} & u_0u_1^{d-1} \\ u_0^{d-1}u_1 & u_0^{d-2}u_1^2 & \dots & u_0u_1^{d-1} & u_1^d\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} u_0^{d-1} & u_0^{d-2}u_1 & \dots & u_0u_1^{d-2} & u_1^{d-1}\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix} u_0 & u_1\end{pmatrix}$$

откуда видно, что морфизм $\nu^*\varphi$ раскладывается в композицию $U^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(1) \to S^{d-1}U \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(d)$, причем первый морфизм сюръективен, а второй инъективен.

Упражнение 2. Проверьте, что те же рассуждения проходят для пространства U любой размерности.

Часть 3. Схема нулей и детерминантали

Пусть Y — схема, а E — векторное расслоение на Y (локально свободный пучок конечного ранга). Пусть $s \in \Gamma(Y, E)$ — глобальное сечение, а $Z_s \subset Y$ — множество точек, в которых s обращается в нуль (то есть таких точек y, что образ s в $E_{Y,y} = E \otimes \mathcal{O}_{Y,y}$ лежит в $E \otimes \mathfrak{m}_{Y,y}$). Покажем, что на множестве Z_s есть естественная структура замкнутой подсхемы.

В самом деле, рассмотрим морфизм пучков $E^* \to \mathcal{O}_Y$, задаваемый сечением s. Его образ I_s — подпучок в $\mathcal{O}_Y$, то есть пучок идеалов на Y. Заметим, что $\operatorname{supp} \mathcal{O}_Y / I_s$ — как раз Z_s. Действительно, это вопрос локальный, поэтому можно считать пучок E тривиальным, то есть $E \cong \mathcal{O}_Y^n$. Тогда $\Gamma(Y, E) = \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)^n$, таким образом сечение s — это набор $(f_1, \dots, f_n)$ функций на Y. Ясно, что $Z_s = \{ f_1 = \dots = f_n = 0 \}$. С другой стороны, $E^* \cong \mathcal{O}_Y^n$ и морфизм $s : E^* \to \mathcal{O}_Y$ задается формулой $(g_1, \dots, g_n) \mapsto f_1 g_1 + \dots + f_n g_n$, поэтому его образ — это как раз идеал $(f_1, \dots, f_n)$, носитель фактора по которому совпадает с Z_s.

Таким образом $Z_s \subset Y$ имеет естественную структуру замкнутой подсхемы. Эта подсхема называется схемой нулей сечения s.

Аналогично, пусть вместо сечения расслоения задан морфизм $s : E \to F$ расслоений. Так как
$$\operatorname{Hom}(E, F) \cong \Gamma(Y, E^* \otimes F),$$
мы можем рассматривать его как сечение расслоения $E^* \otimes F$. Схема нулей этого сечения также называется схемой нулей мофризма.

Предложение 3.1. *Пусть E — векторное расслоение на Y, $s \in \Gamma(Y, E)$, а S — произвольная схема. Тогда*
$$\operatorname{Map}(S, Z_s) = \{ f \in \operatorname{Map}(S, Y) \mid f^* s = 0 \},$$
где $f^* s$ рассматривается как сечение расслоения $f^* E$.

Доказательство. Обозначим через i вложение $Z_s \to Y$. Заметим, что $i^* s = 0$. В самом деле, утверждение локально, поэтому можно считать, что $Y = \operatorname{Spec} A$, $E = A^m$, а $s = (s_1, \dots, s_m)$, $s_i \in A$. Тогда утверждение означает, что образы s_i в факторкольце $A/(s_1, \dots, s_m)$ равны нулю, что тавтологично. Отсюда сразу следует, что если $g : S \to Z_s$, а $f = i \circ g$, то $f^* s = g^* i^* s = 0$, поэтому $g \mapsto i \circ g$ задает отображение слева направо.

Пусть теперь f — морфизм $S \to Y$, такой что $f^* s = 0$. Покажем, что f единственным образом пропускается через i. Это утверждение также локально и означает следующее: если $A \to B$ — гомоморфизм колец, такой что при естественном морфизме $A^m \to A^m \otimes_A B$ набор $(s_1, \dots, s_m)$ переходит в ноль, то морфизм пропускается через $A/(s_1, \dots, s_m)$, что очевидно. $\square$

Схема нулей морфизма $\Lambda^r s : \Lambda^r E \to \Lambda^r F$ называется r-ой детерминанталью мофризма s и обозначается $D_r(s)$. Например, подмногообразие Веронезе является детерминанталью $D_1(\varphi)$.

Замечание 3.2. Внешней степенью свободного модуля над коммутативным кольцом называется подмодуль в его тензорной степени, состоящий из антиинвариантных тензоров. Ясно, что если $f : V \to W$ — линейное отображение, то отображение $f^{\otimes n} : V^{\otimes n} \to W^{\otimes n}$ коммутирует с действием симметрической группы, и поэтому переводит антиинвариантные тензоры в антиинвариантные тензоры, то есть индуцирует отображение $\Lambda^n f : \Lambda^n V \to \Lambda^n W$. При этом ясно, что матрица отображения $\Lambda^n f$ состоит из миноров матрицы f.

Следствие 3.3. *Пусть $s : E \to F$ — морфизм векторных расслоений на Y, а S — любая схема. Тогда*
$$\operatorname{Map}(S, D_k(s)) = \{ f \in \operatorname{Map}(S, Y) \mid \Lambda^{k+1} f^* s = 0 \}.$$

Пример 3.4. Пусть $Y = \mathbb{P}^1$ с координатами $(x : y)$, $E = \mathcal{O}(1)$, $s = x$. Тогда Z_s — точка $(0 : 1)$ с приведенной структурой. В самом деле, на аффинной окрестности точки $(1 : 0)$ при стандартной тривиализации сечение s представляется функцией 1 и поэтому нулей не имеет, а на аффинной окрестности точки $(0 : 1)$ с координатой t — функцией t, а факторкольцо $\mathsf{k}[t]/t\mathsf{k}[t]$ целостно.

Пример 3.5. Пусть $Y = \mathbb{P}^1$ с координатами $(x : y)$, $E = \mathcal{O}(2)$, $s = x^2$. Тогда Z_s — точка $(0 : 1)$ с неприведенной структурой. В самом деле, так же как и выше проверяется, что $(0 : 1)$ — единственный ноль s, при этом на аффинной окрестности точки $(0 : 1)$ сечение s представляется функцией t^2, а факторкольцо $\mathsf{k}[t]/t^2\mathsf{k}[t]$ содержит нильпотенты.

Важно понимать следующее. Пусть $Y = \mathbb{P}^n$ и $E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)^m$. Тогда $\Gamma(\mathbb{P}^n, E) = \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))^m$, поэтому сечение s представляется набором $(s_1, \dots, s_m)$ однородных многочленов степени d. Пусть $X = Z_s$. Тогда легко видеть, что $(s_1, \dots, s_m) \subset I_X$. В самом деле, по определению схемной структуры на локусе нулей имеем точную справа последовательность

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d)^m \xrightarrow{(s_1,\dots,s_m)} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow i_*\mathcal{O}_X$$

где $i : X \to \mathbb{P}^n$ — вложение. Подкручивая ее на d и переходя к глобальным сечениям, получаем комплекс

$$\mathsf{k}^m \xrightarrow{(s_1,\dots,s_m)} \mathsf{k}[x_0, \dots, x_n]_d \longrightarrow (A_X)_d$$

значит $s_i \in I_X$. Однако, **не верно**, что идеал I_X порождается многочленами $s_1, \dots, s_m$.

Пример 3.6. Пусть $Y = \mathbb{P}^1$ с координатами $(x : y)$, $E = \mathcal{O}(2)^2$, $s = (x^2, xy)$. Тогда Z_s — точка $(0 : 1)$ с неприведенной структурой, а $I_{Z_s} = x\mathsf{k}[x, y]$. В самом деле, так же как и выше проверяется, что $(0 : 1)$ — единственный ноль s, при этом на аффинной окрестности точки $(0 : 1)$ сечение s представляется функциями (t^2, t), а факторкольцо $k[t]/(t^2, t) = \mathsf{k}[t]/t\mathsf{k}[t]$, так что Z_s имеет приведенную структуру.

Другой способ убедится в этом такой. Заметим, что морфизм $s : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)^2 \xrightarrow{(x^2,xy)} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ представляется в виде композиции $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)^2 \xrightarrow{(x,y)} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \xrightarrow{x} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$, в которой первый морфизм сюръективен. Поэтому его образ равен образу второго морфизма.

Часть 4. Многообразие Сегре

Разобранный пример показывает, что многообразие тензоров минимального ранга обладает хорошими свойствами. Разберем еще пару примеров.

Рассмотрим множество X тензоров ранга 1 в $\mathbb{P}(U \otimes W)$. Покажем, что оно изоморфно произведению $\mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(W)$. Вначале построим морфизм $X \to \mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(W)$. Для этого заметим, что тавтологический морфизм $U^* \otimes W^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U\otimes W)} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U\otimes W)}(1)$ дает морфизм

$$\varphi : U^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U\otimes W)} \to W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U\otimes W)}(1).$$

Введем на X схемную структуру как $X = D_1(\varphi))$. Ясно, что на X ранг φ постоянен и равен единице, поэтому $L = \operatorname{Im} \varphi_{|X}$ — линейное расслоение. При этом имеем сюръекцию $U^* \otimes \mathcal{O}_X \to L$ и вложение $L \to W \otimes \mathcal{O}_X(1)$, которое после дуализации и подкрутки дает сюръекцию $W^* \otimes \mathcal{O}_X \to L^* \otimes \mathcal{O}_X(-1)$. Получаем морфизмы $p : X \to \mathbb{P}(U)$, $q : X \to \mathbb{P}(W)$, такие что $p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(1) = L$, $q^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(1) = L^* \otimes \mathcal{O}_X(1)$. Произведение морфизмов p и q дает морфизм $p \times q : X \to \mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(W)$.

Теперь построим морфизм в обратную сторону. Для этого заметим поднимем тавтологические морфизмы $U^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(1)$ и $W^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(1)$ на произведение и тензорно перемножим. Получим сюръекцию

$$(U \otimes W)^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)\times\mathbb{P}(W)} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)\times\mathbb{P}(W)}(1, 1) := p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(1) \otimes q^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(1),$$

которая задает морфизм $s : \mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(U \otimes W)$, который называется морфизмом Сегре. При этом ясно, что морфизм $s^*\varphi$ раскладывается в композицию $U^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)\times\mathbb{P}(W)} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)\times\mathbb{P}(W)}(1, 0) \to W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)\times\mathbb{P}(W)}(1, 1)$ (где первый морфизм — это поднятие тавтологического морфизма на $\mathbb{P}(U)$, а второй — это подкрученное на $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)\times\mathbb{P}(W)}(0, 1)$ поднятие тавтологического морфизма на $\mathbb{P}(W)$). Поэтому $p \circ s$ и $q \circ s$ — это проекции $\mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(W)$ на сомножители, а $(p \times q) \circ s = \mathrm{id}$. Остается воспользоваться следующим упражнением.

Упражнение 3. Покажите, что идеал I_X порожден квадриками $Q_{ij,kl} = x_{ij}x_{kl} - x_{il}x_{kj}$, где x_{ij} — базис в $(U \otimes W)^*$ двойственный к тензорному произведению базисов U и W. Проверьте, что градуированная алгебра $\mathsf{k}[x_{ij}]/I_X$ изоморфна диагональной компоненте биградуированной алгебры $\mathsf{k}[u_i] \otimes \mathsf{k}[w_j]$.

Упражнение 4. Найдите минимальный ранг тензоров в $\mathbb{P}(\Lambda^k W)$ и опишите многообразие таких тензоров.

Грассманианы

Часть 5. Грассманиан

Рассмотрим проективное пространство $\mathbb{P}(\Lambda^k W)$ и множество поливекторов минимально ранга. Заметим, что для поливектора $\lambda \in \Lambda^k W$ минимальный ранг равен k, причем он достигается в точности на формах, лежащих в одномерных подпространствах $\Lambda^k U \subset \Lambda^k W$, где $U \subset W$ — подпространство размерности k. В самом деле, по определению ранг λ — это ранг r морфизма свертки $W^* \xrightarrow{\lambda} \Lambda^{k-1} W$, то есть коразмерность его ядра. В силу кососимметричности λ, ясно что $\lambda \in \Lambda^k(K^\perp) \subset \Lambda^k W$, где $K^\perp \subset W$ — аннулятор K. Поэтому при $\lambda \neq 0$ должно быть $\dim K^\perp \geqslant k$, откуда $r = \operatorname{codim} K = \dim K^\perp \geqslant k$, а если достигается равенство, то $\lambda \in \Lambda^k U$, где $U = K^\perp$.

Рассмотрим множество X всех поливекторов ранга k в пространстве $\mathbb{P}(\Lambda^k W)$. Тавтологический морфизм $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Lambda^k W)}(-1) \to \Lambda^k W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Lambda^k W)}$ дает морфизм

$$\varphi : \Lambda^{k-1} W^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Lambda^k W)}(-1) \to W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Lambda^k W)}.$$

Введем на X схемную структуру занулением $\Lambda^{k+1}\varphi$ (таким образом, X — детерминанталь морфизма φ). Ясно, что на X ранг φ постоянен и равен k, поэтому $\mathcal{U} = \operatorname{Im} \varphi_{|X}$ — расслоение ранга k. Обозначим также $W/\mathcal{U} := \operatorname{Coker} \varphi_{|X}$ и $\mathcal{U}^\perp := (W/\mathcal{U})^*$. Многообразие X называется **грассманианом k-мерных подпространств в W** и обозначается $\mathsf{Gr}(k, W)$ (или $\mathsf{Gr}(k, n)$, где $n = \dim W$). Расслоения $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}^*$ называются **тавтологическим подрасслоением** и **двойственным тавтологическим расслоением**, а расслоения $W/\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}^\perp$ — **тавтологическим факторрасслоением** и **расслоением аннуляторов**. По определению на $\mathsf{Gr}(k, W)$ имеем точные последовательности расслоений

$$0 \to \mathcal{U} \to W \otimes \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(k,W)} \to W/\mathcal{U} \to 0 \qquad \text{и} \qquad 0 \to \mathcal{U}^\perp \to W^* \otimes \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(k,W)} \to \mathcal{U}^* \to 0.$$

Вложение $\mathsf{Gr}(k, W) \to \mathbb{P}(\Lambda^k W)$ называется **вложением Плюккера**.

Предложение 5.1. *Пусть S — произвольная схема. Тогда*

$$\operatorname{Map}(S, \mathsf{Gr}(k, W)) = \{\, (E, \varepsilon) \mid E \text{ — расслоение ранга } k \text{ на } S,\ \varepsilon : E \to W \otimes \mathcal{O}_S \text{ — вложение расслоений} \}$$

(пары (E, ε) и (E', ε)) эквивалентны, если существует изоморфизм $\xi : E \to E'$, такой что $\epsilon = \epsilon' \circ \xi$). При этом композиция $S \xrightarrow{(E,\varepsilon)} \mathsf{Gr}(k, W) \longrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^k W)$ задается вложением $\Lambda^k E \xrightarrow{\Lambda^k \varepsilon} \Lambda^k W \otimes \mathcal{O}_S$.

Доказательство. Морфизму $f : S \to \mathsf{Gr}(k, W)$ сопоставим вложение $f^*\mathcal{U} \to f^*(W \otimes \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(k,W)}) = W \otimes \mathcal{O}_S$. Обратно, пусть (E, ε) расслоение с вложением в $W \otimes \mathcal{O}_S$. Рассмотрим морфизм

$$\Lambda^k \varepsilon : \Lambda^k E \to \Lambda^k W \otimes \mathcal{O}_S.$$

Ясно, что $\Lambda^k \varepsilon$ — вложение линейного подрасслоения, поэтому существует морфизм $\bar{f} : S \to \mathbb{P}(\Lambda^k W)$, такой что $\bar{f}^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Lambda^k W)}(-1) \cong \Lambda^k E$. При этом очевидно, что морфизм $\bar{f}^*\varphi : \Lambda^{k-1} W^* \otimes \Lambda^k E \to W \otimes \mathcal{O}_S$ раскладывается в композицию

$$\Lambda^{k-1} W^* \otimes \Lambda^k E \xrightarrow{\Lambda^{k-1}\varepsilon^*} \Lambda^{k-1} E^* \otimes \Lambda^k E = E \xrightarrow{\ \varepsilon\ } W \otimes \mathcal{O}_S$$

Отсюда видно, что $\bar{f}^* \Lambda^{k+1} \varphi = 0$, так как φ пропускается через расслоение E ранга k, так что $\bar{f}$ пропускается через морфизм $f : S \to \mathsf{Gr}(k, W)$, и что обратный образ вложения $\mathcal{U} \to W \otimes \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(k,W)}$ совпадает с исходным морфизмом $\varepsilon : E \to W \otimes \mathcal{O}_S$. □

Следствие 5.2. *Пусть $\dim W = n$. Тогда $\mathsf{Gr}(k, W) \cong \mathsf{Gr}(n-k, W^*)$, $\mathsf{Gr}(1, W) \cong \mathbb{P}(W)$, $\mathsf{Gr}(n-1, W) \cong \mathbb{P}(W^*)$.*

Доказательство. В самом деле, вложение $\mathcal{U}^\perp \to W^* \otimes \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(k,W)}$ задает морфизм $\mathsf{Gr}(k, W) \to \mathsf{Gr}(n-k, W^*)$. Обратный морфизм строится аналогично. Далее, тавтологическое расслоение на $\mathsf{Gr}(1, W)$ линейно, поэтому вложение $\mathcal{U} \to W \otimes \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(1,W)}$ задает морфизм $\mathsf{Gr}(1, W) \to \mathbb{P}(W)$, а вложение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1) \to W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}$ — морфизм $\mathbb{P}(W) \to \mathsf{Gr}(1, W)$, которые очевидно взаимно обратны. Третий изоморфизм является немедленным следствием двух первых. □

Часть 6. Уравнения Плюккера

Опишем теперь идеал I_X. По определению, X — схема нулей

$$\Lambda^{k+1}\phi \in \Gamma(\mathbb{P}(\Lambda^k W), \Lambda^{k+1}\Lambda^{k-1}W \otimes \Lambda^{k+1}W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Lambda^k W)}(k+1)),$$

следовательно пучок идеалов $\mathcal{I}_X \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Lambda^k W)}$ порождается образом пространства $\Lambda^{k+1}\Lambda^{k-1}W^* \otimes \Lambda^{k+1}W^*$ в $\Gamma(\mathbb{P}(\Lambda^k W), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Lambda^k W)}(k+1)) = S^{k+1}(\Lambda^k W^*)$ (иначе говоря, X высекается гиперповерхностями степени $k+1$). Однако, на самом деле можно показать, что X высекается даже квадриками.

Предложение 6.1. *Грассманиниан $\mathsf{Gr}(k, W)$ в $\mathbb{P}(\Lambda^k W)$ является схемой нулей композиции морфизмов*

$$\psi : \Lambda^{k-1}W^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Lambda^k W)}(-1) \to W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Lambda^k W)} \to \Lambda^{k+1}W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Lambda^k W)}(1),$$

где первый морфизм совпадает с φ, а второй получается из морфизма $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Lambda^k W)}(-1) \to \Lambda^k W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Lambda^k W)}$ подкруткой и умножением на W.

Доказательство. Основой доказательства является следующий факт. Пусть $\lambda \in \Lambda^k W$. Тогда отображение умножения на λ из W в $\Lambda^{k+1}W$ имеет ранг не меньше $n-k$, причем ранг $n-k$ достигается ровно для разложимых поливекторов. В самом деле, пусть вектор w лежит в ядре умножения на λ, то есть $w \wedge \lambda = 0$. Пусть $W' = W/\mathsf{k}w$, то есть существует точная последовательность $0 \to \mathsf{k}w \to W \to W' \to 0$. Переходя к внешним степеням, получаем последовательность $0 \to \Lambda^{k-1}W' \wedge w \to \Lambda^k W \to \Lambda^k W' \to 0$ (морфизм $- \wedge w : \Lambda^{k-1}W \to \Lambda^k W$ очевидно пропускается через $\Lambda^{k-1}W'$, на котором является вложением). Таким образом имеем диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Lambda^{k-1}W' \wedge w \arrow[r] & \Lambda^k W \arrow[r] \arrow[d, "\wedge w"] & \Lambda^k W' \arrow[r] \arrow[dll, dotted] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Lambda^k W' \wedge w \arrow[r] & \Lambda^{k+1}W \arrow[r] & \Lambda^{k+1}W' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Согласно сделанным выше замечаниям ядро морфизма $\wedge w$ равно $\Lambda^{k-1}W' \wedge w$, что означает существование $\lambda' \in \Lambda^{k-1}W$, такого что $\lambda = \lambda' \wedge w$. Пользуясь этим фактом заключаем, что если $K = \mathrm{Ker}(- \wedge \lambda)$ имеет размерность k, то $\lambda \in \Lambda^k K \subset \Lambda^k W$, а больше чем k размерность быть не может.

Таким образом, размерность ядра второго морфизма в определении ψ не превосходит k. С другой стороны, как было показано раньше, размерность образа первого морфизма — не меньше чем k. Значит на схеме нулей Z_ψ обе размерности равны k, а занчит образ первого (или ядро второго морфизма на Z_ψ является расслоением ранга k, вложенным в $W \otimes \mathcal{O}_{Z_\psi}$. Это задает морфизм $Z_\psi \to \mathsf{Gr}(k, W)$, причем такой что композиция с вложением $\mathsf{Gr}(k, W) \to \mathbb{P}(\Lambda^k W)$. Иначе говоря, $Z_\psi \subset \mathsf{Gr}(k, W)$.

Наоборот, как мы видели при ограничении на $\mathsf{Gr}(k, W)$ первый из морфизмов, входящих в определение ψ, факторизуется как $\lambda^{k-1}W^* \otimes \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(k,W)}(-1) \to \mathcal{U} \to W \otimes \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(k,W)}$. С другой стороны, ясно, что композиция $\mathcal{U} \to W \otimes \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(k,W)} \to \Lambda^{k+1}W \otimes \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(k,W)}(1)$ представляется также в виде

$$\mathcal{U} \to \Lambda^{k+1}U \otimes \Lambda^k\mathcal{U}^* \to \Lambda^{k+1}W \otimes \Lambda^k\mathcal{U}^* \cong \Lambda^{k+1}W \otimes \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(k,W)}(1).$$

Но $\Lambda^{k+1}U = 0$, значит $\psi_{|\mathsf{Gr}(k,W)} = 0$, откуда следует, что морфизм $\mathsf{Gr}(k, W) \to \mathbb{P}(\Lambda^k W)$ пропускается через Z_ψ, то есть $\mathsf{Gr}(k, W) \subset Z_\psi$. Значит $\mathsf{Gr}(k, W) = Z_\psi$. $\square$

Морфизм ψ соответствует сечению расслоения $\Lambda^{k-1}W \otimes \Lambda^{k+1}W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Lambda^k W)}(2)$, то есть набору квадрик, являющихся образами отображения $\Lambda^{k-1}W^* \otimes \Lambda^{k+1}W^* \to S^2(\Lambda^2 W^*)$. Согласно определению морфизма ψ, оно задается как композиция $\Lambda^{k-1}W^* \otimes \Lambda^{k+1}W^* \to \Lambda^{k-1}W^* \otimes W^* \otimes \Lambda^k W^* \to \Lambda^k W^* \otimes \Lambda^k W^* \to S^2(\Lambda^k W^*)$. В частности, при этом отображении

$$e_{i_1 \dots i_{k-1}} \otimes e_{j_1 \dots j_{k+1}} \mapsto \sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s-1} x_{i_1 \dots i_{k-1} j_s} x_{j_1 \dots j_{s-1} j_{s+1} \dots j_{k+1}} =: Q_{i_1, \dots, i_{k-1}; j_1, \dots, j_{k+1}}(x).$$

Квадрики $Q_{i_1, \dots, i_{k-1}; j_1, \dots, j_{k+1}}$ называются **квадриками Плюккера**.

Пример 6.2. Пусть $k = 2$, $n = 4$. Тогда

$$Q_{1;2,3,4} = x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23}, \qquad Q_{2;1,3,4} = -x_{12}x_{34} - x_{23}x_{14} + x_{24}x_{13} = -Q_{1;2,3,4}$$

Аналогично $Q_{3;1,2,4} = -Q_{4;1,2,3} = Q_{1;2,3,4}$. С другой стороны, $Q_{1;1,2,3} = 0 - x_{12}x_{13} + x_{13}x_{12} = 0$. Аналогично равны нулю и все остальные квадрики. Таким образом $\mathsf{Gr}(2,4) \subset \mathbb{P}^5$ — квадрика. Кстати, любая невырожденная квадрика в $\mathbb{P}^5$ над алгебраически замкнутым полем характеристики большей двух приводится к плюккеровому виду, так что любая такая квадрика изоморфна грассманиану $\mathsf{Gr}(2,4)$.

Замечание 6.3. Легко видеть, что если $\{\, i_1, \dots, i_{k-1} \,\} \subset \{\, j_1, \dots, j_{k+1} \,\}$, то $Q_{i_1,\dots,i_{k-1};j_1,\dots,j_{k+1}} = 0$.

Пример 6.4. Пусть $k = 2$, $n = 5$. Тогда

$$Q_{1;2,3,4} = x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23},\ Q_{1;2,3,5} = x_{12}x_{35} - x_{13}x_{25} + x_{15}x_{23},\ Q_{1;2,4,5} = x_{12}x_{45} - x_{14}x_{25} + x_{15}x_{24},$$
$$Q_{1;3,4,5} = x_{13}x_{45} - x_{14}x_{35} + x_{15}x_{34}, \qquad Q_{2;3,4,5} = x_{23}x_{45} - x_{24}x_{35} + x_{25}x_{34}.$$

Остальные квадрики либо совпадают с этими, либо нулевые, т.е. $\mathsf{Gr}(2,5) \subset \mathbb{P}^9$ — пересечение пяти квадрик.

Часть 7. Локальная структура

Опишем теперь локальное строение грассманиана. Для этого рассмотрим пересечение $\mathsf{Gr}(k, W)$ с аффинной картой в $\mathbb{P}(\Lambda^k W)$, заданной неравенством $x_{12\dots k} \neq 0$.

Лемма 7.1. *Пусть V — векторное пространство, а $\mathbb{A}(V) = \operatorname{Spec} S^\bullet(V^*)$ — аффинное. Тогда*

$$\operatorname{Map}(S, \mathbb{A}(V)) = \Gamma(S, V \otimes \mathcal{O}_S).$$

Доказательство. Так как $\mathbb{A}(V)$ аффинно, $\operatorname{Map}(S, \mathbb{A}(V)) = \operatorname{Hom}_{\mathrm{alg}}(S^\bullet(V^*), A_S)$, где $A_S = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ — координатная алгебра. Так как $S(V^*)$ — свободная коммутативная алгебра, $\operatorname{Hom}_{\mathrm{alg}}(S^\bullet(V^*), A_S) = \operatorname{Hom}(V^*, A_S) = V \otimes A_S = \Gamma(S, V \otimes \mathcal{O}_S)$. $\square$

Предложение 7.2. *Пересечение $X := \mathsf{Gr}(k, W) \cap \{\, x_{12\dots k} \neq 0 \,\}$ изоморфно аффинному пространству $\mathbb{A}^{k(n-k)}$.*

Доказательство. Выберем разложение в прямую сумму $W = U_0 \oplus U_1$, так что $\dim U_0 = k$, $\dim U_1 = n-k$, где $U_1 = \{\, x_1 = \dots = x_k = 0 \,\}$, и построим морфизм $\mathbb{A}^{k(n-k)} = \operatorname{Hom}(U_0, U_1) \to \mathsf{Gr}(k, W)$. Для этого рассмотрим тавтологическое сечение $s : \mathcal{O}_{\operatorname{Hom}(U_0,U_1)} \to \operatorname{Hom}(U_0, U_1) \otimes \mathcal{O}_{\operatorname{Hom}(U_0,U_1)}$. Оно индуцирует морфизм расслоений $U_0 \otimes \mathcal{O}_{\operatorname{Hom}(U_0,U_1)} \to U_1 \otimes \mathcal{O}_{\operatorname{Hom}(U_0,U_1)}$ и далее морфизм

$$U_0 \otimes \mathcal{O}_{\operatorname{Hom}(U_0,U_1)} \xrightarrow{(1,s)^T} (U_0 \oplus U_1) \otimes \mathcal{O}_{\operatorname{Hom}(U_0,U_1)} = W \otimes \mathcal{O}_{\operatorname{Hom}(U_0,U_1)}.$$

Ясно, что ранг этого морфизма во всех точках равен k, так что он задает морфизм $\operatorname{Hom}(U_0, U_1) \to \mathsf{Gr}(k, W)$. При этом композиция этого морфизма с плюккеровым вложением задается минорами матрицы $(1, s)^T$. Первый из этих миноров равен 1, поэтому образ отображения содержится в X.

Обратно, детерминант композиции $\mathcal{U}_{|X} \to W \otimes \mathcal{O}_X \to U_0 \otimes \mathcal{O}_X$ очевидно равен $x_{12\dots k}$, поэтому она является изоморфизмом. Пользуясь им, получим морфизм $U_0 \otimes \mathcal{O}_X \cong \mathcal{U}_{|X} \to W \otimes \mathcal{O}_X \to U_1 \otimes \mathcal{O}_X$, то есть сечение расслоения $\operatorname{Hom}(U_0, U_1) \otimes \mathcal{O}_X$. Оно дает морфизм $X \to \mathbb{A}(\operatorname{Hom}(U_0, U_1)) = \mathbb{A}^{k(n-k)}$.

Построенные отображения очевидно взаимно обратны. $\square$

Поскольку множества $x_{i_1 i_2 \dots i_k} \neq 0$ покрывают все $\mathbb{P}(\Lambda^k W)$, заключаем что $\mathsf{Gr}(k, W)$ покрывается открытыми подмножествами, каждое из которых изоморфно аффинному пространству.

Часть 8. Относительный грассманиан

Точно так же как существует относительная версия проективного пространства — проективизация векторного расслоения, существует и относительная версия грассманиана.

Теорема 8.1. *Пусть E — векторное расслоение ранга n на схеме X. Для всякого $0 < k < n$ существует схема $\mathsf{Gr}_X(k, E)$, такая что*

$$\mathrm{Map}(S, \mathsf{Gr}_X(k,E)) \cong \left\{ (f, F, \varphi) \;\middle|\; \begin{array}{l} f \in \mathrm{Map}(S, X),\ F \text{ — расслоение ранга } k \text{ на } S, \\ \varphi : F \to f^*E \text{ — вложение расслоений} \end{array} \right\}$$

Тройки (f, F, φ) и (f', F', φ') эквивалентны, если $f' = f$ и существует изоморфизм $\xi : F \to F'$, т.ч. $\varphi' \circ \xi = \varphi$.

Заметим, что в случае $X = \operatorname{Spec} \mathsf{k}$ (в этом случае расслоение E — это просто векторное пространство W), отображение $f : S \to \operatorname{Spec} \mathsf{k}$ для всякой S существует и единственно, так что его можно исключить из правой части, а $f^*E \cong W \otimes \mathcal{O}_S$, поэтому $\mathsf{Gr}_{\operatorname{Spec} \mathsf{k}}(k, E) = \mathsf{Gr}(k, W)$.

Доказательство. Проделаем те же рассуждения, что и в абсолютном случае. Рассмотрим $\tilde{X} := \mathbb{P}_X(\Lambda^k E)$. Пусть $\pi : \tilde{X} \to X$ — проекция. Тавтологический морфизм $\mathcal{O}_{\tilde{X}/X}(-1) \to \pi^*\Lambda^k E$ индуцирует морфизм $\tilde{\psi} : \pi^*\Lambda^{k-1}E^* \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}/X}(-1) \to \pi^*E$, который на каждом слое совпадает с морфизмом из абсолютной ситуации. Отсюда следует, что ранг морфизма $\tilde{\psi}$ всегда не меньше k. Рассмотрим детерминанталь $Y = D_k(\tilde{\psi})$ и обозначим $p = \pi_{|Y}$. Ясно, что $\mathcal{U} = \operatorname{Im}(\tilde{\psi}_{|Y})$ — подрасслоение ранга k в $\pi^*E_{|Y} = p^*E$. Покажем, что Y — искомая схема.

В самом деле, если $g : S \to Y$ — морфизм, то $f = p \circ g$, $F = g^*\mathcal{U}$, и φ — обратный образ относительно g вложения $\mathcal{U} \to p^*E$, подходящая тройка. Обратно, для всякой тройки (f, F, φ) рассмотрим морфизм $\Lambda^k\varphi : \Lambda^k F \to f^*\Lambda^k E$. В силу универсального свойства проективизации расслоения, он индуцирует морфизм $\tilde{f} : S \to \mathbb{P}_X(\Lambda^k E)$, такой что $\pi \circ \tilde{f} = f$ и $\tilde{f}^*\mathcal{O}_{\tilde{X}/X}(-1) = \Lambda^k F$. При этом очевидно, что морфизм $\tilde{f}^*\psi : f^*\Lambda^{k-1}E^* \otimes \Lambda^k F \to f^*E$ раскладывается в композицию

$$f^*\Lambda^{k-1}E^* \otimes \Lambda^k F \xrightarrow{\Lambda^{k-1}\varphi^*} \Lambda^{k-1}F^* \otimes \Lambda^k F = F \xrightarrow{\varepsilon} f^*E$$

Отсюда видно, что $\tilde{f}^*\Lambda^{k+1}\psi = 0$, так как ψ пропускается через расслоение F ранга k, так что $\tilde{f}$ пропускается через морфизм $f : S \to \mathsf{Gr}_X(k, E)$, и что обратный образ вложения $\mathcal{U} \to p^*E$ совпадает с исходным морфизмом $\varphi : F \to f^*E$.

Взаимная обратность построенных морфизмов проверяется так же, как и в абсолютном случае. □

Заметим, что относительный грассманиан $\mathsf{Gr}_X(k, E)$ автоматически снабжен проекцией $\pi : \mathsf{Gr}_X(k, E) \to X$ и тавтологическими точными последовательностями векторных расслоений

$$0 \to \mathcal{U} \to \pi^*E \to E/\mathcal{U} \to 0, \qquad 0 \to \mathcal{U}^\perp \to \pi^*E^* \to \mathcal{U}^* \to 0.$$

Это можно увидеть либо из конструкции грассманиана, либо вывести следующим способом. Чтобы построить $\mathcal{U}$, воспользуемся теоремой 8.1. Возьмем $S = \mathsf{Gr}_X(k, E)$ и рассмотрим тождественный морфизм $S \to \mathsf{Gr}_X(k, E)$. Тогда в силу теоремы ему соответствует тройка, состоящая из морфизма $S \to X$ (это и есть π), расслоения на S (это и есть $\mathcal{U}$) и вложения $\mathcal{U} \to \pi^*E$. Остается обозначить $E/\mathcal{U} := \pi^*E/\mathcal{U}$, $\mathcal{U}^\perp = (E/\mathcal{U})^*$.

Упражнение 5. Докажите, что $\mathsf{Gr}_X(1, E) \cong \mathbb{P}_X(E)$, $\mathsf{Gr}_X(n-1, E) \cong \mathbb{P}_X(E^*)$, $\mathsf{Gr}_X(k, E) \cong \mathsf{Gr}_X(n-k, E^*)$, где n — ранг E.

Часть 9. Многообразия инцидентности

Многообразия инцидентности — это довольно широкий класс многообразий. Рассмотрим типичный пример. Пусть W — векторное пространство размерности n. Полным флагом в W называется последовательность подпространств

$$0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset U_{n-1} \subset W,$$

такая что $\dim U_i = i$.

Теорема 9.1. *Существует многообразие $\mathsf{Fl}(W)$, такое что*

$$\mathrm{Map}(S, \mathsf{Fl}(W)) = \left\{ 0 \to F_1 \to F_2 \to \cdots \to F_{n-1} \to W \otimes \mathcal{O}_S \;\middle|\; \begin{array}{l} F_i \text{ — расслоение ранга } i, \\ F_i \to F_{i+1} \text{ — вложение расслоений} \end{array} \right\}$$

Доказательство. Рассмотрим произведение грассманианов $X = \mathsf{Gr}(1,W) \times \mathsf{Gr}(2,W) \times \dots \times \mathsf{Gr}(n-1,W)$ и обозначим через $\mathcal{U}_i$ обратный образ тавтологического расслоения с $\mathsf{Gr}(i,W)$ на X. Обозначим через φ_i композицию морфизмов

$$\varphi_i : \mathcal{U}_i \to W \otimes \mathcal{O}_X \to W/\mathcal{U}_{i+1}.$$

Покажем, что $Z = Z_{\varphi_1 \oplus \varphi_2 \oplus \dots \oplus \varphi_{n-2}} = Z_{\varphi_1} \cap Z_{\varphi_2} \cap \dots \cap Z_{\varphi_{n-2}}$ — искомое многообразие. В самом деле, рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{U}_i \arrow[r] \arrow[drr, dashed] & W \otimes \mathcal{O}_Z \arrow[r] \arrow[d, equal] & W/\mathcal{U}_i \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{U}_{i+1} \arrow[r] & W \otimes \mathcal{O}_Z \arrow[r] & W/\mathcal{U}_{i+1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ясно, что пунктирный морфизм — это $(\varphi_i)_{|Z}$, что равно нулю по определению Z. Поэтому существует стрелка $\mathcal{U}_i \to \mathcal{U}_{i+1}$, делающая левый квадрат коммутативным. Таким образом на Z возникает цепочка вложений расслоений $0 \to \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2 \to \dots \to \mathcal{U}_{n-1} \to W \otimes \mathcal{O}_Z$. Если теперь $f : S \to Z$ — морфизм, применяя обратный образ получаем необходимую цепочку на S.

Обратно, пусть дано S и цепочка $0 \to F_1 \to F_2 \to \dots \to F_{n-1} \to W \otimes \mathcal{O}_S$ вложений расслоений. Каждое из вложений $F_i \to W \otimes \mathcal{O}_S$ задает морфизм $f_i : S \to \mathsf{Gr}(i,X)$, такой что $f^*\mathcal{U}_i = F_i$. Произведение этих морфизмов дает морфизм $\tilde{f} : S \to X$. При этом очевидно, что $\tilde{f}^*\varphi_i = 0$, так как морфизм $\tilde{f}^*\varphi_i$ — это композиция $F_i \to W \otimes \mathcal{O}_S \to W \otimes \mathcal{O}_S/F_{i+1}$, а первая из стрелок пропускается через F_{i+1}. Значит морфизм $\tilde{f}$ пропускается через $f : S \to Z$. $\square$

Упражнение 6. Постройте универсальную цепочку расслоений на многообразии флагов.

Упражнение 7. Постройте многообразие частичных флагов $\mathsf{Fl}(i_1, i_2, \dots, i_k; W)$ и докажите его универсальное свойство.

Упражнение 8. Докажите, что $\mathsf{Fl}(i_1, \dots, i_k; W) \cong \mathsf{Fl}(n - i_k, \dots, n - i_1; W^*)$. В частности $\mathsf{Fl}(W) \cong \mathsf{Fl}(W^*)$.

Упражнение 9. Докажите, что $\mathsf{Fl}(i_1, \dots, i_k; W) \cong \mathsf{Gr}_{\mathsf{Fl}(i_1,\dots,i_{k-1};W)}(i_k - i_{k-1}, W/\mathcal{U}_{i_{k-1}}) \cong \mathsf{Gr}_{\mathsf{Fl}(i_2,\dots,i_k;W)}(i_1, \mathcal{U}_{i_2})$.

Упражнение 10. Постройте относительное многообразие флагов в расслоении.

Вот еще один пример многообразия инцидентности.

Упражнение 11. Докажите, что расслоенное произведение $X = \mathsf{Fl}(1,2;W) \times_{\mathsf{Gr}(2,W)} \mathsf{Fl}(1,2;W)$ параметризует тройки подпространств $U_1, U_1', U_2 \subset W$, таких что $\dim U_1 = \dim U_1' = 1$, $\dim U_2 = 2$. Опишите его универсальное свойство.

Дифференциалы

Часть 10. Кэлеровы дифференциалы

Определение 10.1. Дифференцированием кольца A со значениями в A-модуле M называется гомоморфизм абелевых групп $D : A \to M$, удовлетворяющий правилу Лейбница

$$D(ab) = aD(b) + bD(a).$$

Если A — алгебра над кольцом R, то дифференцирование называется R-линейным, если $D(r) = 0$ для всех $r \in R$. Множество всех R-линейных дифференцирований $A \to M$ обозначается $\mathrm{Diff}(A/R, M)$.

Заметим, что всякое дифференцирование $\mathbb{Z}$-линейно, так как $D(1) = D(1 \cdot 1) = D(1) + D(1)$, откуда $D(1) = 0$.

Пример 10.2. Всякое k-линейное дифференцирование $D \in \mathrm{Diff}(\mathsf{k}[x]/\mathsf{k}, M)$ задается формулой $D(f) = df/dx \cdot m_0$, где $m_0 \in M$. В самом деле, пусть $m_0 = D(x)$. Тогда $D(x^2) = 2xD(x)$ и по индукции $D(x^n) = nx^{n-1}D(x)$, откуда в силу линейности вытекает приведенная формула.

Ясно, что если $f : M \to N$ — гомоморфизм A-модулей, а $D : A \to M$ — дифференцирование, то $f \circ D : A \to N$ — тоже дифференцирование. В самом деле $f(D(ab)) = f(aD(b) + bD(a)) = af(D(b)) + b(fD(a))$. В частности, если в качестве f взять умножение на элемент кольца (здесь важна коммутативность кольца!), получится что $\mathrm{Diff}(A/R, M)$ — A-модуль. Аналогично, если $g : B \to A$ — гомоморфизм R-алгебр, то $D \circ g : B \to M$ — дифференцирование кольца B.

Теорема 10.3. *Для всякой R-алгебры A существует A-модуль $\Omega_{A/R}$ и дифференцирование $d : A \to \Omega_{A/R}$, обладающее универсальным свойством — сопоставление $(f : \Omega_{A/R} \to M) \mapsto (f \circ d : A \to M)$ задает изоморфизм A-модулей*

$$\mathrm{Hom}(\Omega_{A/R}, M) \cong \mathrm{Diff}(A/R, M).$$

Доказательство. Умножение задает эпиморфизм колец $A \otimes_R A \to A$. Обозначим через I идеал, являющийся его ядром. Заметим сразу, что I является A-бимодулем и как левый A-модуль порождается элементами вида $1 \otimes a - a \otimes 1$. В самом деле, пусть $\sum a_i \otimes b_i \in I$ (то есть $\sum a_i b_i = 0$). Тогда

$$\sum a_i \otimes b_i = \sum a_i(1 \otimes b_i - b_i \otimes 1).$$

Отсюда сразу следует, что идеал I^2 порождается как левый A-модуль элементами $(1 \otimes a - a \otimes 1)(1 \otimes b - b \otimes 1) = (1 \otimes ab - a \otimes b - b \otimes a + ab \otimes 1)$.

Положим $\Omega_{A/R} := I/I^2$, а в качестве отображения d рассмотрим $d(a) = 1 \otimes a - a \otimes 1$. Во-первых, проверим, что d — дифференцирование. В самом деле

$$\begin{aligned} d(ab) - ad(b) - bd(a) &= 1 \otimes ab - ab \otimes 1 - a(1 \otimes b - b \otimes 1) - b(1 \otimes a - a \otimes 1) = \\ &= 1 \otimes ab - ab \otimes 1 - a \otimes b + ab \otimes 1 - b \otimes a + ab \otimes 1 = (1 \otimes a - a \otimes 1)(1 \otimes b - b \otimes 1) \equiv 0 \pmod{I^2}. \end{aligned}$$

Кроме того, d — R-линейно, так как $1 \otimes r - r \otimes 1 = 0$ в $A \otimes_R A$. Осталось проверить биективность соответствия.

Пусть $D : A \to M$ — дифференцирование. Рассмотрим отображение $F^D : A \otimes_R A \to M$, задаваемое формулой $a \otimes b \mapsto aD(b)$. Оно очевидно является гомоморфизмом, причем $F^D(I^2) = 0$. В самом деле,

$$F^D((1 \otimes a - a \otimes 1)(1 \otimes b - b \otimes 1)) = F^D(1 \otimes ab - a \otimes b - b \otimes a + ab \otimes 1) = D(ab) - aD(b) - bD(a) = 0.$$

Значит F^D индуцирует морфизм $f^D : I/I^2 \to M$. При этом $f^D(d(a)) = F^D(1 \otimes a - a \otimes 1) = D(a) - aD(1) = D(a)$.

Обратно, если $f : I/I^2 \to M$ — морфизм, а $D(a) = f(d(a))$, то $F^D(1 \otimes a - a \otimes 1) = D(a) = f(d(a)) = f(1 \otimes a - a \otimes 1)$, то есть $F^D = f$. $\square$

Часть 11. Вычисление

Вычислим модуль дифференциалов для кольца многочленов.

Лемма 11.1. *Пусть R — произвольное кольцо. Тогда $\Omega_{R[x_1,\ldots,x_n]/R]} \cong R[x_1,\ldots,x_n]^{\oplus n}$.*

Доказательство. Пусть $A = R[x_1,\ldots,x_n]$, тогда $A \otimes_R A = R[x'_1,\ldots,x'_n,x''_1,\ldots,x''_n]$, а морфизм умножения переводит x'_i и x''_i в x_i. Легко видеть, что идеал I порожден элементами $x'_i - x''_i$, а идеал I^2 — элементами $(x'_i - x''_i)(x'_j - x''_j)$. Рассмотрим гомоморфизм $F^D : I/I^2 \to A^n$, соответствующий дифференцированию

$$D : A \to A^n, \qquad f(x_1,\ldots,x_n) \mapsto (\partial f/\partial x_1,\ldots,\partial f/\partial x_n)$$

(он переводит образующую $x'_i - x''_i = d(x_i)$ в $e_i := (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$, где 1 стоит на i-ом месте). Обратно, рассмотрим морфизм $g : A^n \to I/I^2$, переводящий e_i в $x'_i - x''_i$. Очевидно, что они взаимно обратны. □

Замечание 11.2. Более инвариантная форма записи данного изоморфизма такова. Пусть V — свободный R-модуль, а $A = S^\bullet_R V^*$ — его симметрическая алгебра. Тогда $\Omega_{A/R} \cong V^* \otimes_R A$, причем универсальное дифференцирование $d : S^\bullet_R V^* \to V^* \otimes_R S^\bullet_R V^*$ — поляризация многочлена.

Лемма 11.3. *Если $S \subset A$ — мультипликативная система, то $\Omega_{S^{-1}A/A} = 0$.*

Доказательство. Пусть $D : S^{-1}A \to M$ — дифференцирование, такое что $D(A) = 0$. Тогда $0 = D(1) = D(s^{-1}s) = s^{-1}D(s) + sD(s^{-1}) = sD(s^{-1})$, значит $D(s^{-1}) = 0$ для всех $s \in S$, следовательно $D \equiv 0$. □

Лемма 11.4. *Пусть A и R' — алгебры над R. Тогда $\Omega_{A\otimes_R R'/R'} = \Omega_{A/R} \otimes_R R'$.*

Доказательство. По определению достаточно проверить, что $\mathrm{Diff}(A \otimes_R R'/R', M) \cong \mathrm{Diff}(A/R, M)$ (так как $\mathrm{Hom}_{A\otimes_R R'}(\Omega_{A/R} \otimes_R R', M) \cong \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/R}, M)$). Пусть $D : A \to M$ — дифференцирование. Положим тогда $D'(a \otimes r') = r'D(a)$. Ясно, что это R'-линейное дифференцирование кольца $A \otimes_R R'$. Обратно, если $D' : A \otimes_R R' \to M$ — дифференцирование, а $i : A \to A \otimes_R R'$ — естественный гомоморфизм, то $D' \circ i : A \to M$ — R-линейное дифференцирование, причем построенные соответствия взаимно обратны. □

Основной способ вычисления дифференциалов — следующая точная последовательность.

Предложение 11.5. *Пусть $B = A/J$. Тогда точна последовательность B-модулей*

$$J/J^2 \to \Omega_{A/R} \otimes_A B \to \Omega_{B/R} \to 0, \tag{1}$$

где левый морфизм индуцирован композицией $J \to A \xrightarrow{d} \Omega_{A/R} \to \Omega_{A/R} \otimes_A B$, а правый — дифференцированием $A \to B \xrightarrow{d} \Omega_{B/R}$.

Доказательство. Рассмотрим B-модуль M и применим к последовательности функтор $\mathrm{Hom}(-, M)$:

$$0 \to \mathrm{Diff}(B/R, M) \to \mathrm{Diff}(A/R, M) \to \mathrm{Hom}(J/J^2, M)$$

(мы воспользовались тем, что $\mathrm{Hom}_B(\Omega_{A/R} \otimes_A B, M) \cong \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/R}, M)$). Нам достаточно проверить ее точность для любого M. Заметим, что первый морфизм задается формулой $D \mapsto D \circ \pi$, где $\pi : A \to B$ — проекция, и в силу сюръективности π является вложением. Второй морфизм задается формулой $D \mapsto D \circ j$, где $j : J \to A$ — вложение (заметим, что если $a_1, a_2 \in J$, то $D(j(a_1a_2)) = D(a_1a_2) = a_1D(a_2)+a_2D(a_1) = 0$, так как M, будучи B-модулем, аннулируется идеалом J, значит $D \circ j$ пропускается через J^2; то же рассуждение с $a_1 \in A$, $a_2 \in J$ показывает, что $D \circ j$ — гомоморфизм B-модулей). Пусть теперь $D \circ j = 0$. Значит D индуцирует гомоморфизм абелевых групп $D' : B \to M$, такой что $D = D' \circ \pi$. Остается заметить, что D' — дифференцирование. □

Пример 11.6. Пусть $f_1,\ldots,f_m \in A = \mathsf{k}[x_1,\ldots,x_n]$ и $B = A/(f_1,\ldots,f_m)$. Найдем $\Omega_{B/\mathsf{k}}$. Воспользуемся точной последовательностью (1) и леммой 11.1. Средний член имеет вид B^n, а сюръекции $A^n \xrightarrow{f_1,\ldots,f_m} J \longrightarrow J/J^2$ показывают, что образ левого морфизма порожден элементами df_1, df_2, $\ldots$, df_m. Иначе говоря, получаем точную последовательность $B^m \xrightarrow{(\partial f_i/\partial x_j)} B^n \longrightarrow \Omega_{B/R} \longrightarrow 0$.

Есть еще одна важная последовательность — связанная с заменой скаляров.

Предложение 11.7. *Пусть $A \to B \to C$ — гомоморфизмы колец. Тогда существует точная последовательность C-модулей*

$$\Omega_{B/A} \otimes_B C \to \Omega_{C/A} \to \Omega_{C/B} \to 0 \tag{2}$$

в которой первый морфизм индуцирован дифференцированием $B \to C \xrightarrow{d} \Omega_{C/A}$, а второй — дифференцированием $C \xrightarrow{d} \Omega_{C/B}$.

Доказательство. Достаточно проверить точность последуовательности

$$0 \to \mathrm{Diff}(C/B, M) \to \mathrm{Diff}(C/A, M) \to \mathrm{Diff}(B/A, M),$$

где M — произвольный C-модуль. Первый морфизм — очевидное вложение (дифференцирования над B также являются дифференцированиями над A), а второй задается формулой $D \mapsto D \circ f$, где $f : B \to C$. Но если $D \circ f = 0$, то дифференцирование D аннулирует B, а значит является дифференцированием над B. ☐

Следствие 11.8. *Пусть B_1, B_2 — A-алгебры, а $C = B_1 \otimes_A B_2$. Тогда $\Omega_{C/A} = \Omega_{B_1/A} \otimes_A B_2 \oplus B_1 \otimes_A \Omega_{B_2/A}$.*

Доказательство. Имеем точные последовательности

$$\Omega_{B_1/A} \otimes_{B_1} C \to \Omega_{C/A} \to \Omega_{C/B_1} \to 0, \qquad \Omega_{B_2/A} \otimes_{B_2} C \to \Omega_{C/A} \to \Omega_{C/B_2} \to 0$$

и изоморфизмы $\Omega_{C/B_1} = \Omega_{B_2/A} \otimes_A B_1 = \Omega_{B_2/A} \otimes_{B_2} C$ и аналогично для Ω_{C/B_2}. Остается проверить, что композиция морфизмов $\Omega_{B_2/A} \otimes_{B_2} C \to \Omega_{C/A} \to \Omega_{C/B_1}$ — изоморфизм, что очевидно. ☐

Упражнение 12. Пусть K/k — расширение полей. Покажите, что (a) если $K = \mathsf{k}(x_1, \dots, x_n)$, то $\Omega_{K/\mathsf{k}} = K^n$; (b) если K/k — сепарабельное расширение, то $\Omega_{K/\mathsf{k}} = 0$. (c) А если K/k — несепарабельное?

Следствие 11.9. *Если A — локализация конечнопорожденной R-алгебры, то $\Omega_{A/R}$ конечно порожден.*

Доказательство. По условию $A = S^{-1}B$, где $B = R[x_1, \dots, x_n]/J$. Из (1) следует, что $\Omega_{B/R}$ — фактормодуль свободного модуля конечного ранга, то есть конечно порожден. Далее, рассмотрим цепочку $R \to B \to A$. Из (2) получаем точную последовательность $\Omega_{B/R} \otimes A \to \Omega_{A/R} \to \Omega_{A/B}$. В ней $\Omega_{A/B} = 0$, значит $\Omega_{A/R}$ — фактормодуль конечнопорожденного модуля $\Omega_{B/R} \otimes_B A$, и значит сам конечно порожден. ☐

Часть 12. Пучок дифференциалов

Пусть теперь X — схема над R. Определим пучок дифференциалов на X. Для этого для каждого аффинного подмножества $\operatorname{Spec} A = U \subset X$ рассмотрим пучок на U, соответствующий модулю $\Omega_{A/R}$, а для каждого вложения $\operatorname{Spec} B = V \subset U$ (соответствующего гомоморфизму $A \to B$) морфизм $\Omega_{A/R} \to \Omega_{B/R}$, построенный по дифференцированию $A \to B \xrightarrow{d} \Omega_{B/R}$.

Лемма 12.1. *Существует единственный квазикогерентный пучок $\Omega_{X/R}$ на X, такой что для аффинных $\operatorname{Spec} A = U \subset X$ выполнено $\Omega_{X/R}(U) = \Omega_{A/R}$, а морфизмы ограничения для аффинных вложений такие же как и выше.*

Доказательство. Прямолинейный способ состоит в том, что на каждой из аффинных карт рассмотреть квазикогерентный пучок, соответствующий модулю дифференциалов, и склеить из них квазикогерентный пучок на всем X (иначе говоря, для каждой схемной точки $x \in X$ рассмотреть модуль $\Omega_{\mathcal{O}_{X,x}/R}$ и каждому $U \subset X$ сопоставить множество всех $\{ s_x \in \Omega_{\mathcal{O}_{X,x}/R} \}_{x \in U}$, которые локально происходят из элементов модуля дифференциалов). Но мы применим другйо способ.

Предположим вначале, что схема X отделима (то есть диагональное вложение $\Delta : X \to X \times X$ является замкнутым сложением). Пусть $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{X \times X}$ — пучок идеалов диагонали. Рассмотрим пучок $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$. Заметим, что он анулируется умножением на $\mathcal{I}$, следовательно является пучком $\mathcal{O}_{X \times X}/\mathcal{I}$-модулей, то есть его можно рассматривать как пучок на диагонали. Определим пучок $\Omega_{X/R}$ равенством

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 = \Delta_* \Omega_{X/R}.$$

Проверим, что построенный пучок локально устроен как модуль дифференциалов. Если $U = \operatorname{Spec} A \subset X$, то $U \times U \subset X \times X$ и диагональное вложение соответствует морфизму умножения $A \otimes A \to A$, поэтому пучок

$\mathcal{I}$ соответствует идеалу I из теоремы 10.3. Значит пучок $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ соответствует модулю $I/I^2 = \Omega_{A/R}$, что и требовалось.

Если же схема X не является отделимой, то диагональ не замкнута, но зато локально замкнута, то есть замкнута в некотором открытом подмножестве $V \subset X \times X$. Поэтому можно проделать все те же рассуждения, что и раньше, заменив $X \times X$ на V. $\square$

Упражнение 13. Покажите, что локальные дифференцирования $d : A \to \Omega_{A/R}$ склеиваются в глобальный морфизм пучков $d : \mathcal{O}_X \to \Omega_{X/R}$. Заметьте, что он **не является морфизмом пучков $\mathcal{O}_X$-модулей!**

Лемма 12.2. $\Omega_{X/R} = \Delta^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) = \Delta^*\mathcal{I}$.

Доказательство. Первое равенство очевидно ввиду следующего общего факта. Второе получается так. Применеяя функтор Δ^* к точной последовательности $0 \to \mathcal{I}^2 \to \mathcal{I} \to \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \to 0$, получаем

$$\Delta^*(\mathcal{I}^2) \to \Delta^*\mathcal{I} \to \Delta^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \to 0.$$

Остается заметить, что локально первый морфизм соответствует морфизму $I^2 \otimes_A (A/I) \to I \otimes_A (A/I)$, который очевидно равен нулю. Значит второй морфизм — изоморфизм. $\square$

Лемма 12.3. *Пусть $i : Y \to X$ — замкнутое вложение, а $\mathcal{J}$ — пучок идеалов Y в X. Тогда функтор $i_* : \mathsf{Qcoh}(Y) \to \mathsf{Qcoh}(X)$ — эквивалентность на подкатегорию пучков, анллуируемых пучком идеалов $\mathcal{J}$. Обратный функтор — i^*.*

Доказательство. Во-первых, проверим, что $i^*i_*F \cong F$ для всякого $F \in \mathsf{Qcoh}(Y)$. Для этого заметим, что по сопряженности $\operatorname{Hom}(i^*i_*F, F) \cong \operatorname{Hom}(i_*F, i_*F)$, значит сущесвует канонический морфизм $i^*i_*F \to F$ и нам достаточно проверить, что он является изоморфизмом. Это вопрос локальный, так что можно считать, что $X = \operatorname{Spec} A$ — аффинно, $\mathcal{J}$ соответствует идеалу $J \subset A$, а $Y = \operatorname{Spec}(A/J)$. Тогда функтор i_* — это естественный функтор $\mathsf{Mod}\text{–}(A/J) \to \mathsf{Mod}\text{–}A$, а функтор i^* — это функтор $-\otimes_A(A/J) : \mathsf{Mod}\text{–}A \to \mathsf{Mod}\text{–}(A/J)$. В частности, если M — A/J-модуль, соответствующий пучку F, то пучку i^*i_*F соответствует модуль $M \otimes_A (A/J)$, а наш морфизм $M \otimes_A (A/J) \to M$ индуцирован действием A/J на M. Остается заметить, что это — изоморфизм, так как J действует на M тривиально.

Обратно, для всякого пучка G на X есть естественный морфизм $G \to i_*i^*G$, который локально соответсвует естественному морфизму $N \to N \otimes_A (A/J)$ для A-модуля N. Ясно, что он изоморфизм в точности для тех N, которые аннулируются идеалом J, так что i_* — эквивалентность на подкатегорию пучков, которые аннулируются идеалом $\mathcal{J}$. $\square$

Аналогично определяется пучок относительных дифференциалов. Пусть X — схема над S. Рассмотрим диагональ в расслоенном квадрате $\Delta : X \to X \times_S X$ и положим $\Omega_{X/S} = \Delta^*\mathcal{I}$, где $\mathcal{I}$ — пучок идеалов диагонали, если X отделима над S, а если не отделима, то аналогично заменив расслоенный квадрат на открытое подмножество, в котором диагональ замкнута. Ясно, что если $\operatorname{Spec} A \subset X$, $\operatorname{Spec} R \subset S$ — аффинные открытые подмножества, такие что $\pi(\operatorname{Spec} A) \subset \operatorname{Spec} R$, где $\pi : X \to S$ (так что A — R-алгебра), то $\Omega_{X/S}$ над $\operatorname{Spec} A$ соответствует модулю $\Omega_{A/R}$.

Ясно, что если X — схема над кольцом R, то $\Omega_{X/R} = \Omega_{X/\operatorname{Spec} R}$.

Лемма 12.4. *Пучок дифференциалов $\Omega_{X/S}$ конечно порожден. В частности, если X — локально нетерова, то $\Omega_{X/S}$ когерентен.*

Эта лемма сразу следует из 11.9.

Часть 13. Дифференциалы на проективном пространстве

Начнем с инвариантного вычисления для аффинного пространства.

Упражнение 14. Покажите, что если V — векторное пространство, то $\Omega_{\mathbb{A}(V)} \cong V^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{A}(V)}$.

Упражнение 15. Покажите, что если E — векторное расслоение на S, а $X = \mathsf{Tot}_S(E) = \operatorname{Spec}_S(S^\bullet E^*)$, то $\Omega_{X/S} \cong \pi^*E^*$, где $\pi : X \to S$ — естественная проекция.

Теорема 13.1. *Пусть W — векторное пространтсво над k размерности n. Тогда существует точная последовательность*

$$0 \to \Omega_{\mathbb{P}(W)} \to W^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)} \to 0, \qquad \text{(последовательность Эйлера)}$$

в которой правый морфизм индуцирован естественным отображением $W^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(1)$.

Доказательство. Обозначим ядро отображения $\alpha : W^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(1)$ через K (если рассматривать $\mathbb{P}(W)$ как грассманиан $\mathsf{Gr}(1, W)$, то это расслоение $\mathcal{U}^{\perp}$). Получим морфизм $\beta : K \to W^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}$. Поднимем α и β на $\mathbb{P}(W) \times \mathbb{P}(W)$ и прокомпонируем — получим морфизм

$$\varphi : p_1^*K \xrightarrow{p_1^*\beta} W^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)\times\mathbb{P}(W)} \xrightarrow{p_2^*\alpha} p_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(1).$$

Покажем, что $Z_\varphi = \Delta(\mathbb{P}(W))$. В самом деле, чтобы проверить, что $Z_\varphi \subset \Delta(\mathbb{P}(W))$ надо убедиться в том, что $p_{1|Z_\varphi} = p_{2|Z_\varphi}$. Для этого заметим, что эти отображения определяются ограничениями морфизмов $W^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)\times\mathbb{P}(W)} \to p_i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(1)$ на Z_φ. Рассмотрим коммутатиыную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & p_1^*K_{|Z_\varphi} \arrow[r, "p_1^*\beta"] \arrow[dr, "\varphi_{|Z_\varphi}"'] & W^* \otimes \mathcal{O}_{Z_\varphi} \arrow[r, "p_1^*\alpha"] \arrow[d, "p_2^*\beta"] & p_1^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(1)_{|Z_\varphi} \arrow[r] \arrow[dl, dashed] & 0 \\
& & p_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(1)_{|Z_\varphi} & &
\end{tikzcd}$$

Так как $\varphi_{|Z_\varphi} = 0$, получаем пунктирную стрелку, которая должна быть сюръективна в силу сюръективности вертикальной стрелки. Но заметим, что сюръективный морфизм локально свободных пучков одинакового ранга — изоморфизм. В самом деле, у него постоянный ранг, значит по лемме из первой лекции его ядро — локально свободно ранга ноль, значит равно нулю. Таким образом, пунктирная стрелка — изоморфизм, что и означает равенство отображений $p_{1|Z_\varphi} = p_{2|Z_\varphi}$.

Чтобы построить обратный морфизм, заметим, что при диагональном вложении $\Delta : \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(W) \times \mathbb{P}(W)$ имеем $\Delta^*\varphi = \alpha \circ \beta = 0$, значит Δ пропускается через Z_φ.

Итак, $Z_\varphi = \Delta(\mathbb{P}(W))$. Вспоминая определение схемы нулей, получаем сюръекцию $K \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1) \to \mathcal{I}$. Применяя функтор Δ^* получаем эпиморфизм $\Delta^*(K \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1)) = K(-1) \to \Delta^*\mathcal{I} = \Omega_{\mathbb{P}(W)}$. Но и $K(-1)$ и $\Omega_{\mathbb{P}(W)}$ являются локально свободными пучками ранга $n-1$ (для первого это верно по определению, а для второго следует из того, что проективное пространство покрывается аффинными пространствами, а на аффинном пространстве пучок дифференциалов локально свободен), значит этот морфизм — изоморфизм. Теперь вспоминая определение пучка K, получаем искомую точную последовательность. □

Упражнение 16. Проверьте, что для грассманиана $\mathsf{Gr}(k, W)$
(a) существует эпиморфизм $U^\perp \boxtimes U \to \mathcal{I}$, где $\mathcal{I}$ — пучок идеалов диагонали;
(b) он индуцирует изоморфизм $\Omega_{\mathsf{Gr}(k,W)} \cong \mathcal{U}^\perp \otimes \mathcal{U}$.

Упражнение 17. Пусть E — векторное расслоение на S. Проверьте, что (a) $\Omega_{\mathsf{Gr}_S(k,E)/S} \cong \mathcal{U}^\perp \otimes \mathcal{U}$;
(b) на $\mathbb{P}_S(E)$ существует точная тройка

$$0 \to \Omega_{\mathbb{P}_S(E)/S} \to \pi^*E^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_S(E)/S}(-1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}_S(E)} \to 0,$$

где $\pi : \mathbb{P}_S(E) \to S$ — проекция.

Алгебраическая геометрия - 2
16.03.2010

Гладкость

Часть 14. Регулярные кольца

Напомним вначале определение регулярных колец и обсудим их основные свойства.

Размерностью Крулля кольца A называется максимальное n, такое что существует строго возрастающая цепочка простых идеалов $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n \subset A$. Если A — целостная алгебра над полем k, а K — ее поле частных, то $\dim A = \mathrm{degtr} K/\mathsf{k}$. Кольцо называется равноразмерным размерности n, если все его неприводимые компоненты имеют размерность n.

Для нетерового равноразмерного кольца A, если $f \in A$, то $\dim A - 1 \leqslant \dim A/(f) \leqslant \dim A$, причем если f не является делителем нуля, то $\dim A/(f) = \dim A - 1$ и кольцо $A/(f)$ также является равноразмерностным.

Напомним, что локальное кольцо A с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ и полем вычетов k называется регулярным, если размерность k-векторного пространства $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ равна размерности Крулля кольца A:

$$\dim_{\mathsf{k}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim A.$$

При этом для произвольного кольца выполнено неравенство $\dim_{\mathsf{k}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \geqslant \dim A$.

Нам потребуется следующая теорема, которую мы пока доказывать не будем, так как для ее доказательства нужна гомологическая алгебра.

Теорема 14.1. *Если кольцо A регулярно, то всякая его локализация тоже регулярна.*

Также без доказательства пока оставим следующее утверждение (его можно найти в любом учебнике по коммутативной алгебре).

Теорема 14.2. *Всякое локальное регулярное кольцо целостное.*

Определение 14.3. Схема X называется регулярной (или неособой) в точке x, если локальное кольцо $\mathcal{O}_{X,x}$ регулярно. Точка, не являющаяся регулярной, называется особой. Схема X называется регулярной (неособой), если она регулярна во всех точках.

Предложение 14.4. *Множество регулярных точек схемы открыто. В частности, если схема регулярна во всех замкнутых точках, то она регулярна.*

Доказательство. Вопрос локален, так что можно считать, что $X = \operatorname{Spec} A$ аффинна. Достаточно показать, что множество особых точек замкнуто, то есть вместе с каждой точкой содержит все точки, лежащие в ее замыкании, то есть проверить, что если $A_{\mathfrak{p}}$ нерегулярно и $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$, то $A_{\mathfrak{q}}$ тоже нерегулярно. Но если $A_{\mathfrak{q}}$ регулярно, то $A_{\mathfrak{p}} = (A_{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{p}A_{\mathfrak{q}}}$ тоже регулярно в силу теоремы — противоречие. □

Таким образом регулярность схемы достаточно проверять только в замкнутых точках.

Предложение 14.5. *Всякая регулярная схема является несвязным объединением своих неприводимых компонент.*

Доказательство. Если две неприводимые компоненты пересекаются в точке, то локальное кольцо этой точки не является целостным, а значит нерегулярно. □

Часть 15. Слои пучка дифференциалов

Оказывается, регулярность характеризуется через пучок дифференциалов. Напомним, что если X — схема над k, то пучок дифференциалов $\Omega_{X/\mathsf{k}}$ характеризуется тем, что для любого открытого аффинного подмножества $\operatorname{Spec} A \subset X$ его ограничение соответствует модулю $\Omega_{A/\mathsf{k}}$.

Предложение 15.1. *Пусть A — локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ и полем вычетов $\mathsf{k} = A/\mathfrak{m}$. Если существует вложение $\mathsf{k} \subset A$, композиция которого с проекцией $A \to \mathsf{k}$ тождественна, то последовательность $0 \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \Omega_{A/\mathsf{k}} \otimes_A \mathsf{k} \to \Omega_{\mathsf{k}/\mathsf{k}} \to 0$ точна. В частности*

$$\Omega_{A/\mathsf{k}} \otimes_A \mathsf{k} \cong \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2.$$

Доказательство. Построим морфизм $\Omega_{A/\mathsf{k}} \otimes_A \mathsf{k} \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ — это то же самое, что построить дифференцирование $A \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Сейчас мы это сделаем.

Обозначим через π композицию $A \to \mathsf{k} \to A$. Это гомоморфизм кольца A в себя. Положим $\rho(x) := x - \pi(x)$. Тогда $\rho(x) \in \mathfrak{m}$ для всех $x \in A$. Заметим, что

$$\pi(xy) + \rho(xy) = xy = (\pi(x) + \rho(x))(\pi(y) + \rho(y)) = \pi(x)\pi(y) + \pi(x)\rho(y) + \pi(y)\rho(x) + \rho(x)\rho(y).$$

Замечая, что $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$ и подставляя $\pi(x) = x - \rho(x)$, $\pi(y) = y - \rho(y)$, получаем

$$\rho(xy) - x\rho(y) - y\rho(x) = -\rho(x)\rho(y) \in \mathfrak{m}^2,$$

значит композиция $\bar{\rho} : A \xrightarrow{\rho} \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ — дифференцирование. Заметим, что если $f : \Omega_{A/\mathsf{k}} \otimes_A \mathsf{k} \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ — соответствующий гомоморфизм, то $f(dx \otimes 1) = \bar{\rho}(x)$. Так как для $x \in \mathfrak{m}$ имеем $\rho(x) = x$, то композиция $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \xrightarrow{d} \Omega_{A/\mathsf{k}} \otimes_A \mathsf{k} \xrightarrow{f} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ — тождественна, откуда сразу следует точность последовательности.

Второе утверждение вытекает из $\Omega_{\mathsf{k}/\mathsf{k}} = 0$. □

Замечание 15.2. Условия предложения выполнены, если A — алгебра над k (в этом случае, по определению существует вложение $\mathsf{k} \to A$).

Конечно-порожденное расширение полей K/k называется сепарабельно порожденным, если его можно представить как последовательность чисто трансцендентного расширения K_0/k и сепарабельного алгебраического расширения K/K_0.

Упражнение 18. Покажите, что если расширение K/k сепарабельно порождено, то $\dim_K \Omega_{K/\mathsf{k}} = \operatorname{degtr} K/\mathsf{k}$.

Упражнение 19. Пусть k — совершенное поле. Покажите, что всякое конечно порожденное расширение поля k сепарабельно порождено. Указание: см. Зариский-Самюэль, теорема 31 (стр. 105).

Предложение 15.3. *Пусть X — целая схема размерности n над алгебраически замкнутым полем k. Тогда следующие свойства эквивалентны:*

(i) *для всех замкнутых точек $x \in X$ пространство $\Omega_{X/\mathsf{k}} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathsf{k}(x)$ имеет размерность n;*
(ii) *пучок $\Omega_{X/\mathsf{k}}$ локально свободен ранга n;*
(iii) *схема X регулярна.*

Замечание 15.4. На самом деле, утверждение верно над любым полем, если все поля $\mathsf{k}(x)$ сепарабельно порождены над k (например, если схема X сепарабельно порождена над k).

Доказательство. Импликация $(ii) \Rightarrow (i)$ очевидна. Докажем $(i) \Rightarrow (iii)$. Достаточно проверить, что локальное кольцо любой замкнутой точки регулярно. Пусть A — такое кольцо, $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал. Тогда $\Omega_{A/\mathsf{k}} \otimes_A \mathsf{k} \cong \mathsf{k}^n$, значит $\dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = n$, значит A регулярно.

Остается доказать $(iii) \Rightarrow (ii)$. Пусть схема X регулярна. Чтобы проверить, что $\Omega_{X/\mathsf{k}}$ локально свободен ранга $n = \dim X$, достаточно проверить, что для всякой замкнутой точки $x \in X$ слой пучка $\Omega_{X/\mathsf{k}}$ в этой точке является свободным модулем ранга n над локальным кольцом $A = \mathcal{O}_{X,x}$. Ясно, что этот модуль — $\Omega_{A/\mathsf{k}}$. Заметим про него два факта. Во-первых, если K — поле частных кольца A, то $\Omega_{A/\mathsf{k}} \otimes_A K = \Omega_{K/\mathsf{k}} = K^n$, так как поле k алгебраически замкнуто, а значит совершенно, а значит K/k сепарабельно порождено, а степень трансцендентности поля K равна размерности кольца A. Во-вторых, так как k алгебраически замкнуто, а точка x замкнута, то $\mathsf{k}(x) = \mathsf{k}$, так что $\Omega_{A/\mathsf{k}} \otimes_A \mathsf{k} = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \mathsf{k}^n$, так как X регулярна размерности n. Остается воспользоваться следующей леммой. □

Лемма 15.5. *Пусть M — конечно порожденный модуль над целостным локальным кольцом A с полем вычетов k и полем частных K. Если $\dim_K M \otimes_A K = \dim_{\mathsf{k}} M \otimes_A \mathsf{k}$, то M свободен.*

Доказательство. Пусть $\dim_{\mathsf{k}} M \otimes_A \mathsf{k} = n$. Выберем n образующих в $M \otimes_A \mathsf{k} = M/\mathfrak{m}M$ и поднимем их в M. Получим морфизм $\varphi : A^n \to M$. По лемме Накаямы он сюръективен. С другой строны, тензорно домножая на K получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} A^n \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[d] \\ K^n \arrow[r] & M \otimes_A K \end{tikzcd}$$

Так как тензорное произведение точно справа, нижняя стрелка сюръективна. Так как $\dim_K M \otimes_A K = n$, она является изоморфизмом. Наконец, так как A целостно, естественный морфизм $A \to K$ является вложением, значит левая стрелка — вложение, значит композиция стрелок $A^n \to M \otimes_A K$ — вложение, а значит и морфизм $A^n \to M$ — вложение. Значит $M \cong A^n$. $\square$

Следствие 15.6. *Замкнутое подмногообразие $X \subset \mathbb{A}^n$ коразмерности c над алгебраически замкнутым полем k, заданное идеалом $I(X) = (f_1, \dots, f_m)$, регулярно тогда и только тогда, когда ранг матрицы $J(f) := (\partial f_i / \partial x_j)$ равен c во всех замкнутых точках X.*

Доказательство. В самом деле, пусть $A := A_X = \mathsf{k}[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_m)$. Имеем точную последовательность $A^m \xrightarrow{J(f)} A^n \longrightarrow \Omega_{A/\mathsf{k}} \longrightarrow 0$. Тензорно умножая на $\mathsf{k}(x)$ для замкнутой точки $x \in X$, мы видим, что размерность $\Omega_{A/\mathsf{k}} \otimes_A \mathsf{k}(x)$ равна $n - \operatorname{rank} J(f)_x$, откуда и получаем искомое условие. $\square$

Пример 15.7. Проверим, что гиперповерхность Ферма $X = \{ x_0^n + x_1^n + \dots + x_N^n = 0 \} \subset \mathbb{P}^N$ регулярна, если $\operatorname{char} \mathsf{k}$ не делит n. Во-первых, заметим, что размерность X равна $N-1$. Далее, переходя к аффинной карте, получаем, что $I_X = (1 + y_1^n + \dots + y_N^n)$, так что $J(f) = (ny_1^{n-1}, \dots, ny_N^{n-1})$. Если $\operatorname{char} \mathsf{k}$ не делит n, то ранг этой матрицы равен нулю, только в точке $(y_1, \dots, y_N) = (0, \dots, 0)$, которая не лежит на X, значит X регулярна. Если же $p = \operatorname{char} k$ делит n, то $x_0^n + \dots + x_N^n = (x_0^{n/p} + \dots + x_N^{n/p})^p$, так что X не приведена, и тем более не регулярна.

Таким образом, условие регулярности эквивалентно тому, что мы ожидаем от гладких многообразий.

Часть 16. Регулярные последовательности и комплекс Кошуля

Пусть A — кольцо, а M — модуль над ним. Последовательность элементов $x_1, \dots, x_n$ в A называется регулярной последовательностью в M, если x_{i+1} не являятся делителем нуля в модуле $M/(x_1, \dots, x_i)$ для всех $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Иначе говоря, если для всех таких i точна последовательность

$$0 \longrightarrow M/(x_1, \dots, x_i) \xrightarrow{x_{i+1}} M/(x_1, \dots, x_i) \longrightarrow M/(x_1, \dots, x_{i+1}) \longrightarrow 0.$$

Если модуль не указан, то по умолчанию в качестве M берется A.

Пример 16.1. Последовательность $x_1, \dots, x_m$ в $\mathsf{k}[x_1, \dots, x_n]$ регулярна. А последовательность $x(x+y), y(x+y)$ в $\mathsf{k}[x,y]$ — нерегулярна, так как в $\mathsf{k}[x,y]/x(x+y)$ имеем $x \cdot y(x+y) = 0$.

Лемма 16.2. *Пусть A — равноразмерностное регулярное кольцо. Тогда последовательность $x_1, \dots, x_m$ регулярна тогда и только тогда, когда $\dim A/(x_1, \dots, x_m) = \dim A - m$.*

В одну сторону импликация очевидна — так как при факторизации по элементу, не являщемуся делителем нуля, размерность уменьшается ровно на единицу. В дпугую сторону мы пока доказывать не будем, так как проще будет это доказать в более общих условиях, то есть для произвольного Коэн-Маколеева кольца. Об этом мы поговорим в другой раз.

Пусть теперь E — векторное расслоение на равноразмерной регулярной (Коэн-Маколеевой) схеме X. Глобальное сечение $s \in \Gamma(X, E)$ называется регулярным, если $\dim Z_s = \dim X - \operatorname{rank}(E)$.

Возьмем открытое аффинное подмножество $\operatorname{Spec} A = U \subset X$, на котором расслоение E тривиализуется: $E_{|U} \cong \mathcal{O}_U^r$. При этой тривиализации сечение $s_{|U}$ соответствует последовательности $s_1, \dots, s_r$ элементов кольца A. В силу предыдущей леммы s — регулрно, тогда и только тогда, когда каждая такая последовательность регулярна.

Рассмотрим теперь внешние степени расслоения E^*. Сечение s индуцирует морфизм свертки

$$\Lambda^{k+1}E^* \longrightarrow \Lambda^k E^* \otimes E^* \xrightarrow{1\otimes s} \Lambda^k E^*,$$

который мы также обозначим s. Если локально тривиализовать E, то на базисе $e_{i_0\dots i_k}$ в $\Lambda^{k+1}E^*$ этот морфизм действует по формулам

$$e_{i_0\dots i_k} \mapsto \sum_{j=0}^{k}(-1)^j s(e_{i_j}) e_{i_0\dots i_{j-1}i_{j+1}\dots i_k}.$$

Лемма 16.3. *Пусть E — расслоение ранга r, а $s \in \Gamma(X, E)$. Тогда последовательность*

$$(\star) \qquad 0 \to \Lambda^r E^* \xrightarrow{s} \Lambda^{r-1}E^* \xrightarrow{s} \cdots \xrightarrow{s} \Lambda^2 E^* \xrightarrow{s} E^* \xrightarrow{s} \mathcal{O}_X \to 0.$$

является комплексом.

Доказательство. Надо проверить, что композиция морфизмов равна нулю. Утверждение локально, поэтому можно считать, что расслоение тривиально, и морфизмы задаются приведенными выше формулами. После этого все проверяется непосредственно. □

Комплекс $(\star)$ называется комплексом Кошуля сечения s.

Предложение 16.4. *Если сечение s регулярно, то комплекс Кошуля ацикличен везде, кроме крайнего справа члена, когомология в котором изоморфна $\mathcal{O}_{Z_s}$ — структурному пучку схемы нулей.*

Доказательство. Докажем индукцией по рангу r расслоения E. Если $r = 0$ доказывать нечего. Пусть мы доказали для ранга $r-1$. Утверждение о точности локально, так что мы можем считать, что E тривиально, а сечение s соответствует регулярной последовательности $s_1, \dots, s_r$. Обозначим через F сумму первых $r-1$ слагаемых в E, а через t соответствующее сечение F, так что $E = F \oplus \mathcal{O}$. Тогда $\Lambda^k E^* = \Lambda^k F^* \oplus \Lambda^{k-1}F^*$. Заметим, что у нас получается точная тройка комплексов Кошуля:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \Lambda^{r-1}F^* \arrow[r, "t"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "t"] & \Lambda^2 F^* \arrow[r, "t"] \arrow[d] & F^* \arrow[r, "t"] \arrow[d] & \mathcal{O} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Lambda^r E^* \arrow[r, "s"] \arrow[d, equal] & \Lambda^{r-1}E^* \arrow[r, "s"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "s"] & \Lambda^2 E^* \arrow[r, "s"] \arrow[d] & E^* \arrow[r, "s"] \arrow[d] & \mathcal{O} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Lambda^{r-1}F^* \arrow[r, "t"] \arrow[d] & \Lambda^{r-2}F^* \arrow[r, "t"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "t"] & F^* \arrow[r, "t"] \arrow[d] & \mathcal{O} \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \\
 & 0 & 0 & & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Из леммы 16.2 следует, что сечение t регулярно, а функция s_n является регулярной функцией (не делителем нуля) на схеме нулей $Z_t \subset X$. Пользуясь леммой о змее и предположением индукции получаем точную последовательность

$$0 \to H^{-1}(\Lambda^\bullet E^*, s) \to \mathcal{O}_{Z_t} \xrightarrow{s_n} \mathcal{O}_{Z_t} \to H^0(\Lambda^\bullet E^*, s) \to 0$$

(то, что морфизм посередине — это s_n также следует из леммы о змее) и зануление остальных когомологий среднего комплекса. Наконец, поскольку s_n не является делителем нуля в $\mathcal{O}_{Z_t}$, средний морфизм — вложение, так что $H^{-1} = 0$, а $H^0 = \mathcal{O}_{Z_s}$. □

Часть 17. Конормальный пучок

Пусть $Y \subset X$ — замкнутая подсхема, $i : Y \to X$ — вложение, а $\mathcal{J}$ — ее пучок идеалов.

Лемма 17.1. *Существует точная последовательность*

$$(*) \qquad \mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \to i^*\Omega_{X/\mathsf{k}} \to \Omega_{Y/\mathsf{k}} \to 0.$$

Доказательство. Очевидно, что локальные последовательности склеиваются в глобальную. □

Пучок $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ называется конормальным пучком подсхемы Y.

Упражнение 20. Покажите, что $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \cong i^*\mathcal{J}$, где i — вложение $Y \to X$.

Предложение 17.2. *Пусть $Y \subset X$ — схема нулей сечения s векторного расслоения E ранга r на X. Если сечение s регулярно, то конормальный пучок локально свободен ранга r, точнее $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \cong i^*E^*$.*

Доказательство. Из комплекса Кошуля получаем точную справа последовательность

$$\Lambda^2 E^* \xrightarrow{s} E^* \to \mathcal{J} \to 0.$$

Применяя точный справа функтор i^* получаем точную справа последовательность

$$\Lambda^2 i^*E^* \xrightarrow{i^*s} i^*E^* \to i^*\mathcal{J} \to 0.$$

Но $i^*s = 0$, так как Y — схема нулей s, поэтому $i^*\mathcal{J} \cong i^*E^*$. □

Упражнение 21. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — гиперповерхность степени d. Докажите, что $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \cong \mathcal{O}_X(-d)$.

Обратное утверждение верно локально.

Предложение 17.3. *Пусть $Y \subset X$ — замкнутая подсхема, такая что конормальный пучок локально свободен ранга $r = \dim X - \dim Y$. Тогда локально Y является схемой нулей регулярного сечения векторного расслоения.*

Доказательство. В самом деле, возьмем произвольную точку $y \in Y$. Локально в окрестности точки y мы можем тривиализовать пучок $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ и (возможно еще раз уменьшив окрестность) поднять r его базисных сечений до сечений пучка $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$, то есть получить r функций $s_1, \dots, s_r$. Ясно, что морфизм $\mathcal{O}_X^r \to \mathcal{J}$, задаваемый этими функциями сюръективен в точке y, поэтому он сюръективен и в некоторой ее окрестности. Таким образом, в этой окрестности $Y = Z_{(s_1,\dots,s_r)}$ и так как $\dim Y = \dim X - r$, то $s = (s_1, \dots, s_r)$ — регулярное сечение расслоения $\mathcal{O}_X^r$, а Y — его схема нулей. □

Если замкнутая подсхема $Y \subset X$ локально является схемой нулей регулярной последовательности, то говорят, что Y — локально полное пересечение в X.

Следствие 17.4. *Замкнутая подсхема $Y \subset X$ является локально полным пересечением тогда и только тогда, когда конормальный пучок локально свободен ранга $r = \dim X - \dim Y$.*

Упражнение 22. Докажите, что конечное множество замкнутых точек в $\mathbb{P}^n$ является локально полным пересечением.

Теперь можно сказать, когда последовательность $(*)$ точна слева.

Предложение 17.5. *Пусть X — регулярная схема над совершенным полем k, E — векторное расслоение, s — его регулярное сечение, а $Y = Z_s$ — его схема нулей. Если Y приведена, то последовательность $(*)$ точна слева.*

Доказательство. Согласно предыдущему предложению, нам надо исследовать точность слева последовательности

$$0 \to i^*E^* \to i^*\Omega_{X/\mathsf{k}} \to \Omega_{Y/\mathsf{k}} \to 0.$$

Утверждение локально, поэтому можно считать, что $X = \operatorname{Spec} A$ и $Y = \operatorname{Spec} B$ — аффинны. Морфизм $i^*E^* \to i^*\Omega_{X/\mathsf{k}}$ является морфизмом свободных B-модулей. Заметим, что он является вложением тогда и только тогда, когда он является вложением после локализации в любом минимальном простом идеале. В самом деле, в одну сторону утверждение очевидно (так как функтор локализации точен). В другую сторону это сразу следует из диаграммы

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}\varphi \arrow[r] \arrow[d] & B^r \arrow[r] \arrow[d] & B^n \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \oplus_{\mathfrak{p}}(\operatorname{Ker}\varphi \otimes_B B_{\mathfrak{p}}) \arrow[r] & \oplus_{\mathfrak{p}} B_{\mathfrak{p}}^r \arrow[r] & \oplus_{\mathfrak{p}} B_{\mathfrak{p}}^n
\end{tikzcd}$$

где суммирование берется по всем минимальным простым идеалам $\mathfrak{p}$, так как ядро морфизма $B \to \oplus_{\mathfrak{p}} B_{\mathfrak{p}}$ содержится в пересечении минимальных простых идеалов, то есть в нильрадикале B, который по условию нулевой. Так как минимальные простые идеалы соответствуют общим точкам неприводимых компонент Y, то достаточно проверять точность в этих точках. Пусть y — такая точка. Тогда $\mathcal{O}_{Y,y}$ — поле $\mathsf{k}(y)$, поэтому при ограничении в точку y последовательность принимает вид $i^*E^* \otimes \mathsf{k}(y) \to i^*\Omega_{X/\mathsf{k}} \otimes \mathsf{k}(y) \to \Omega_{\mathsf{k}(y)/\mathsf{k}} \to 0$. Так как поле k совершенно, а $\dim Y = \dim X - \mathrm{rank} E = n - r$, так как s регулярно, то $\Omega_{\mathsf{k}(y)/\mathsf{k}} = \mathsf{k}(y)^{n-r}$. Таким образом наша последовательность имеет вид $\mathsf{k}(y)^r \to \mathsf{k}(y)^n \to \mathsf{k}(y)^{n-r} \to 0$. Но она точна в середине и справа, значит она точна также и слева. □

Упражнение 23. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — гиперповерхность степени d с уравнением f. Покажите, что Ω_X является когомологией комплекса

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-d) \xrightarrow{(\partial f/\partial x_i)} \mathcal{O}_X(-1)^{n+1} \xrightarrow{(x_i)} \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

в среднем члене.

Наконец, докажем следующую теорему.

Теорема 17.6. *Пусть X — регулярная схема над полем k, а $Y \subset X$ — неособая подсхема в X коразмерности r. Тогда Y — локально полное пересечение, а последовательность $(*)$ точна.*

Доказательство. Достаточно проверить, что Y — локально полное пересечение, так как точность следует из предыдущего предложения. Локализуем в произвольной точке Y. Получим сюръекцию $f : A \to B$ регулярных локальных колец, такую что $\dim A - \dim B = r$. Если $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ — максимальные идеалы, а $I = \mathrm{Ker}\, f$, то получаем точную последовательность

$$I/\mathfrak{m}I \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \to 0$$

векторных пространств. Ядро правого морфизма имеет размерность r. Выберем r образующих и поднимем их до элементов $x_1, \ldots, x_r \in I$. Покажем, что они порождают I. В самом деле, пусть $B' = A/(x_1, \ldots, x_r)$ и пусть $\mathfrak{n}'$ — максимальный идеал в B'. Тогда ясно, что $\dim \mathfrak{n}'/(\mathfrak{n}')^2 = n - r$, так что $\dim B' \leqslant n - r = \dim B$. С другой стороны, по построению B — факторкольцо кольца B', поэтому $\dim B \leqslant \dim B'$. Значит размерности равны и кольцо B' регулярно. Но нетривиальный фактор локального регулярного кольца всегда имеет строго меньшую размерность, значит $B' = B$ и $I = (x_1, \ldots, x_r)$ — порождается r элементами. □

Коэн–Маколеевость

Часть 18. Функторы Tor и Ext

Пусть M — модуль над кольцом A. Проективной резольвентой модуля M называется комплекс $P_\bullet$ проективных A-модулей

$$\dots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to 0,$$

такой что $H_0(P_\bullet) = M$, $H_{>0}(P_\bullet) = 0$.

Лемма 18.1. *Всякий A-модуль M имеет проективную резольвенту. Если $P_\bullet$ и $Q_\bullet$ — проективные резольвенты модулей M и N, а $f : M \to N$ — морфизм A-модулей, то существует морфизм резольвент $f_\bullet : P_\bullet \to Q_\bullet$ (то есть набор морфизмов $f_i : P_i \to Q_i$, коммутирующих с дифференциалами), такой что $H_0(f_\bullet) = f$. Если $f_\bullet, g_\bullet : P_\bullet \to Q_\bullet$ — два морфизма комплексов, такие что $H_0(f_\bullet) = H_0(g_\bullet)$, то между ними существует гомотопия, то есть набор морфизмов $h_i : P_i \to Q_{i+1}$, такой что $f_i - g_i = d^Q_{i+1} \circ h_i - h_{i-1} \circ d^P_i$.*

Доказательство. Все строится по индукции, используя следующее (определяющее) свойство проективных модулей — если P проективен, а $S \to T$ — эпиморфизм, то всякий морфизм $P \to T$ поднимается до морфизма $P \to S$ (иначе говоря, функтор $\mathrm{Hom}(P, -)$ точен не только слева, но и справа), а также тот факт, что на любой модуль можно сюръективно отобразить проективный (достаточно выбрать любую систему образующих в M и соответствующий ей морфизм из свободного модуля).

Итак, построим вначале резольвенту. Если первые k-шагов уже построены, остается построить сюръекцию $P_{k+1} \to \mathrm{Ker}(P_k \to P_{k-1})$, что очевидно можно. Теперь построим морфизм резольвент. Предположим, что $f_0, \dots, f_{k-1}$ уже построены. Так как $d^Q_{k-1} \circ f_{k-1} \circ d^P_k = 0$, то $f_{k-1} \circ d^P_k$ бьет из P_k в $\mathrm{Ker}\, d^Q_{k-1} = \mathrm{Im}\, d^Q_k$, а морфизм $Q_k \to \mathrm{Im}\, d^Q_k$ сюръективен, поэтому искомый f_k существует. Наконец, построим гомотопию. Предположим, что $h_0, \dots, h_{k-1}$ уже построены. Тогда $d^Q_k \circ (f_k - g_k - h_{k-1} \circ d^P_k) = (f_{k-1} - g_{k-1} - d^Q_k \circ h_{k-1} - h_{k-2} \circ d^P_{k-1}) \circ d^P_k = 0$, и далее рассуждаем как и выше. □

Определим функторы $\mathrm{Tor}_p(M, N)$ и $\mathrm{Ext}^p(M, N)$ следующим образом. Выберем для M проективную резольвенту $P_\bullet$ и рассмотрим комплексы $P_\bullet \otimes_A N$, $\mathrm{Hom}_A(P_\bullet, N)$ и положим

$$\mathrm{Tor}^A_p(M, N) = H_p(P_\bullet \otimes_A N), \qquad \mathrm{Ext}^p_A(M, N) = H^p(\mathrm{Hom}_A(P_\bullet, N)).$$

Лемма 18.2. *Построенные A-модули не зависят от выбора резольвент и функториальны и по M и по N.*

Доказательство. Начнем с функториальности. Пусть $P_\bullet$ и $P'_\bullet$ — проективные резольвенты для M и M', а $f : M \to M'$ — морфизм. По предыдщей лемме мы можем построить морфизм комплексов $f_\bullet : P_\bullet \to P'_\bullet$, который даст морфизмы комплексов $P_\bullet \otimes_A N \to P'_\bullet \otimes_A N$ и $\mathrm{Hom}_A(P'_\bullet, N) \to \mathrm{Hom}_A(P_\bullet, N)$, а затем и морфизмы их когомологий $\mathrm{Tor}^A_p(M, N) \to \mathrm{Tor}^A_p(M', N)$ и $\mathrm{Ext}^p_A(M', N) \to \mathrm{Ext}^p_A(M, N)$. Естественно, построенный морфизм $f_\bullet$ не единственен, но если $g_\bullet$ — другой такой морфизм, то существует гомотопия $h_\bullet$, которая индуцирует гомотопию и между морфизмами комплексов $P_\bullet \otimes_A N$ и $P'_\bullet \otimes_A N$, $\mathrm{Hom}_A(P'_\bullet, N)$ и $\mathrm{Hom}_A(P_\bullet, N)$, а гомотопные морфизмы очевидно дают одно и то же отображение на когомологиях. Отсюда сразу следует функториальность — если $g : M' \to M''$ еще один морфизм, а $g_\bullet : P'_\bullet \to P''_\bullet$ — его поднятие на резольвенту, то $g_\bullet \circ f_\bullet$ является поднятием морфизма $g \circ f$, а на когомологиях индуцирует как раз композицию морфизмов.

Теперь легко убедиться и в независимости от выбора резольвент. Если $P_\bullet$ и $P'_\bullet$ — две резольвенты для модуля M, то морфизм $\mathrm{id}_M : M \to M$ поднимается до морфизмов $f_\bullet : P_\bullet \to P'_\bullet$ и $g_\bullet : P'_\bullet \to P_\bullet$, причем композиции $f_\bullet \circ g_\bullet$ и $g_\bullet \circ f_\bullet$ тоже поднимают тождественные морфизмы, и поэтому гомотопны тождественным морфизмам комплексов. Отсюда видно, что ими индуцированные морфизмы на когомологиях взаимно обратны. □

Предложение 18.3. *(i)* $\mathrm{Tor}_0^A(M,N) \cong M \otimes_A N$, $\mathrm{Ext}_A^0(M,N) \cong \mathrm{Hom}_A(M,N)$.
(ii) Если M проективен, то $\mathrm{Tor}_{>0}^A(M,N) = \mathrm{Ext}_A^{>0}(M,N) = 0$*; если N проективен, то* $\mathrm{Tor}_{>0}^A(M,N) = 0$.
(iii) Всякая точная тройка $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ дает функториальные точные последовательности

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1(M',N) \to \mathrm{Tor}_1(M,N) \to \mathrm{Tor}_1(M'',N) \to M' \otimes_A N \to M \otimes_A N \to M'' \otimes_A N \to 0,$$
$$0 \to \mathrm{Hom}(M'',N) \to \mathrm{Hom}(M,N) \to \mathrm{Hom}(M',N) \to \mathrm{Ext}^1(M'',N) \to \mathrm{Ext}^1(M,N) \to \mathrm{Ext}^1(M',N) \to \dots$$

(iv) Всякая точная тройка $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ дает функториальные точные последовательности

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1(M,N') \to \mathrm{Tor}_1(M,N) \to \mathrm{Tor}_1(M,N'') \to M \otimes_A N' \to M \otimes_A N \to M \otimes_A N'' \to 0,$$
$$0 \to \mathrm{Hom}(M,N') \to \mathrm{Hom}(M,N) \to \mathrm{Hom}(M,N'') \to \mathrm{Ext}^1(M,N') \to \mathrm{Ext}^1(M,N) \to \mathrm{Ext}^1(M,N'') \to \dots$$

(v) $\mathrm{Tor}_p(M,N) \cong \mathrm{Tor}_p(N,M)$.

Доказательство. *(i)* Утверждение сразу следует из точности справа функтора тензорного произведения и точности слева функтора Hom.

(ii) Если M проективен, то можно взять тривиальную резольвенту $P_0 = M$, $P_{>0} = 0$. Для второй части достаточно заметить, что умножение на проективный модуль сохраняет точность комплекса.

(iii) Выберем резольвенту $P''_\bullet$. Затем построим резольвенту $P_\bullet$ с морфизмом $P_\bullet \to P''_\bullet$, продолжающим морфизм $M \to M''$, так чтобы он был сюръективен (на каждом шаге достаточно добавлять к P_k прямое слагаемое, сюръективно отображающееся на $\mathrm{Ker}(P''_k \to P''_{k-1})$). Положим $P'_k = \mathrm{Ker}(P_k \to P''_k)$. Легко видеть, что P'_k будут проективны (в самом деле, сюръекция $P_k \to P''_k$ расщепляется в силу проективности P''_k, поэтому $P_k \cong P''_k \oplus P'_k$, а значит P'_k проективен). По лемме о змее $P'_\bullet$ будет резолвентой для M'. Получаем почленно расщепимую точную тройку резолвент. Домножая ее на N (или применяя функтор $\mathrm{Hom}(-,N)$), получим посленно расщепимую точную тройку комплексов. Поэтому лемма о змее дает искомую длинную точную последовательность. Функториальность легко проверяется.

(iv) Аналогично.

(v) Надо проверить, что если $Q_\bullet$ — проективная резольвента для N, то $H_p(M \otimes_A Q_\bullet) = \mathrm{Tor}_p^A(M,N)$. Пусть $N_i = \mathrm{Im}\, d_i^Q$, так что возникают точные тройки $0 \to N_{i+1} \to Q_i \to N_i \to 0$, $N_0 = N$. Применяя к ним пункт *(iv)* и пункт *(i)* получаем точные последовательности

$$0 \to \mathrm{Tor}_1(M,N_i) \to M \otimes_A N_{i+1} \to M \otimes_A Q_i \to M \otimes_A N_i \to 0$$

и изоморфизмы $\mathrm{Tor}_{i+1}^A(M,N_i) = \mathrm{Tor}_i^A(M,N_{i+1})$ для $i > 0$. В конечном итоге, получаем диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & & & & 0 \arrow[d] & & & \\
 & & & & \mathrm{Tor}_{i+1}(M,N) \arrow[d] & & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}_{i+2}(M,N) \arrow[r] & M \otimes_A N_{i+2} \arrow[r] & M \otimes_A Q_{i+1} \arrow[r] \arrow[dr] & M \otimes_A N_{i+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 & & \\
 & & & & M \otimes_A Q_i \arrow[d] \arrow[dr] & & & \\
 & & 0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}_i(M,N) \arrow[r] & M \otimes_A N_i \arrow[r] \arrow[d] & M \otimes_A Q_{i-1} \arrow[r] & M \otimes_A N_{i-1} \arrow[r] & 0 \\
 & & & & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

в которой диагональные стрелки — дифференциалы в комплексе $M \otimes_A Q_\bullet$. Из диаграммы сразу видно, что $\mathrm{Coker}(M \otimes_A Q_{i+1} \to M \otimes_A Q_i) = M \otimes_A N_i$, поэтому когомология этого комплекса в степени i равна $\mathrm{Ker}(M \otimes_A N_i \to M \otimes_A Q_{i-1}) = \mathrm{Tor}_i^A(M,N)$. □

Замечание 18.4. Действия кольца A на $\mathrm{Tor}_p(M,N)$ (или на $\mathrm{Ext}^p(M,N)$), возникающие из действий A на M и N совпадают. В самом деле, они возникают из действий A на комплексе $P_\bullet \otimes_A N$ (соотв. $\mathrm{Hom}_A(P_\bullet, N)$), индуцированных действием A на $P_\bullet$ и на N соответственно, а они совпадают.

Замечание 18.5. Аналогом утверждения *(v)* для Ext является утверждение о том, что в результате замены N на инъективную резольвенту, применении функтора $\mathrm{Hom}_A(M,-)$ и вычислении когомологий также получатся $\mathrm{Ext}^p(M,N)$.

Часть 19. Ассоциированные идеалы

Лемма 19.1. *В нетеровом кольце количество минимальных простых идеалов конечно. Иначе говоря, у нетеровой схемы число неприводимых компонент конечно.*

Доказательство. Докажем геометрическую формулировку. Рассмотрим минимальное замкнутое подмножество $Z \subset X$, которое имеет бесконечное множество неприводимых компонент (в силу нетеровости такое существует, так как иначе можно было бы построить бесконечную убывающую цепочку замкнутых подмножест). Ясно, что Z приводимо, то есть $Z = Z' \cup Z''$, при этом так как Z было минимальным, как Z', так и Z'' имеют конечное число неприводимых компонент. Значит то же верно и для Z. □

Пусть A — кольцо, M — A-модуль. Всякому элементу $0 \neq m \in M$ соответствует аннуляторный идеал

$$\mathrm{Ann}(m, M) = \mathrm{Ker}(A \xrightarrow{m} M) = \{\, a \in A \mid am = 0 \,\}.$$

Пересечение всех таких идеалов обозначается $\mathrm{Ann}(M)$ и называется аннулятором модуля. Замкнутая подсхема в $\mathrm{Spec}(A)$, соответствующая этому идеалу, называется носителем модуля M (или соответствующего ему пучка) и обозначается $\mathrm{supp}(M)$.

Простые идеалы вида $\mathrm{Ann}(m, M)$ называются ассоциированными идеалами модуля M. Множество ассоциированных идеалов модуля M обозначается $\mathsf{Ass}(M)$.

Пример 19.2.
- Если $\mathfrak{p} \subset A$ — простой идеал, то $\mathsf{Ass}(A/\mathfrak{p}) = \{\, \mathfrak{p} \,\}$.
- Пусть $A = \mathsf{k}[x, y]/(y^2, xy)$. Тогда $\mathsf{Ass}(A) = \{\, (y), (x, y) \,\}$.
- Пусть $A = \mathsf{k}[x]$, $M = \oplus_{a \in \mathsf{k}} A/(x-a)$. Тогда $\mathsf{Ass}(M) = \{\, (x-a) \,\}_{a \in \mathsf{k}}$.
- Пусть $A = \prod_{i=1}^{\infty} \mathsf{k}$. Тогда $\mathsf{Ass}(A) = \{\, \mathfrak{m}_i \,\}_{i=1}^{\infty}$, где $\mathfrak{m}_i$ — ядро проекции на i-ый сомножитель.

С геометрической точки зрения ассоциированные простые идеалы — это неприводимые компоненты носителей сечений пучка.

Лемма 19.3. *Если кольцо A нетерово, а модуль M конечно порожден, то $\mathsf{Ass}(M)$ непусто и конечно.*

Доказательство. Вначале проверим непустоту. Для этого заметим, что если $I = \mathrm{Ann}(m, M)$ макисмален по включению среди аннуляторных идеалов (а максимальные по включению аннуляторные идеалы существуют ввиду нетеровости кольца), то он простой. В самом деле, пусть $b \notin I$, $ab \in I$. Тогда $abm = 0$ по определению I, но $bm \neq 0$. Значит $a \in \mathrm{Ann}(bm, M)$. Но очевидно $I = \mathrm{Ann}(m, M) \subset \mathrm{Ann}(bm, M)$, значит в силу макисмальности I имеем $\mathrm{Ann}(bm, M) = I$, то есть $a \in I$.

Докажем теперь, что на всяком модуле M есть конечная фильтрация, присоединенные факторы которой имеют вид $A/\mathfrak{p}A$, где $\mathfrak{p}$ — простой. В самом деле, согласно предыдущему рассуждению, мы можем найти простой идеал $\mathfrak{p}$, являющийся аннулятором какого-то элемента $m \in M$. Тогда $\mathrm{Im}(A \xrightarrow{m} M) = A/\mathfrak{p}$. Рассмотрим модуль $M_1 = \mathrm{Coker}\, M/Am$. Применяя то же рассуждение, получим цепочку фактормодулей $M \to M_1 \to M_2 \to \dots$, которая в силу нетеровости A и конечной порожденности M должна стабилизироваться. Значит $M_n = 0$ для какого-то n, то есть на $M = \mathrm{Ker}(M \to M_n)$ возникает конечная фильтрация, все факторы которой имеют вид $A/\mathfrak{p}$.

Теперь покажем, что если есть точная тройка $0 \to M' \to M \xrightarrow{\pi} M'' \to 0$, то $\mathsf{Ass}(M) \subset \mathsf{Ass}(M') \cup \mathsf{Ass}(M'')$. В самом деле, пусть $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(m)$, $m \in M$. Тогда существует вложение $A/\mathfrak{p} \subset M$. Получаем коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \cap (A/\mathfrak{p}) \arrow[r] \arrow[d] & A/\mathfrak{p} \arrow[r] \arrow[d] & \pi(A/\mathfrak{p}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & M \arrow[r, "\pi"] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Если $M' \cap (A/\mathfrak{p}) = 0$, то $\pi(A/\mathfrak{p}) \cong A/\mathfrak{p}$, откуда видно, что $A/\mathfrak{p} \subset M''$, то есть $\mathfrak{p} \in \mathsf{Ass}(M'')$. Если же $M' \cap (A/\mathfrak{p}) \neq 0$, то для любого $0 \neq m' \in M' \cap (A/\mathfrak{p})$ очевидно $\mathrm{Ann}(m') = \mathfrak{p}$, то есть $\mathfrak{p} \in \mathsf{Ass}(M')$.

Применяя это рассуждение к факторам построенной фильтрации, заключаем, что множество ассоциированных идеалов заведомо содержится в множестве простых идеалов, факторы по которым составляют нашу фильтрацию, а это множество конечно. □

Замечание 19.4. При этом ясно, что множество простых идеалов, полученных данной процедурой может быть сильно больше, чем $\mathsf{Ass}(M)$. Например, если $A = M = \mathbb{Z}$, то фильтрация $p\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ дает $\{ (0), (p) \}$, в то время как $\mathsf{Ass}(\mathbb{Z}) = \{ (0) \}$.

Упражнение 24. Покажите, что $\mathsf{Ass}(M[S^{-1}]) = \{ \mathfrak{p}[S^{-1}] \mid \mathfrak{p} \in \mathsf{Ass}(M),\ \mathfrak{p} \cap S = \emptyset \}$.

Упражнение 25. Покажите, что любой минимальный простой идеал является ассоциированным идеалом кольца (остальные ассоциированные идеалы называются вложенными).

Упражнение 26. Покажите, что множество делителей нуля — это объединение всех ассоциированных идеалов кольца A.

Часть 20. Коэн–Маколеевость

Определение 20.1. Глубиной A-модуля M называется максимальная длина регулярной для M последовательности в A. Глубиной кольца A называется его глубина как A-модуля. Глубина M обозначается $\operatorname{depth}(M)$, а глубина кольца A — $\operatorname{depth}(A)$. Если кольцо A локально, будут рассматриваться только регулярные последовательности в его максимальном идеале.

Вот гомологическая переформулировка глубины.

Предложение 20.2. *Пусть M — конечно порожденный модуль над локальным кольцом A. Тогда*
$$\operatorname{depth}(M) = \min\{ l \mid \operatorname{Ext}^l(\mathsf{k}, M) \neq 0 \}.$$

Доказательство. Достаточно проверить две вещи, во-первых, что равенство нулю каждой из частей влечет зануление другой, а во-вторых, что переход от M к M/xM для любого регулярного для M элемента уменьшает правую часть на 1.

Действительно, если $\operatorname{Hom}(\mathsf{k}, M) \neq 0$, то в M есть элемент, аннулируемый идеалом $\mathfrak{m}$, поэтому не может быть никакой регулярной последовательности. С другой стороны, пусть $\operatorname{depth}(M) = 0$. Значит $\mathfrak{m} \subset \cup_{\mathfrak{p} \in \mathsf{Ass}(M)} \mathfrak{p}$, но всякий идеал, содержащийся в объединении конечного множества простых (а множество $\mathsf{Ass}(M)$ конечно), содержится в одном из них (см. Атья-Макдональдс), значит $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{p}$ для какого-то $\mathfrak{p} \in \mathsf{Ass}(M)$, но тогда $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$, то есть $\mathfrak{m} \in \mathsf{Ass}(M)$.

Наконец, пусть у нас есть элемент, скажем x, не являющийся делителем нуля в M. Положим $M' = M/xM$. Получим точную тройку
$$0 \to M \xrightarrow{x} M \to M' \to 0.$$
Применяя к ней функтор $\operatorname{Hom}(\mathsf{k}, -)$ мы видим, что $\operatorname{Ext}^l(\mathsf{k}, M') = 0$ при $l < n - 1$, и что
$$\operatorname{Ext}^{n-1}(\mathsf{k}, M') = \operatorname{Ker}(x : \operatorname{Ext}^n(\mathsf{k}, M) \to \operatorname{Ext}^n(\mathsf{k}, M)).$$
Но x действует нулем на k, а значит и на $\operatorname{Ext}^n(\mathsf{k}, M)$, так что $\operatorname{Ext}^{n-1}(\mathsf{k}, M') = \operatorname{Ext}^n(\mathsf{k}, M) \neq 0$. Таким образом, для модуля M', число из правой части равно $n - 1$. □

Следствие 20.3. *Если x регулярен для M, то* $\operatorname{depth}(M/xM) = \operatorname{depth}(M) - 1$.

Следствие 20.4. *Любой регулярный для M элемент в A достраивается до регулярной последовательности длины* $\operatorname{depth}(M)$.

Следствие 20.5. $\operatorname{depth}(A) \leqslant \dim A$.

Доказательство. Неравенство доказывается индукцией по $\operatorname{depth}(A)$. Если x не является делителем нуля, то $\operatorname{depth}(A/xA) = \operatorname{depth}(A) - 1$, $\dim(A/xA) = \dim A - 1$. □

Определение 20.6. Кольцо A называется кольцом Коэна–Маколея, если $\operatorname{depth}(A) = \dim(A)$. Схема называется схемой Коэна–Маколея, если все ее локальные кольца являются кольцами Коэна–Маколея.

Согласно 20.2, кольцо Коэн–Маколеево тогда и только тогда, когда
$$\operatorname{Ext}^l_A(\mathsf{k}, A) = 0 \qquad \text{для всех } l < \dim A.$$
В дальнейшем мы обсудим другие гомологические критерии Коэн–Маколеевости.

Лемма 20.7. *Регулярное локальное кольцо является кольцом Коэна–Маколея. В частности, регулярная схема является схемой Коэна–Маколея.*

Доказательство. Докажем индукцией по $\dim A$. Если $\dim A = 0$, то $\mathrm{depth}(A) \leqslant \dim A = 0$, так что доказывать нечего. Пусть $\dim A > 0$. Выберем ненулевой элемент в $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ и поднимем его до $x \in \mathfrak{m}$. Так как регулярное локальное кольцо целостно, то x не является делителем нуля, поэтому $\dim A/(x) = \dim A - 1$. С другой стороны, максимальный идеал кольца $A/(x)$ — это $\mathfrak{m}/x\mathfrak{m}$, а $(\mathfrak{m}/x\mathfrak{m})/(\mathfrak{m}/x\mathfrak{m})^2 = \mathfrak{m}/(x\mathfrak{m} + \mathfrak{m}^2) = (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)/(x)$, в частности его размерность на 1 меньше размерности $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Значит кольцо $A/(x)$ тоже регулярно, а значит по предположению индукции Коэн–Маколеево, а значит $\mathrm{depth}(A/(x)) = \dim(A/(x)) = \dim A - 1$. Но $\mathrm{depth}(A/(x)) = \mathrm{depth}(A) - 1$ в силу 20.3, значит $\mathrm{depth}(A) = \dim A$, то есть A — кольцо Коэна–Маколея. □

Лемма 20.8. *Если A — кольцо Коэна–Маколея, а $x_1, \dots, x_m$ — регулярная последовательность, то кольцо $A/(x_1, \dots, x_m)$ тоже Коэн–Маколеево.*

Доказательство. Достаточно проверить случай $m = 1$, а он очевиден. В самом деле, если x_1 регулярен, то $\mathrm{depth}(A/xA) = \mathrm{depth} A - 1$ в силу 20.3, а $\dim(A/(x_1)) = \dim A - 1$ по теории размерности. □

Таким образом, локально полное пересечение в Коэн–Маколеевой схеме (в частности в регулярной схеме) тоже Коэн–Маколеево.

Лемма 20.9. *Если A — локальное кольцо Коэна–Маколея, то оно не имеет вложенных ассоциированных идеалов.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{p} \subset A$ — вложенный простой, не являющийся минимальным. Тогда $A/\mathfrak{p} \subset A$, $\dim A/\mathfrak{p} < \dim A$. Ясно, что всякая регулярная последовательность в A является также регулярной и для $A/\mathfrak{p}$, значит $\mathrm{depth}(A) \leqslant \mathrm{depth}(A/\mathfrak{p})$. Но $\mathrm{depth}(A/\mathfrak{p}) \leqslant \dim(A/\mathfrak{p})$. □

Теорема 20.10. *Пусть A — локальное кольцо Коэна–Маколея. Последовательность $x_1, \dots, x_m$ регулярна тогда и только тогда, когда $\dim A/(x_1, \dots, x_m) = \dim A - m$.*

Доказательство. Если последовательность регулярна, то размерность очевидно понижается на m. Докажем обратное утверждение индукцией по m.

Рассмотрим вначале случай $m = 1$. Ясно, что если x_1 регулярен (то есть не является делителем нуля), то $\dim A/(x_1) = \dim A - 1$. Поэтому надо проверить, что если $\dim A/(x_1) = \dim A - 1$, то x_1 не делитель нуля. В самом деле, если бы x_1 был делителем нуля, то он лежал бы в ассоциированом простом идеале $\mathfrak{p}$. Но поскольку A — Коэн–Маколеево, то $\mathfrak{p}$ должен быть минимальным, а тогда $\dim A/(x_1) = \dim A$.

Теперь рассмотрим случай $m > 1$. В цепочке колец A, $A/(x_1)$, $\dots$, $A/(x_1, \dots, x_m)$ на каждом шаге размерность понижается не больше чем на 1, а в результате понижается на m. Значит она понижалась на 1 на каждом шаге. В частности $\dim A/(x_1) = \dim A - 1$, значит в силу предыдущего рассуждения x_1 не является делителем нуля в A, то есть регулярен. Кроме того, в силу следствия 20.3 имеем $\mathrm{depth}(A/(x_1)) = \mathrm{depth}(A) - 1$, значит кольцо $A/(x_1)$ тоже Коэн–Маколеево, и для последовательности $x_2, \dots, x_m$ в нем выполнено условие теоремы. Значит по индукции последовательность регулярна. □

Касательное расслоение и нормальный пучок

Часть 21. Гладкость и регулярность

Всякое комплексное многообразие локально изоморфно шару. Для алгебраических многообразий (даже для регулярных) это уже не верно, так как топология Зариского слишком слаба. Однако верно следующее.

Предложение 21.1. *Пусть A — нетерово локальное кольцо с полем вычетов k и максимальным идеалом $\mathfrak{m}$. Следующие условия эквивалентны*

(i) *A регулярно;*
(ii) *$\operatorname{gr} A \cong \mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$, $n = \dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$;*
(iii) *$\widehat{A} \cong \mathsf{k}[[x_1, \ldots, x_n]]$, $n = \dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.*

Доказательство. Эквивалентность условий (ii) и (iii) очевидна. Проверим эквивалентность (i) и (iii). Предположим, что $\dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = n$. Выбрав n образующих идеала $\mathfrak{m}$, получим сюръективный морфизм $\mathsf{k}[[x_1, \ldots, x_n]] \to \hat{A}$. Исследуем его инъективность. Пусть f — элемент в ядре. Пусть f_d — младшая однородная компонента f. Тогда очевидно $\dim A/\mathfrak{m}^k = \dim \hat{A}/\mathfrak{m}^k \leqslant \binom{k+n-1}{n} - \binom{k-d+n-1}{n}$, что является многочленом от k степени $n-1$, следовательно $\dim A \leqslant n-1$. Таким образом, если A регулярно (то есть $\dim A = n$), то f обязан быть изоморфизмом. И наоборот, если f изоморфизм, то $\dim A/\mathfrak{m}^k = \dim \hat{A}/\mathfrak{m}^k = \binom{k+n-1}{n}$, что является многочленом степени n, значит $\dim A = n$ и A регулярно. $\square$

Иначе говоря, “формальная окрестность” неособой точки изоморфна “формальной окрестности” точки в аффинном пространстве.

Упражнение 27. Выведите из предложения 21.1, что регулярное локальное кольцо целостно.

Напомним, что мы доказали, что для схемы X над алгебраически замкнутым полем k регулярность равносильна тому, что пучок $\Omega_{X/\mathsf{k}}$ локально свободен ранга $\dim X$. Ключевой момент в этом доказательстве — точность слева последовательности $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \Omega_{X/\mathsf{k}} \otimes \mathsf{k}(x) \to \Omega_{\mathsf{k}(x)/\mathsf{k}} \to 0$, которая для замкнутого поля следовала из расщепимости точной последовательности $0 \to \mathfrak{m} \to A \to \mathsf{k}(x) \to 0$. На самом деле, достаточно иметь расщепление для тройки $0 \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to A/\mathfrak{m}^2 \to \mathsf{k}(x) \to 0$.

Упражнение 28. Предположим гомоморфизм колец $A/\mathfrak{m}^2 \to A/\mathfrak{m} = \mathsf{k}(x)$ имеет сечение $\rho : \mathsf{k}(x) \to A/\mathfrak{m}^2$. Постройте морфизм $\Omega_{A/\mathsf{k}} \otimes \mathsf{k}(x) \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, расщепляющий последовательность $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \Omega_{X/\mathsf{k}} \otimes \mathsf{k}(x) \to \Omega_{\mathsf{k}(x)/\mathsf{k}} \to 0$.

Лемма 21.2. *Пусть A — алгебра над k, а $\mathsf{k}(x)/\mathsf{k}$ — сепарабельное алгебраическое расширение. Тогда морфизм $A/\mathfrak{m}^2 \to \mathsf{k}(x)$ имеет сечение.*

Доказательство. Можно считать, что $\mathsf{k}(x) \cong \mathsf{k}[t]/P(t)$, где $P(t)$ — сепарабельный многочлен. Пусть $a \in A$ — прообраз в A образ t в $\mathsf{k}(x)$. Тогда $P(a) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}$. Нам надо найти $a' \in A$, такой что $P(a') \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}^2}$. Будем искать его в виде $a' = a + \alpha$, $\alpha \in \mathfrak{m}$. По модулю $\mathfrak{m}^2$ имеем $P(a+\alpha) = P(a) + \alpha P'(a)$. Но $P'(a) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}$, так как P сепарабелен, значит $P'(a)$ обратимо в $A/\mathfrak{m}^2$, что позволяет найти α. $\square$

Упражнение 29. Пусть A — алгебра над k, а $\mathsf{k}(x)/\mathsf{k}$ — сепарабельное расширение. Покажите, что
(а) для любого n существует сечение $\mathsf{k}(x) \to A/\mathfrak{m}^n$ проекции $A/\mathfrak{m}^n \to \mathsf{k}(x)$;
(б) существует сечение $\mathsf{k}(x) \to \hat{A}$ проекции $\hat{A} \to \mathsf{k}(x)$;

Предложение 21.3. *Если X — схема над k, а x — точка на X, такая что $\mathsf{k}(x)$ сепарабельно порожденное расширение поля k, то $\Omega_{X/\mathsf{k}} \otimes \mathsf{k}(x) \cong \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.*

Схема X над полем k называется сепарабельной, если все ее поля вычетов сепарабельно порождены над k. Если поле k совершенно, то всякая k-схема сепарабельна над k.

Следствие 21.4. *Если X — сепарабельна над k, а $\Omega_{X/\mathsf{k}}$ локально свободен ранга $\dim X$, то X регулярна.*

Часть 22. Касательное расслоение

Определение 22.1. Пусть X гладкое многообразие над k. Касательным расслоением к X называется расслоение $\mathcal{T}_X$, двойственное (локально свободному) пучку $\Omega_{X/\mathsf{k}}$:

$$\mathcal{T}_X \cong \Omega^*_{X/\mathsf{k}}.$$

Пример 22.2. Пусть $X = \mathbb{P}(W)$. Тогда существует точная последовательность Эйлера

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)} \to W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(1) \to \mathcal{T}_{\mathbb{P}(W)} \to 0.$$

Пример 22.3. Пусть $X = \mathbb{P}^1$. Тогда $\mathcal{T}_X \cong \mathcal{O}_X(2)$. В самом деле, имеем точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \xrightarrow{(x,y)} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow 0.$$

Рассмотрим морфизм $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \xrightarrow{(y,-x)} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$. Очевидно, что это сюръективные морфизм, а его композиция с первым морфизмом в последовательности Эйлера равна $yx - xy = 0$, поэтому он индуцирует эпиморфизм $\mathcal{T}_{\mathbb{P}^1} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$. Но эпиморфизм локально свободных пучков одинакового ранга является изоморфизмом.

Пример 22.4. Пусть $X = \mathsf{Gr}(k, W)$. Тогда $\mathcal{T}_{\mathsf{Gr}(k,W)} \cong \mathcal{U}^* \otimes W/\mathcal{U}$.

Упражнение 30. Пусть X, Y — гладкие, $p, q : X \times Y \to X, Y$ — проекции на сомножители. Докажите, что $\mathcal{T}_{X\times Y} = p^*\mathcal{T}_X \oplus q^*\mathcal{T}_Y$.

Для особых многообразий хорошо определить понятие касательного пучка не получается (напрашивающееся определение как двойственного к дифференциалам пучка не годится — это будет объяснено чуть позже). Однако, есть хорошее понятие касательного пространства в точке.

Определение 22.5. Касательным пространством к схеме X в точке x называется векторное пространство $T_{X,x} := (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*$, где $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал точки x, а двойственность применяется над полем $\mathsf{k}(x)$.

Лемма 22.6. *Если X — гладкое многообразие, то касательное пространство в точке совпадает со слоем касательного расслоения: $T_{X,x} = \mathcal{T}_X \otimes \mathsf{k}(x)$.*

Доказательство. Очевидно следует из определения касательного расслоения и того, что слой пучка дифференциалов изоморфен $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. □

Если же многообразие X не является гладким, слой пучка $\Omega^*_{X/\mathsf{k}}$ может и не совпадать с касательным пространством.

Пример 22.7. Пусть X — кривая в $\mathbb{A}^2$ с уравнением $y^2 = x^3$ (каспидальная кубика), $X = \operatorname{Spec} \mathsf{k}[t^2, t^3]$. Пусть $\operatorname{char} \mathsf{k} \neq 2, 3$. Тогда $\Omega_{X/\mathsf{k}} = \operatorname{Coker}(\mathcal{O}_X \xrightarrow{(3x^2,2y)} \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X) = \operatorname{Coker}(\mathsf{k}[t^2, t^3] \xrightarrow{(t^4,t^3)} \mathsf{k}[t^2, t^3] \oplus \mathsf{k}[t^2, t^3])$, а $\Omega^*_{X/\mathsf{k}} = \operatorname{Ker}(\mathsf{k}[t^2, t^3] \oplus \mathsf{k}[t^2, t^3] \xrightarrow{(t^4,t^3)} \mathsf{k}[t^2, t^3]) = \operatorname{Im}(\mathsf{k}[t^2, t^3] \xrightarrow{(t^2,-t^3)} \mathsf{k}[t^2, t^3] \oplus \mathsf{k}[t^2, t^3])$, так что $\Omega^*_{X/\mathsf{k}}$ — локально свободный пучок ранга 1, а его слой в нуле одномерен. При этом легко видеть, что $\dim T_{X,0} = 2$.

Для проверки гладкости многообразия часто очень удобно следующее

Предложение 22.8. *Для всех точек $x \in X$ выполнено $\dim T_{X,x} \geqslant \dim X$. При этом, если $\dim T_{X,x} = \dim X$, то точка x неособа. В частности, если $\dim T_{X,x} = \dim X$ для всех точек $x \in X$, то X неособо.*

Доказательство. По определению касательного пространства $\dim T_{X,x} = \dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \geqslant \dim \mathcal{O}_{X,x} = \dim X$, причем равенство означает регулярность локального кольца, то есть неособость точки. □

Для вычисления касательного пространства часто удобно использовать следующее соображение.

Лемма 22.9. *Пусть X — схема над полем k, x — ее замкнутая точка, причем расширение полей $\mathsf{k}(x)/\mathsf{k}$ сепарабельно. Тогда касательное пространство $T_{X,x}$ совпадает с $\mathrm{Map}(\mathrm{Spec}(\mathsf{k}(x)[\epsilon]/\epsilon^2), X, x)$ — множеством всех отображений, переводящих $\mathrm{Spec}\,\mathsf{k}(x)$ в x.*

Доказательство. Можно считать, что $X = \mathrm{Spec}\, A$. Тогда нас интересуют морфизмы $A \to \mathsf{k}(x)[\epsilon]/\epsilon^2$, переводящие $\mathfrak{m} \subset A$ в $\mathsf{k}(x)\epsilon$. Ясно, что такие морфизмы зануляются на $\mathfrak{m}^2$ и поэтому дают $\mathsf{k}(x)$-линейное отображение $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \mathsf{k}(x)\epsilon \cong \mathsf{k}(x)$, то есть элемент в $(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^* = T_{X,x}$. Обратно, рассмотрим произвольное отображение $v : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \mathsf{k}(x) = \mathsf{k}(x)\epsilon \subset \mathsf{k}(x)[\epsilon]/\epsilon^2$, В силу леммы 21.2 имеем $A/\mathfrak{m}^2 \cong \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \oplus \mathsf{k}(x)$, что позволяет продолжить его до морфизма $A/\mathfrak{m}^2 \to \mathsf{k}(x)[\epsilon]/\epsilon^2$, который очевидно является гомоморфизмом колец, и дает морфизм $A \to \mathsf{k}(x)[\epsilon]/\epsilon^2$. □

Условия того, что схема является схемой над полем, и поле вычетов является его сепарабельным расширением существенны.

Пример 22.10. Пусть $A = \mathbb{Z}$, $\mathfrak{m} = (p)$, так что $\mathsf{k}(x) = \mathbb{F}_p$. Тогда $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \cong \mathbb{F}_p$, но единственный гомоморфизм $\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_p[\epsilon]/\epsilon^2$ имеет вид $\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_p \subset \mathbb{F}_p[\epsilon]/\epsilon^2$.

Пример 22.11. Пусть $A = \mathbb{F}_p(t)[y]$, $\mathfrak{m} = (y^p - t)$, так что $\mathsf{k}(x) = \mathbb{F}_p(y)$. Тогда $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \cong \mathbb{F}_p(y)$, но $A/\mathfrak{m}^2 = \mathbb{F}_p(t)[y]/(y^p - t)^2 \not\cong \mathbb{F}_p(y)[\epsilon]/\epsilon^2$, так как морфизм $A/\mathfrak{m}^2 \to \mathsf{k}(x)$ не имеет сечения (в $A/\mathfrak{m}^2$ нет элемента, проектирующегося в y и в p-ой степени равного t — в самом деле $(y + (y^p - t)z)^p = y^p \neq t$).

В некоторых случаях лемму 22.9 очень использовать для вычисления касательного пространства.

Пример 22.12. Пусть точка $x \in \mathbb{P}(W)$ соответствует прямой $L \subset W$. Тогда $Map(\mathsf{k}[\epsilon]/\epsilon^2, \mathbb{P}(W), x)$ — это множество классов эквивалентности линейных подрасслоений $\mathcal{L} \subset W \otimes \mathcal{O}$ на $\mathrm{Spec}\,\mathsf{k}[\epsilon]/\epsilon^2$, таких что при ограничении на $\mathrm{Spec}\,\mathsf{k}$ получается $L \subset W$. Всякое такое линейное расслоение $\mathcal{L}$ изоморфно тривиальному, то есть соответствует свободному модулю $\mathsf{k}\oplus\mathsf{k}\epsilon$, а вложение $\mathcal{L} \to W\otimes\mathcal{O}$ соответствует линейному отображению $w_0 + w_1\epsilon : \mathsf{k} \to W \oplus W\epsilon$ (на $\mathsf{k}\epsilon$ оно продолжается по линейности), причем компонента $w_0 : \mathsf{k} \to W$ должна быть естественным изоморфизмом на $L \subset W$. Таким образом, все задается одним морфизмом $w_1 : \mathsf{k} \to W$. При этом, нам надо отождествить отображения $\mathcal{L} \to W\otimes\mathcal{O}$, отличающиеся на автоморфизм $\mathcal{L}$. Но автоморфизмы $\mathcal{L}$ — это обратимые элементы кольца $\mathsf{k}[\epsilon]/\epsilon^2$, то есть элементы вида $1 + a\epsilon$. При этом $(w_0 + w_1\epsilon) : \mathsf{k} \to W \oplus W\epsilon$ меняется на $w_0 + (w_1 + aw_0)\epsilon$, то есть w_1 определен с точностью до прибавления кратного w_0, то есть однозначно определен как отображение $L \to W/L$. Значит $T_{X,x} = \mathrm{Hom}(L, W/L)$.

Упражнение 31. Проведите аналогичные рассуждения для грассманиана.

Упражнение 32. Покажите, что если X гладкое, то $\mathrm{Map}(\mathrm{Spec}(\mathsf{k}[\epsilon]/\epsilon^2), X)$ — это множество k-точек тотального пространства касательного расслоения к X, причем проекция на базу X соответствует отображению ограничения $\mathrm{Map}(\mathrm{Spec}(\mathsf{k}[\epsilon]/\epsilon^2), X) \to \mathrm{Map}(\mathrm{Spec}\,\mathsf{k}, X) = X$.

Если же схема задана уравнениями, то можно явно вычислить касательное пространство.

Упражнение 33. Пусть $X \subset \mathbb{A}^n$ задается уравнениями $f_1, \dots, f_m$, то $T_{X,x} = \mathrm{Ker}(\mathsf{k}^n \xrightarrow{(\partial f_i/\partial x_j)(x)} \mathsf{k}^m)$.

Часть 23. Нормальный пучок

Пусть $Y \subset X$ — замкнутая подсхема с пучком идеалов $\mathcal{J}$. Напомним, что пучок $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ является прямым образом на X некоторого пучка на Y, который называется конормальным пучком. Двойственный к нему пучок

$$\mathcal{N}_{X/Y} := (\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)^*$$

называется нормальным пучком подсхемы. Заметьте, что дуализация берется на Y, а не на X!

Предложение 23.1. *Для всякой гладкой подсхемы $Y \subset X$ существует точная последовательность*

$$(\star) \qquad 0 \to \mathcal{T}_Y \to \mathcal{T}_{X|Y} \to \mathcal{N}_{X/Y} \to 0,$$

а $\mathcal{N}_{X/Y}$ — расслоение ранга $r = \dim X - \dim Y$.

Доказательство. Последовательность получается дуализацией последовательности пучков дифференциалов. Так как Y неособо в неособом X, то Y — локально полное пересечение, поэтому $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ локально свободен на Y ранга r, а значит то же верно и для $\mathcal{N}_{X/Y}$. Точность справа следует из точности слева последовательности пучков дифференциалов и следующей леммы. □

Лемма 23.2. *Пусть $0 \to F \to G \to H \to 0$ — точная последовательность квазикогерентных пучков. Если H локально свободен, то двойственная последовательность $0 \to H^* \to G^* \to F^* \to 0$ также точна.*

Доказательство. Вопрос локален, поэтому можно считать, что у нас точная последовательность модулей над кольцом, причем модуль H свободен. Но тогда такая последовательность расщепляется, что дает расщепление и для двойственной последовательности, и в частности проверяет ее точность. □

Вычислять нормальный пучок проще всего, если подсхема Y является схемой нулей регулярного сечения векторного расслоения.

Лемма 23.3. *Пусть $Y \subset X$ — схема нулей регулярного сечения $s \in \Gamma(X, E)$. Тогда $\mathcal{N}_{Y/X} = E_{|Y}$.*

Доказательство. Сразу следует из изоморфизма $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \cong E^*$. □

Пример 23.4. Пусть $X \subset \mathbb{P}^2$ — кривая степени d. Тогда $\mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^2} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)_{|X}$.

Рассмотрим вложение Веронезе $\nu_d : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^d$ и найдем нормальное расслоение. При $d = 1$ искать нечего, при $d = 2$ предыдущее рассуждение показывает, что $\mathcal{N} = \nu_2^*\mathcal{O}(2) = \mathcal{O}(4)$. Рассмотрим теперь случай $d = 3$. Здесь очень полезным оказывается следующее рассуждение.

Лемма 23.5. *Пусть $f : \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(V)$ — вложение, задаваемое сюръекцией $V^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(d)$ и пусть $F : V^* \to S^dW^*$ соответствующий морфизм глобальных сечений. Тогда*

$$\mathcal{N}_{f(\mathbb{P}(W))/\mathbb{P}(V)} = \mathrm{Coker}(W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(1) \xrightarrow{\tilde{F}} V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(d)),$$

где $\tilde{F}$ — отображение двойственное к частичной поляризации F — $V^* \to S^dW^* \to W^* \otimes S^{d-1}W^*$.

Доказательство. Заметим вначале вот что. Пусть $\varphi : S \to \mathbb{P}(W)$ — отображение, задаваемое вложением $\mathcal{L} \to W \otimes \mathcal{O}_S$. Тогда композиция $f \circ \varphi : S \to \mathbb{P}(V)$ задается вложением $\mathcal{L}^d \to S^dW \otimes \mathcal{O}_S \xrightarrow{F} V \otimes \mathcal{O}_S$. Применим теперь это в случае $S = \mathrm{Spec}(\mathsf{k}[\epsilon]/\epsilon^2)$, $\mathcal{L} = \mathsf{k} + \mathsf{k}\epsilon$ и $\varphi = w_0 + w_1\epsilon$. Тогда $f \circ \varphi$ задается $S^d(w_0 + w_1\epsilon) = w_0^d + dw_0^{d-1}w_1\epsilon)$, а это означает, что отображение $df : \mathcal{T}_{\mathbb{P}(W)} \to \mathcal{T}_{\mathbb{P}(V)|\mathbb{P}(W)}$ достраивается до коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(1) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{F}"] & \mathcal{T}_{\mathbb{P}(W)} \arrow[r] \arrow[d, "df"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)} \arrow[r] & V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(d) \arrow[r] & \mathcal{T}_{\mathbb{P}(V)|\mathbb{P}(W)} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Применяя ($\star$) и лемму о змее, получаем искомое утверждение. □

Итак, пусть $d = 3$. Тогда $F = (x^3, x^2y, xy^2, y^3)$, откуда получаем точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(1)^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} 3x^2, 2xy, y^2, 0 \\ 0, x^2, 2xy, 3y^2 \end{pmatrix}^T} \mathcal{O}(3)^4 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow 0.$$

Покажем, что $\mathcal{N} = \mathcal{O}(5)^2$. Для этого рассмотрим морфизм

$$\mathcal{O}(3)^4 \xrightarrow{\begin{pmatrix} x^2, -2xy, y^2, 0 \\ 0, x^2, -2xy, y^2 \end{pmatrix}} \mathcal{O}(5)^2.$$

Легко видеть, что он сюръективен (среди его миноров есть и x^4 и y^4), а его композиция с первым морфизмом в точной последовательности равна нулю. Поэтому он индуцирует эпиморфизм $\mathcal{N} \to \mathcal{O}(5)^2$, который обязан быть изоморфизмом.

Упражнение 34. Докажите, что для произвольного d выполнено $\mathcal{N}_{\nu_d(\mathbb{P}^1)/\mathbb{P}^d} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d+2)^{d-1}$.

Упражнение 35. Докажите, что $\mathcal{N}_{\nu_2(\mathbb{P}^2)/\mathbb{P}^5} \cong S^2\mathcal{T}_{\mathbb{P}^2}$.

Найдем теперь нормальное расслоение к грассманиану. Рассмотрим вначале $\mathsf{Gr}(2,W) \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 W)$. Заметим, что вложение в проективное пространство задается так: надо взять естественное вложение $\mathcal{U} \subset W \otimes \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(2,W)}$ и рассмотреть его внешний квадрат — $\Lambda^2\mathcal{U} \subset \Lambda^2 W \otimes \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(2,W)}$. Соответственно, точная последовательность ($\star$) в этом случае имеет вид

$$0 \to \mathcal{U}^* \otimes W/\mathcal{U} \to \Lambda^2\mathcal{U}^* \otimes \Lambda^2 W/\Lambda^2\mathcal{U} \to \mathcal{N} \to 0.$$

Подкручивая ее на $\Lambda^2\mathcal{U}$ получаем последовательность

$$0 \to \mathcal{U} \otimes W/\mathcal{U} \to \Lambda^2 W/\Lambda^2\mathcal{U} \to \mathcal{N} \otimes \Lambda^2\mathcal{U} \to 0.$$

Заметим теперь следующее. Точную последовательность $0 \to \mathcal{U} \to W \otimes \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(2,W)} \to W/\mathcal{U} \to 0$ можно рассматривать как фильтрацию длины 2 на расслоении $W \otimes \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(2,W)}$ с факторами $\mathcal{U}$ и $W/\mathcal{U}$.

Лемма 23.6. *Если на пучке B задана фильтрация длины 2 с факторами A и C, то на пучке $\Lambda^k B$ существует фильтрация длины $k+1$ с факторами $\Lambda^i A \otimes \Lambda^{k-i} C$.*

Доказательство. Для каждого i обозначим через F_i образ морфизма $\Lambda^i A \otimes \Lambda^{k-i} B \to \Lambda^i B \otimes \Lambda^{k-i} B \to \Lambda^k B$. Ясно, что $F_k \subset F_{k-1} \subset \dots \subset F_1 \subset F_0 = \Lambda^k B$ — фильтрация. С другой стороны, обозначим через F'_i ядро морфизма $\Lambda^k B \to \Lambda^{i-1} B \otimes \Lambda^{k-i+1} B \to \Lambda^{i-1} B \otimes \Lambda^{k-i+1} C$. Тогда $F'_k \subset F'_{k-1} \subset \dots \subset F'_1 \subset F'_0 = \Lambda^k B$ — еще одна фильтрация. Легко видеть, что композиция $\Lambda^i A \otimes \Lambda^{k-i} B \to \Lambda^k B \to \Lambda^{i-1} B \otimes \Lambda^{k-i+1} C$ равна нулю (откуда следует, что $F_i \subset F'_i$), и что композиция $\Lambda^i A \otimes \Lambda^{k-i} B \to \Lambda^k B \to \Lambda^i B \otimes \Lambda^{k-i} C$ раскладывается также в композицию $\Lambda^i A \otimes \Lambda^{k-i} B \to \Lambda^i A \otimes \Lambda^{k-i} C \to \Lambda^i B \otimes \Lambda^{k-i} C$, где первый морфизм — эпиморфизм, а второй — мономорфизм (откуда следует, что $F_i/F'_{i-1} = \Lambda^i A \otimes \Lambda^{k-i} C$). Таким образом, остается проверить, что $F_i = F'_i$, что является локальным утверждением и проверяется, например, выбором локального расщепления последовательности $0 \to A \to B \to C \to 0$. $\square$

Упражнение 36. Докажите аналогичное утверждение для симметрических степеней.

Применяя лемму к точной последовательности $0 \to \mathcal{U} \to W \otimes \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(2,W)} \to W/\mathcal{U} \to 0$, получаем фильтрацию $F_2 \subset F_1 \subset F_0 = \Lambda^2 W \otimes \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(2,W)}$ с $F_2 \cong \Lambda^2\mathcal{U}$, $F_1/F_2 \cong \mathcal{U} \otimes W/\mathcal{U}$, $F_0/F_1 \cong \Lambda^2(W/\mathcal{U})$.

Упражнение 37. Покажите, что подкрутка на $\Lambda^2\mathcal{U}$ морфизма $\mathcal{T}_{\mathsf{Gr}(2,W)} \to \mathcal{T}_{\mathbb{P}(\Lambda^2 W)|\mathsf{Gr}(2,W)}$ совпадает с морфизмом $F_1/F_2 \to F_0/F_2$.

Значит $\mathcal{N}_{\mathsf{Gr}(2,W)/\mathbb{P}(\Lambda^2 W)} \otimes \Lambda^2\mathcal{U} \cong F_0/F_1 \cong \Lambda^2(W\mathcal{U})$, откуда получаем $\mathcal{N}_{\mathsf{Gr}(2,W)/\mathbb{P}(\Lambda^2 W)} \cong \Lambda^2(W\mathcal{U}) \otimes \Lambda^2\mathcal{U}^*$.

Упражнение 38. Докажите, что на расслоении $\mathcal{N}_{\mathsf{Gr}(k,W)/\mathbb{P}(\Lambda^k W)}$ существует фильтрация длины $k-1$ с факторами $\Lambda^i(W/\mathcal{U}) \otimes \Lambda^i\mathcal{U}^*$, $2 \leqslant i \leqslant k$.

Упражнение 39. Докажите, что $\mathcal{N}_{\mathbb{P}(U)\times\mathbb{P}(W)/\mathbb{P}(U\otimes W)} \cong \mathcal{T}_{\mathbb{P}(U)} \boxtimes \mathcal{T}_{\mathbb{P}(W)}$.

Упражнение 40. Пусть X — гладкое многообразие, а $\Delta : X \to X \times X$ — диагональ. Докажите, что $\mathcal{N}_{\Delta(X)/X\times X} \cong \mathcal{T}_X$.

Упражнение 41. Пусть $Z \subset Y \subset X$ — гладкие многообразия. Постройте точную последовательность

$$0 \to \mathcal{N}_{Y/Z} \to \mathcal{N}_{X/Z} \to \mathcal{N}_{X/Y|Z} \to 0.$$

Параметризация семейств подмногообразий

Часть 24. Пространства отображений

В дифференциальной геометрии пространства, параметризующие подмногообразия или отображения многообразий, как правило являются огромными функциональными пространствами, то есть являются объектами совсем другой категории. В алгебраической геометрии, напротив, эти пространства также являются алгебраическими многообразиями (или очень к ним близки).

Рассмотрим, например, пространство отображений $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$. Чтобы задать такое отображение, надо задать вложение расслоений $\mathcal{O}(-d) \to \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$.

Лемма 24.1. *Вложение расслоений $\mathcal{O}(-d) \to \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$ задается парой однородных многочленов степени d от двух переменных, не имеющих общих корней.*

Доказательство. Так как $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(-d), \mathcal{O}) = \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(d))$, то всякий морфизм $\mathcal{O}(-d) \to \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$ задается парой однородных многочленов (f, g) степени d. Он является вложением расслоений, если для каждой точки $P \in \mathbb{P}^1$ матрица $(f(P), g(P))$ имеет ранг 1, то есть $f(P)$ и $g(P)$ не обращаются в нуль одновременно, то есть f и g не имеют общих корней. $\square$

Так как два вложения расслоений задают одно и то же отображение, если они отличаются на автоморфизм, а $\mathrm{Aut}(\mathcal{O}(-d)) = \mathsf{k}^*$, то отображение задается парой многочленов с точностью до умножения на общую ненулевую константу.

Лемма 24.2. *Имеем* $\mathrm{Map}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^1) = \bigsqcup_{d=0}^{\infty} \mathrm{Map}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^1)$*, а* $\mathrm{Map}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^1)$ *— открытое подмножество в* $\mathbb{P}^{2d+1}(\mathsf{k})$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{Map}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^1) \subset \mathrm{Map}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^1)$ — множество таких отображений $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$, для которых $f^*\mathcal{O}(-1) = \mathcal{O}(-d)$. Такие отображения задаются парой многочленов (f, g) степени d без общих множителей с точностью до умножения на константу, то есть подмножеством в $(\mathsf{k}^{d+1} \oplus \mathsf{k}^{d+1})/\mathsf{k}^* = \mathbb{P}^{2d+1}(\mathsf{k})$. Осталось понять, как можно записать условие отсутствия общих множителей. Но это хорошо известно — если $f = a_0x^d + a_1x^{d-1}y + \dots + a_{d-1}xy^{d-1} + a_dy^d$, $g = b_0x^d + b_1x^{d-1}y + \dots + b_{d-1}xy^{d-1} + b_dy^d$, то наличие общего корня равносильно занулению результанта $\mathsf{Res}(f, g)$, который является однородным многочленом степени $2d$ от a_i и b_j, то есть множество пар (f, g), имеющих общий корень — это гиперповерхность степени $2d$ в $\mathbb{P}^{2d+1}$, а $\mathrm{Map}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^1)$ — множество k-точек в ее дополнении. $\square$

Упражнение 42. Рассмотрим отображение $\mathbb{P}^{2d-1} \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^{2d+1}$, $((a_0 : \dots : a_{d-1} : b_0 : \dots : b_{d-1}), (u : v)) \mapsto (a_0u : a_1u + a_0v : \dots : a_{d-1}u + a_{d-2}v : a_{d-1}u : b_0u : b_1u + b_0v : \dots : b_{d-1}u + b_{d-2}v : b_{d-1}u)$. Покажите, что его образ совпадает с гиперповерхностью $\mathsf{Res}(f, g) = 0$ и задает изоморфизм открытого подмножества в $\mathbb{P}^{2d-1} \times \mathbb{P}^1$ и в этой гиперповерхности.

Таким образом, мы видим, что множество отображений является множеством k-точек алгебраического многообразия. Эта ситуация совершенно типична.

Упражнение 43. Докажите, что $\mathrm{Map}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^n) = \bigsqcup_{d=0}^{\infty} \mathrm{Map}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^n)$, $\mathrm{Map}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^n)$ — открытое подмножество в $\mathbb{P}^{nd+n+d}(\mathsf{k})$.

Часть 25. Прямые

Прямой в $\mathbb{P}^n$ называется подмногообразие, изоморфное образу отображения $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n$ степени 1.

Лемма 25.1. *Множество прямых в проективном пространстве $\mathbb{P}(W)$ — это $\mathsf{Gr}(2, W)(\mathsf{k})$.*

Доказательство. Пусть $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}(W)$ — отображение степени 1, а $W^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ — соответствующий эпиморфизм. Переходя к глобальным сечениям получаем морфизм $W^* \to \mathsf{k}^2$, который должен быть сюръективным, так как иначе исходный морфизм раскладывался бы в композицию $W^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ и не мог бы быть сюръективен. А такой морфизм дает k-точку грассманиана. Причем замена f на другой морфизм с тем же образом равносильна замене базиса в k^2, то есть не влияет на полученную k-точку грассманиана.

Обратно, k-точка грассманиана — это сюръекция $W^* \to \mathsf{k}^2$. Отождествляя k^2 с U^*, $\dim U = 2$, получаем на $\mathbb{P}(U)$ морфизм $W^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)} \to U^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(1)$, то есть прямую в $\mathbb{P}(W)$. □

Пусть теперь $X \subset \mathbb{P}(W)$ — замкнутая подсхема. Прямая на X — это прямая в $\mathbb{P}(W)$, лежащая в X.

Лемма 25.2. *Множество прямых на X — это множество k-точек замкнутой подсхемы в $\mathsf{Gr}(2, W)(\mathsf{k})$.*

Доказательство. Пусть X задается уравнениями $f_1, \dots, f_m$ степеней $d_1, \dots, d_m$ соответственно, то есть $f_i \in S^{d_i} W^*$. Сюръекция $W^* \otimes \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(2,W)} \to \mathcal{U}^*$ дает сюръекцию $S^d W^* \otimes \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(2,W)} \to S^d \mathcal{U}^*$, что позволяет рассматривать f_i как глобальное сечение расслоения $S^{d_i}\mathcal{U}^*$. Рассмотрим схему нулей Z_s сечения $s = (f_1, \dots, f_m)$ расслоения $S^{d_1}\mathcal{U}^* \oplus \dots \oplus S^{d_m}\mathcal{U}^*$ на $\mathsf{Gr}(2, W)$. Пусть x — k-точка грассманиана $\mathsf{Gr}(2, W)$, то есть сюръекция $W^* \to U^*$, $\dim U = 2$. Точка $x \in \mathsf{Gr}(2, W)$ лежит в Z_s, если образ каждого из f_i относительно морфизма $S^d W^* \to S^d U^*$ равен нулю. Но ясно, что этот образ — в точности ограничение f_i на нашу прямую — $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(W)$. Поэтому обращение в нуль этих образов равносильно обращению в нуль $s_{|\mathbb{P}(U)}$, то есть как раз тому, что $\mathbb{P}(U) \subset Z_s$ (по универсальному свойству схемы нулей). □

Аналогично, m-мерной плоскостью в $\mathbb{P}^n$ называется подмногообразие, изоморфное образу отображения $\mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^n$ степени 1.

Упражнение 44. Докажите, что множество m-мерных плоскостей на подсхеме $X \subset \mathbb{P}(W)$ — это множество k-точек замкнутой подсхемы в $\mathsf{Gr}(m + 1, W)(\mathsf{k})$.

Часть 26. Коники

Коникой в $\mathbb{P}^2$ называется кривая, задаваемая уравнением степени 2.

Лемма 26.1. *Пусть $\operatorname{char} \mathsf{k} \neq 2$, $C \subset \mathbb{P}^2$ — коника. Тогда*

- *или C — гладкая кривая;*
- *или C — объединение двух прямых (возможно определенных над квадратичным расширением поля k), пересекающихся в одной точке;*
- *или C — прямая с неприведенной структурой.*

Доказательство. Уравнение C — квадратичная форма на трехмерном пространстве. Покажем, что невырожденность формы равносильна гладкости кривой. В самом деле, производные уравнения — это линейные формы, являющиеся строками матрицы квадратично формы, поэтому наличие у них общего нетривиального нуля равносильно тому, что ядро матрицы содержит нетривиальный вектор, то есть вырожденности формы.

Пусть теперь квадратичная форма вырождена. Если ее ядро одномерно, то возникающая на факторе квадратичная форма приводится к виду $x^2 - \lambda y^2$. Переходя в случае необходимости к $\mathsf{k}(\sqrt{\lambda})$, можно считать, что $\sqrt{\lambda} \in \mathsf{k}$. Тогда этот многочлен раскладывается в произведение $(x - \sqrt{\lambda} y)(x + \sqrt{\lambda} y)$, а его схема нулей является объединением двух прямых.

Если же ядро формы двумерно, то форма имеет вид f^2, где f — многочлен степени 1, значит коника является прямой с неприведенной структурой. □

Обозначим линейное расслоение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)_{|C}$ на конике C через $\mathcal{L}_C$.

Упражнение 45. Покажите, что если C — гладкая коника и $C(\mathsf{k}) \neq \emptyset$, то $C \cong \mathbb{P}^1$, а $\mathcal{L}_C \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$.

Упражнение 46. Классифицируйте квадрики любой размерности над полем нечетной характеристики.

Лемма 26.2. *Если C — коника, то $\Gamma(C, \mathcal{L}_C) = \mathsf{k}^3$.*

Доказательство. Если C — гладкая, то $\Gamma(C, \mathcal{L}_C) = \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)) = \mathsf{k}^3$. Если $C = L_1 \sqcup L_2$, то возникает точная последовательность $0 \to \mathcal{O}_{L_1}(-1) \to \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_{L_2} \to 0$, откуда $\dim \Gamma(C, \mathcal{L}_C) \leqslant 3$. С другой стороны, морфизм $\Gamma(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)) \to \Gamma(C, \mathcal{L}_C)$ очевидно инъективен, значит $\dim \Gamma(C, \mathcal{L}_C) = 3$. Наконец, если C — двойная прямая L, то есть точная последовательность $0 \to \mathcal{O}_L(-1) \to \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_L \to 0$, и остается повторить те же аргументы. $\square$

Замечание 26.3. Вообще-то, равенство $\Gamma(C, \mathcal{L}_C) = \mathsf{k}^3$ элементарно доказывается из общих свойств когомологий когерентных пучков и зануления $H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2))$.

Упражнение 47. Проверьте, что $\Gamma(C, \mathcal{L}_C^d) = \mathsf{k}^{2d+1}$ для любого $d > 0$.

Коникой в $\mathbb{P}^n$ называется подсхема C, изоморфная плоской конике, так что $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)_{|C} \cong \mathcal{L}_C$.

Следствие 26.4. *Если $C \subset \mathbb{P}(W)$ — коника, то найдется единственная плоскость $\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}(W)$, т.ч. $C \subset \mathbb{P}^2$.*

Доказательство. Вложение $C \to \mathbb{P}(W)$ задается морфизмом $W^* \otimes \mathcal{O}_C \to \mathcal{L}_C$. Ясно, что вложение в $\mathbb{P}(W)$ пропускается через вложение в $\mathbb{P}(U)$, $U \subset W$, тогда и только тогда, когда морфизм $W^* \otimes \mathcal{O}_X \to L_C$ пропускается через $U^* \otimes \mathcal{O}_C$. Ясно, что $\dim U$ не может быть равно 2, так как иначе вложение $C \to \mathbb{P}(W)$ пропускалось бы через вложение $C \to \mathbb{P}^1$, что невозможно. Значит морфизм $W^* \to \Gamma(C, \mathcal{L}_C) = \mathsf{k}^3$ сюръективен (иначе мы могли бы взять в качестве U^* образ этого морфизма), значит единственная возможность выбрать U с $\dim U = 3$ — это взять в качестве U^* образ. $\square$

Следствие 26.5. *Всякая коника в $\mathbb{P}^n$ — это пересечение $\mathbb{P}^2$ и квадрики.*

Если мы хотим описать множество всех коник в $\mathbb{P}(W)$ — первое, что можно сделать — это рассмотреть множество всех пар плоскость-квадрика, то есть $\mathsf{Gr}(3, W) \times \mathbb{P}(S^2 W^*)$. Однако, это не годится, так как квадрика определена коникой неоднозначно, то есть разным квадрикам могут соответствовать одинаковые коники. Более того, если квадрика содержит плоскость (например, является объединением двух гиперплоскостей, одна из которых содержит плоскость), то их пересечение вообще не является коникой.

Упражнение 48. Множество коник в $\mathbb{P}(W)$ — это $\mathbb{P}_{\mathsf{Gr}(3,W)}(S^2\mathcal{U}^*)(\mathsf{k})$.

Упражнение 49. Множество гладких коник в $\mathbb{P}(W)$ — это множество k-точек некоторой открытой подсхемы в $\mathbb{P}_{\mathsf{Gr}(3,W)}(S^2\mathcal{U}^*)(\mathsf{k})$ (опишите дополнение как схему нулей явного сечения явного линейного расслоения).

Упражнение 50. Множество коник в подсхеме $X \subset \mathbb{P}(W)$ — это множество k-точек замкнутой подсхемы в $\mathbb{P}_{\mathsf{Gr}(3,W)}(S^2\mathcal{U}^*)$.

Часть 27. Скрученные кубики

Скрученной кубикой в $\mathbb{P}^3$ называется образ трехкратного вложения Веронезе $\nu_3 : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$.

Попробуем описать множество всех скрученных кубик. Ясно, что всякая скрученная кубика является пересечением трех квадрик. Однако, далеко не любая тройка квадрик пересекается по скрученной кубике.

Упражнение 51. Покажите, что $\{\, x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = x^2 - y^2 - z^2 + w^2 = xw - yz = 0 \,\} \subset \mathbb{P}^3$ — 8 точек.

Лемма 27.1. *Пусть $C \subset \mathbb{P}^3$ — скрученная кубика. Тогда существует морфизм $\varphi : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)^{\oplus 2} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^{\oplus 3}$, такой что $C = D_1(\varphi)$.*

Доказательство. Мы проверяли, что для $\varphi = \left(\begin{smallmatrix} x & y & z \\ y & z & w \end{smallmatrix}\right)$ детерминанталь $D_1(\varphi)$ является скрученной кубикой. Действуя на эту матрицу подходящим автоморфизмом $g \in \mathrm{GL}_4$, получаем детерминантальное представление произвольной скрученной кубики. $\square$

Пусть теперь $\dim A = 2$, $\dim B = 3$. Рассмотрим проективное пространство $\mathbb{P}(\mathrm{Mat}_{2\times 3}(W^*)) = \mathbb{P}(A^* \otimes B^* \otimes W^*)$ и естественный морфизм $A \otimes B \otimes \mathcal{O}(-1) \to W^* \otimes \mathcal{O}$ на нем. Применяя S^2, получаем морфизм $\psi : \Lambda^2 A \otimes \Lambda^2 B \otimes \mathcal{O}(-2) \to S^2 W^* \otimes \mathcal{O}$. Пусть $U = \mathbb{P}(A^* \otimes B^* \otimes W^*) \setminus D_2(\psi)$. Тогда на U морфизм ψ является вложением расслоений и дает морфизм $U \to \mathsf{Gr}(3, S^2W^*)$. Пусть $M \subset \mathsf{Gr}(3, S^2W^*)$ — его образ. Тогда ясно, что множество всех скрученных кубик совпадает с множеством всех k-точек многообразия M.

Часть 28. Параметризация Чжоу

Докажем результат о параметризации произвольных семейств подмногообразий в $\mathbb{P}^n$ (а значит и в произвольных проективных подмногообразиях) с помощью так называемых “координат Чжоу”.

Начнем с подготовки. Пусть E — расслоение на схеме X. Говорят, что X **порождается глобальными сечениями**, если естественное отображение вычисления $\Gamma(X, E) \otimes \mathcal{O}_X \xrightarrow{\mathrm{ev}} E$ сюръективно.

Лемма 28.1. *Пусть X — целостная схема, E — расслоение на X, порожденное глобальными сечениями. Тогда для общего сечения $s \in \Gamma(X, E)$ либо $Z_s = \emptyset$, либо $\dim Z_s = \dim X - r(E)$. Иначе говоря, существует непустое открытое подмножество $U \subset \mathbb{P}(\Gamma(X, E))$, такое что это свойство выполнено для всякого $s \in U$.*

Замечание 28.2. Если X коэн–маколеева, то все сечения из U регулярны.

Доказательство. Обозначим $W := \Gamma(X, E)$, $E^\perp = \mathrm{Ker}(W \otimes \mathcal{O}_X \to E)$. Рассмотрим на $X \times \mathbb{P}(W)$ морфизм $f : p_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1) \to W \otimes \mathcal{O}_{X\times\mathbb{P}(W)} \to p_1^*E$.

Упражнение 52. Покажите, что схема нулей $Z_f \subset X \times \mathbb{P}(W)$ совпадает с $\mathbb{P}_X(E^\perp)$.

Так как $Z_f = \mathbb{P}_X(E^\perp)$, имеем $\dim Z_f = \dim X + r(E^\perp) - 1 = \dim X + \dim W - r(E) - 1$. Рассмотрим теперь проекцию $p_2 : Z_f \to \mathbb{P}(W)$. Заметим, что слой этой проекции над точкой $w \in \mathbb{P}(W)$ — это схема нулей в X соответствующего сечения расслоения E. Если при этом общий слой проекции пуст, то есть (локально) найдется функция на $\mathbb{P}(W)$, переходящая в ноль, то прообраз соответсвующего открытого подмножества в $\mathbb{P}(W)$ пуст, значит для всякого сечения s, соответствующего точке этого множества, схема нулей Z_s пуста. Если же общий слой не пуст, то из приведенного ниже утверждения следует, что найдется открытое подмножество $U \subset \mathbb{P}(W)$, такое что для всех $s \in U$ слой над точкой s имеет размерность $\dim Z_f - \dim \mathbb{P}(W) = \dim X - r(E)$. $\square$

Морфизм $f : X \to Y$ называется **доминантным**, если $f(X)$ плотно в Y. Если схема Y целая, то доминантность морфизма равносильна тому, что общая точка Y лежит в образе f, то есть что $X \times_Y \mathrm{Spec}\, K(Y) \neq \emptyset$.

Предложение 28.3. *Пусть $f : X \to Y$ — доминантный морфизм целых схем над полем k. Тогда существует непустое открытое подмножество $U \subset Y$, такое что для всякой точки $y \in U$ слой $X_y := X \times_Y y$ имеет размерность $\dim X - \dim Y$.*

Доказательство. Вопрос локальный, так что можно считать, что $X = \mathrm{Spec}\, A$, $Y = \mathrm{Spec}\, B$, а f соответствует вложению колец $B \to A$. Рассмотрим соответствующее вложение полей частных $K(B) \to K(A)$. Ясно, что $\mathrm{degtr}(K(A)/K(B)) = \mathrm{degtr}(K(A)/\mathsf{k}) - \mathrm{degtr}(K(B)/\mathsf{k}) = \dim X - \dim Y =: n$. Выберем базис транцендентности $y_1, \dots, y_n \in K(A)$ над $K(B)$. Локализуя A можно считать, что $y_1, \dots, y_n \in A$, то есть возникает вложение $B[t_1, \dots, t_n] \to A$, $t_i \mapsto y_i$ и таким образом вопрос сводится к случаю $n = 0$. Пусть теперь $n = 0$, так что $K(A)/K(B)$ — конечное расширение. Индукция по степени сводит все к случаю, когда $K(A) = K(B)[t]/P(t)$. Пролокализовав A и B, можно считать, что $A = B[t]/P(t)$, $P = t^m + b_1t^{m-1} + \dots + b_m$, $b_i \in B$. Но тогда $\dim A = \dim B$, что и требовалось. $\square$

Упражнение 53. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ замкнутая подсхема, $\mathrm{codim} X = m$. Проверьте, что для общей плоскости $\mathbb{P}^m \subset \mathbb{P}^n$ пересечение $X \cap \mathbb{P}^m$ — артинова подсхема, причем $\dim \Gamma(X \cap \mathbb{P}^m, \mathcal{O}_{X\cap\mathbb{P}^m})$ не зависит от выбора плоскости.

Определение 28.4. Число $\dim \Gamma(X \cap \mathbb{P}^m, \mathcal{O}_{X\cap\mathbb{P}^m})$ для общей плоскости $\mathbb{P}^m \subset \mathbb{P}^n$ называется **степенью** подсхемы $X \subset \mathbb{P}^n$.

Пусть $X \subset \mathbb{P}(W)$ — подсхема коразмерности m и степени d. Пусть $\dim W = n$. Рассмотрим $\mathsf{Gr}(m,W)$, $\mathsf{Fl}(1,m;W) \subset \mathbb{P}(W) \times \mathsf{Gr}(m,W)$ и пусть p и q — проекции $\mathsf{Fl}(1,m;W)$ на $\mathbb{P}(W)$ и $\mathsf{Gr}(m,W)$ соответственно. Положим $Z_X = X \times_{\mathbb{P}(W)} \mathsf{Fl}(1,m;W) = p^{-1}(X) \subset X \times \mathsf{Gr}(m,W)$. Наконец, пусть $D_X = q(Z_X) \subset \mathsf{Gr}(m,W)$. Ясно, что D_X — неприводимое замкнутое подмножество.

Также нам понадобится описание группы классов дивизоров на грассманиане.

Лемма 28.5. *Имеем $\mathsf{Pic}\,\mathsf{Gr}(m,W) \cong \mathbb{Z}$, причем образующей является линейное расслоение $\Lambda^m\mathcal{U}^*$.*

Доказательство. Выберем разложение $W = V_0 \oplus V_1$, $\dim V_0 = m$. Тогда $D = \{\, U \in \mathsf{Gr}(m,W) \mid U \cap V_0 \neq 0 \,\}$ — простой дивизор (он является образом морфизма $\mathsf{Gr}_{\mathbb{P}(V_1)}(m-1, W/\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_1)}(-1)) \to \mathsf{Gr}(m,W)$ и одновременно схемой нулей сечения расслоения $\Lambda^m\mathcal{U}^*$, соответствующего вложению $\Lambda^m V_0^* \subset \Lambda^m W^* = \Gamma(\mathsf{Gr}(m,W), \Lambda^m\mathcal{U}^*)$). При этом дополнение к D — аффинное пространство $\mathrm{Hom}(V_0, V_1)$. Остается применить точную последовательность $\mathbb{Z}D \to \mathsf{Pic}\,\mathsf{Gr}(m,V) \to \mathsf{Pic}(\mathsf{Gr}(m,W) \setminus D) \to 0$. □

Линейное расслоение $\Lambda^m\mathcal{U}^*$ на $\mathsf{Gr}(m,W)$ обозначается $\mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(m,W)}(1)$, а его d-ая тензорная степень обозначается $\mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(m,W)}(d)$.

Упражнение 54. Пусть $0 \subset V_2 \subset V_1 \subset W$, $\dim V_2 < m < \dim V_1$. Проверьте, что функтор обратного образа для вложения $\mathsf{Gr}(k, V_1/V_2) \to \mathsf{Gr}(m,W)$ (где $k = m - \dim V_2$) переводит $\mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(m,W)}(d)$ в $\mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(k,V_1/V_2)}(d)$.

Теорема 28.6. *Подсхема D_X — схема нулей сечения расслоения $\mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(m,W)}(d)$. Если подсхема $X \subset \mathbb{P}(W)$ приведена, то она однозначно восстанавливается по D_X.*

Доказательство. Во-первых, заметим, что p — локально тривиальное расслоение со слоем $\mathsf{Gr}(m-1, n-1)$. Поэтому $\mathrm{codim}_{\mathsf{Fl}(1,m;W)} Z_X = \mathrm{codim} X = m$. Значит $\dim D_X \leqslant \dim Z_X = \dim \mathsf{Gr}(m,W) + (m-1) - m = \dim \mathsf{Gr}(m,W) - 1$. Выберем теперь общее подпространство $U_1 \subset W$ размерности $m+1$ (так чтобы $X \cap \mathbb{P}(U_1)$ было артиновой подсхемой), и общее подпространство $U_2 \subset U_1$ размерности $m-1$ (так чтобы $X \cap \mathbb{P}(U_2) = \emptyset$). Тогда рассмотрим $L_{U_1,U_2} = \{\, U \in \mathsf{Gr}(m,W) \mid U_2 \subset U \subset U_1 \,\} \cong \mathbb{P}(U_1/U_2)$. Ясно, что $D_X \cap L_{U_1,U_2}$ — подсхема длины d. Отсюда следует, что D_X дивизор. В самом деле, заметим, что $\mathsf{Gr}(m,U_1) \subset \mathsf{Gr}(m,W)$ — схема нулей сечения расслоения $(\mathcal{U}^*)^{\oplus(n-m-1)}$, которое порождается глобальными сечениями, а $L_{U_1,U_2} \subset \mathsf{Gr}(m,U_1)$ — схема нулей сечения расслоения $(U_1/\mathcal{U})^{\oplus(m-1)}$, которое тоже порождается глобальными сечениями, поэтому $\mathrm{codim}_{L_{U_1,U_2}}(D_X \cap L_{U_1,U_2}) = \mathrm{codim} D_X$. Остается заметить, что если $\mathcal{O}(k)$ — линейное расслоение, соответствующее дивизору D_X, то дивизору $D_X \cap L_{U_1,U_2}$ на L_{U_1,U_2} также соответствует расслоение $\mathcal{O}(k)$, поэтому $k = d$.

Покажем теперь, как X восстановить по D_X. Заметим для этого, что если $x \in \mathbb{P}(W) \setminus X$ — произвольная точка, то для общего $U \in q(p^{-1}(x))$ пересечение $\mathbb{P}(U) \cap X$ пусто, то есть $q(p^{-1}(x)) \not\subset D_X$, в то время как для $x \in X$ имеем $q(p^{-1}(x)) \subset D_X$ по построению. Значит $X = \{\, x \in X \mid q(p^{-1}(x)) \subset D_X \,\}$. Если X приведена, то схемная структура на X восстанавливается однозначно. □

Остается заметить, что множество всех дивизоров, соответствующих линейному расслоению $\mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(m,W)}(d)$ — это проективное пространство $\mathbb{P}(V)$, $V = \Gamma(\mathsf{Gr}(m,W), \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(m,W)}(d))$. Мы показали, что всякая подсхема $X \subset \mathbb{P}(W)$ коразмерности m и степени d соответствует точке в нем. Отдельно можно проверить, что в $\mathbb{P}(V)$ существует локально замкнутое подмножество $C_{n-1,n-1-m,d}$ (которое называется схема Чжоу) такое что подсхемы X соответствуют его k-точкам. Однородные координаты на $\mathbb{P}(V)$ дают систему координат на $C_{n-1,n-1-m,d}$, которые называются координаты Чжоу.

Упражнение 55. Покажите, что $C_{n,n-1,d} = \mathbb{P}(S^d W^*)$.

Упражнение 56. Покажите, что $C_{n,k,1} = \mathsf{Gr}(k+1, n+1)$.

Пример 28.7. Рассмотрим нульмерные подсхемы степени 2 в $\mathbb{P}^n$. Тогда $m = n$, $\mathsf{Gr}(m, n+1) = \mathbb{P}^n$ (двойственное проективное пространство), а D_X — объединение двух гиперплоскостей (если X — две различные точки), либо двойная плоскость (если X — подсхема длины 2, сосредоточенная в одной точке). На этом примере хорошо видно, что приведенность X необходима для восстановления X по D_X.

Упражнение 57. Покажите, что $C_{n,0,2} = D_2(\varphi)$, где $\varphi : W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S^2W^*)} \to W^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S^2W^*)}$. Проверьте, что для $n = 2$ — это гиперповерхность степени 3 в $\mathbb{P}^5$.

Пример 28.8. Рассмотрим $C_{3,1,2}$. Тогда $V = S^2\Lambda^2 W^*/\Lambda^4 W^*$. Рассмотрим морфизм $\varphi_1 : \mathsf{Gr}(2,4)\times\mathsf{Gr}(2,4) \to \mathbb{P}(V)$, переводящий пару прямых (L_1, L_2) в образ $\Lambda^2 L_1^\perp \otimes \Lambda^2 L_2^\perp$ при отображении $\Lambda^2 W^* \otimes \Lambda^2 W^* \to V$. Пусть $M_1 \subset \mathbb{P}(V)$ — образ φ_1. Кроме того, рассмотрим морфизм $\varphi_2 : \mathbb{P}_{\mathbb{P}(W^*)}(S^2\mathcal{U}^*) \to \mathbb{P}(V)$, переводящий конику C, заданную уравнениями $\{\, f_1 = f_2 = 0\,\}$ (f_1 — уравнение плоскости, а f_2 — уравнение квадрики) в образ $f_1^2 \otimes f_2$ при отображении $S^2W^* \otimes S^2W^* \subset S^2(W^* \otimes W^*) \to V$. Пусть $M_2 \subset \mathbb{P}(V)$ — образ φ_2. Можно проверить, что $D_{L_1\cup L_2} = \varphi_1(L_1, L_2)$, $D_C = \varphi_2(C)$. Отсюда видно, что $C_{3,1,2} \supset M_1 \cup M_2$. Более того, можно проверить, что они на самом деле равны, так что M_1 и M_2 — неприводимые компоненты в $C_{3,1,2}$.

Многообразия модулей

Часть 29. Функторы точек

На прошлой лекции мы установили, что множества различных алгебро-геометрических объектов часто находятся в биекции с множеством точек некоторых алгебраических многообразий. Естественно, хотелось бы, чтобы эти многообразия не падали бы с неба, а определялись однозначно изучаемыми множествами объектов. При этом очевидно, что множество k-точек схемы X не может определять схему однозначно — ясно, что на почти всех схемах множества k-точек равномощны. Поэтому нужна какая-то дополнительная структура. Наиболее удобной, оказывается структура "функтора точек".

Пусть X — произвольная схема. Напомним, что k-точка схемы X — это морфизм $\operatorname{Spec}\mathsf{k} \to X$. Аналогично, S-**точкой схемы** X (где S — произвольная схема), называется морфизм $S \to X$. Множество S-точек схемы X обозначается $X(S)$. Таким образом, $X(S) = \operatorname{Map}(S, X)$.

Заметим, что сопоставление $S \mapsto X(S)$ является контравариантным функтором на категории схем — морфизму $f : S' \to S$ очевидно сопоставляется морфизм $f^* : X(S) \to X(S')$, переводящий S-точку $S \to X$ в S'-точку $S' \xrightarrow{f} S \to X$. Обозначим этот функтор h_X. Итак,

$$h_X \in \mathsf{Fun}(\mathsf{Sch}^\circ, \mathsf{Sets}), \qquad h_X(S) = X(S).$$

где Sch — категория схем, а Sets — категория множеств. Оказывается, по функтору точек схема восстанавливается однозначно.

Предложение 29.1. *Если функторы точек h_X и h_Y изоморфны, то и схемы X и Y изоморфны. Более того, для любого функтора $F : \mathsf{Sch}^\circ \to \mathsf{Sets}$ имеется изоморфизм*

$$\operatorname{Hom}(h_X, F) \cong F(X).$$

В частности,

$$\operatorname{Hom}(h_X, h_Y) = h_Y(X) = Y(X) = \operatorname{Map}(X, Y).$$

Доказательство. Это совершенно общекатегорное утверждение известное как лемма Ионеды. В самом деле, пусть $\alpha : h_X \to F$ — морфизм функторов. В частности он дает морфизм $\alpha_X : h_X(X) \to F(X)$. Но $h_X(X) = X(X) = \operatorname{Map}(X, X)$ содержит выделенный элемент, id_X. Положим $f_\alpha := \alpha_X(\mathrm{id}_X) \in F(X)$. Обратно, пусть $f \in F(X)$. Каждой схеме S и каждому морфизму $\varphi : S \to X$ сопоставим элемент $F(\varphi)(f) \in F(S)$ — образ f под действием морфизма $F(\varphi) : F(X) \to F(S)$. Ясно, что сопоставление $\varphi \mapsto F(\varphi)(f)$ — морфизм $h_X(S) \to F(S)$, является морфизмом функторов $h_X \to F$, так как коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} h_X(S) \arrow[r] \arrow[d, "h_X(g)"'] & F(S) \arrow[d, "F(g)"] \\ h_X(S') \arrow[r] & F(S') \end{tikzcd}$$

для всякого морфизма $g : S' \to S$ очевидна — в одном случае $\varphi : S \to X$ переходит сначала в $h_X(g)(\varphi) = \varphi \circ g : S' \to X$, а затем в $F(\varphi \circ g)(f)$, а в другом — сначала в $F(\varphi)(f)$, а затем в $F(g)(F(\varphi)(f))$. Обозначим полученный морфизм функторов через $\alpha_f : h_X \to F$. Тогда ясно, что

$$\alpha_{f_\alpha}(\varphi) = F(\varphi)(f_\alpha) = F(\varphi)(\alpha_X(\mathrm{id}_X)) = \alpha_S(h_X(\varphi)(\mathrm{id}_X)) = \alpha_S(\mathrm{id}_X \circ \varphi) = \alpha_S(\varphi),$$

так что $\alpha_{f_\alpha} = \alpha$. Обратно,

$$f_{\alpha_f} = \alpha_f(\mathrm{id}_X) = F(\mathrm{id}_X)(f) = \mathrm{id}_{F(X)}(f) = f.$$

Таким образом, мы убедились, что $\operatorname{Hom}(h_X, F) = F(X)$. Утверждение про $\operatorname{Hom}(h_X, h_Y) = \operatorname{Map}(X, Y)$ сразу отсюда следует. Наконец, если $h_X \cong h_Y$, то взаимно обратные морфизмы $h_X \to h_Y$ и $h_Y \to h_X$ обязаны происходить из морфизмов $X \to Y$ и $Y \to X$, которые обязаны быть взаимно обратными. $\square$

Часть 30. Представимые функторы и универсальные семейства

Пусть теперь задан произвольный функтор $F : \mathsf{Sch}^\circ \to \mathsf{Sets}$.

Определение 30.1. Функтор F называется представимым, если существует схема X и изоморфизм функторов $h_X \cong F$. В этом случае говорят, что X — тонкое многообразие модулей, соответствующее функтору F.

Пример 30.2. Пусть W — векторное пространство. Рассмотрим такой функтор $F : \mathsf{Sch}^\circ \to \mathsf{Sets}$. Каждой схеме S сопоставим множество линейных подрасслоений $\epsilon : \mathcal{L} \subset W \otimes \mathcal{O}_S$, с точностью до эквивалентности $(\mathcal{L}, \epsilon) \sim (\mathcal{L}', \epsilon')$, если существует изоморфизм $\varphi : \mathcal{L}' \to \mathcal{L}$, такой что $\epsilon' = \epsilon \circ \varphi$. Тогда функтор F представим, а соответствующее тонкое многообразие модулей — $\mathbb{P}(W)$.

Пример 30.3. Пусть W — векторное пространство. Рассмотрим такой функтор $F : \mathsf{Sch}^\circ \to \mathsf{Sets}$. Каждой схеме S сопоставим множество подрасслоений $\epsilon : \mathcal{E} \subset W \otimes \mathcal{O}_S$ ранга r, с точностью до эквивалентности $(\mathcal{E}, \epsilon) \sim (\mathcal{E}', \epsilon')$, если существует изоморфизм $\varphi : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$, такой что $\epsilon' = \epsilon \circ \varphi$. Тогда функтор F представим, а соответствующее тонкое многообразие модулей — $\mathsf{Gr}(r, W)$.

Упражнение 58. Напишите функтор, тонкое многообразие модулей которого — это многообразие флагов.

Пример 30.4. Пусть E — векторное расслоение на схеме X. Рассмотрим такой функтор $F : \mathsf{Sch}^\circ \to \mathsf{Sets}$. Каждой схеме S сопоставим множество морфизмов $f : S \to X$ и линейных подрасслоений $\epsilon : \mathcal{L} \subset f^*E$, с точностью до эквивалентности $(f, \mathcal{L}, \epsilon) \sim (f', \mathcal{L}', \epsilon')$, если $f' = f$ и существует изоморфизм $\varphi : \mathcal{L}' \to \mathcal{L}$, такой что $\epsilon' = \epsilon \circ \varphi$. Тогда функтор F представим, а соответствующее тонкое многообразие модулей — $\mathbb{P}_X(E)$.

Упражнение 59. Напишите функтор, тонкое многообразие модулей которого — это $\mathsf{Gr}_X(r, E)$.

Пусть функтор F представим, а соответствующее тонкое многообразие модулей — X. Тогда в множестве $F(X)$ есть выделенный элемент — то, что соответствует тождественному морфизму $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Map}(X, X) = h_X(X)$ при изоморфизме $F \cong h_X$. Этот элемент называется универсальным семейством на X.

Пример 30.5. В примере 30.2 универсальное семейство — тавтологическое вложение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1) \to W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}$.

Пример 30.6. В примере 30.3 универсальное семейство — тавтологическое вложение $\mathcal{U} \to W \otimes \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(r,W)}$.

Пример 30.7. В примере 30.4 универсальное семейство — это проекция $\pi : \mathbb{P}_X(\mathcal{E}) \to X$ и тавтологическое вложение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_X(E)}(-1) \to \pi^*E$.

Полезно понимать, что на языке многообразий модулей и универсальных семейств лемма Ионеды имеет следующую переформулировку.

Предложение 30.8. *Пусть $F : \mathsf{Sch}^\circ \to \mathsf{Sets}$ — функтор, обладающий тонким многообразием модулей X, а $\mathfrak{u} \in F(X)$ — соответствующее универсальное семейство. Тогда морфизмы $S \to X$ находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами множества $F(S)$, причем если $\varphi : S \to X$ соответствует элементу $f \in F(S)$, то $f = F(\varphi)(\mathfrak{u})$.*

Часть 31. Функтор подсхем

Вернемся к вопросу о параметризации семейств подсхем в фиксированном многообразии X. Попробуем определить подходящий функтор $\mathfrak{H} : \mathsf{Sch}^\circ \to \mathsf{Sets}$. Представим себе, что существует алгебраическое многообразие H_X, параметризующее все подсхемы в X. Ясно, что соответствующим универсальным семейстом должна быть подсхема $Z_X \subset X \times H_X$ — тогда слои Z_X над точками H_X будут подсхемами в X. Соответственно, для каждой S-точки схемы H_X, то есть морфизма $S \to H_X$, можно будет рассмотреть расслоенное произведение $Z_X \times_{H_X} S$ — это будет подсхема в $(X \times H_X) \times_{H_X} S = X \times S$. Таким образом, естественно определить $\mathfrak{H}(S)$ как множество подсхем в $Z \subset X \times S$ с какими-то ограничениями.

Естественное ограничение — слои морфизма $Z \to S$ должны быть "похожими". Например, если общий слой — точка, то специальный слой тоже должен быть точкой, а не двумя точками. Или, например, если общий слой — коника, то и специальный слой должен быть коникой. Вопрос — как такого рода ограничения сформулировать математически.

Можно, например, рассматривать только такие подсхемы $Z \subset X \times S$, что морфизм $Z \to S$ является локально тривиальным расслоением. Это было бы вполне разумным условием в дифференциальной геометрии, но в алгебраической геометрии — это слишком сильное условие. Конечно, оно запрещает появление лишних точек в слоях, но также оно запрещает и вырождения коник. Поэтому условие локальной тривиальности не годится.

С другой стороны, следующие два условия заведомо должны быть выполнены:

- неприводимые компоненты рассматриваемых подсхем $Z \subset X \times S$ должны быть доминантны над S:
- множество рассматриваемых подсхем должно быть замкнуто относительно замены базы — если $Z \subset X \times S$ допустима, а $S' \to S$ — произвольный морфизм, то $Z' = Z \times_S S' \subset X \times S'$ тоже должна быть допустима (иначе $\mathfrak{H}_X$ не будет функтором).

Описание этих свойств приводит к понятиям плоского морфизма и плоского пучка — одним из важнейших понятий алгебраической геометрии.

Часть 32. Плоские пучки и морфизмы

Определение 32.1. Модуль M над кольцом A называется плоским, если функтор $N \mapsto M \otimes_A N$ точен слева.

Пример 32.2. Свободный (проективный) модуль над кольцом всегда плоский. Множество плоских модулей замкнуто относительно расширений и прямых слагаемых.

Лемма 32.3. *Пусть A локальное нетерово кольцо с полем вычетов k, а M конечно порожденный A-модуль. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *M свободен;*
(ii) *M проективен;*
(iii) *M плоский;*
(iv) $\mathrm{Tor}_1(M, \mathsf{k}) = 0$.

Доказательство. $(i) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (iii) \Longrightarrow (iv)$ очевидно. Докажем $(iv) \Longrightarrow (i)$. Пусть $\mathrm{Tor}_1(M, \mathsf{k}) = 0$. Пусть $\dim M \otimes_A \mathsf{k} = \dim M/\mathfrak{m}M = n$. Выберем n образующих, поднимем их в M — получим морфизм $A^n \to M$, сюръективный по лемме Накаямы. Пусть N — его ядро, так что $0 \to N \to A^n \to M \to 0$ — точная тройка. Домножая на k получим точную последовательность

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1(M, \mathsf{k}) \to N \otimes_A \mathsf{k} \to \mathsf{k}^n \to M \otimes_A \mathsf{k} \to 0.$$

Отсюда $N \otimes_A \mathsf{k} = 0$, то есть $N = \mathfrak{m}N$, то есть по лемме Накаямы $N = 0$ (N конечно порожден так как A нетерово). ☐

Пример 32.4. Условие конечной порожденности существенно. Например, пусть $A = \mathsf{k}[x, y]_{(0)}$ — локальное кольцо точки $0 \in \mathbb{A}^2$, а $M = \mathsf{k}(x)$ (y действует нулем). Тогда M не является плоским, но $\mathrm{Tor}_1^A(M, \mathsf{k}) = 0$ (проверьте с помощью комплекса Кошуля).

Пример 32.5. $\mathbb{Q}$ является плоским $\mathbb{Z}_p$ модулем, но не является проективным.

Упражнение 60. Покажите, что M плоский над $A \iff \mathrm{Tor}_{>0}^A(M, -) = 0$.

Упражнение 61. Покажите, что множество плоских A-модулей замкнуто относительно ядер эпиморфизмов. В частности, если M обладает конечной правой плоской резольвентой, то M плоский.

Лемма 32.6. *Модуль M над кольцом A плоский $\iff \mathrm{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{a}) = 0$ для всех конечно порожденных идеалов $\mathfrak{a} \subset A$.*

Доказательство. Чтобы доказать $(\Longrightarrow)$ домножим на M точную тройку $0 \to \mathfrak{a} \to A \to A/\mathfrak{a} \to 0$. Так как $\mathrm{Tor}_1^A(M, A) = 0$, получим точную последовательность $0 \to \mathrm{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{a}) \to M \otimes_A \mathfrak{a} \to M \to M/\mathfrak{a}M \to 0$. Если M плоский, то центральная стрелка вложение, значит $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{a}) = 0$.

Докажем теперь $(\Longleftarrow)$. Во-первых, заметим, что из $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{a}) = 0$ следует $\mathrm{Tor}_1^A(M, N) = 0$ для всех конечно представленных A-модулей N, так как все такие модули обладают конечной фильтрацией с факторами вида $A/\mathfrak{a}$. Предположим теперь, $0 \to N_1 \to N_2 \to N_3 \to 0$ — точная тройка, которая после умножения на M теряет точность. Значит морфизм $M \otimes_A N_1 \to M \otimes_A N_2$ не является вложением, то есть некоторый элемент переходит в 0. Пусть этот элемент — $\sum_{i=1}^k m_i \otimes n_i$. То, что он переходит в 0 означает, что найдется элемент $\sum_{j=1}^l \mu_j \otimes a_j \otimes \nu_j \in M \otimes_{\mathbb{Z}} A \otimes_{\mathbb{Z}} N_2$, такой что $\sum_j (\mu_j a_j \otimes \nu_j - \mu_j \otimes a_j \nu_j) = \sum_i m_i \otimes n_i$ в $M \otimes_{\mathbb{Z}} N_2$. Рассмотрим подмодуль в $N_1' \subset N_1$, порожденный элементами n_i, и подмодуль $N_2' \subset N_2$, порожденный образами n_i и ν_j. Тогда $0 \neq \sum \mu_i \otimes n_i \in M \otimes N_1'$ (так как переходит в ненулевой элемент в $M \otimes_A N_1$), но его образ в $M \otimes_A N_2'$ равен нулю. Значит $\operatorname{Tor}_1^A(M, N_2'/N_1') \neq 0$, что невозможно, так как N_2'/N_1' по построению конечно представлен. $\square$

Следствие 32.7. *Пусть A — область главных идеалов. Модуль M над A плоский $\iff$ M не имеет кручения, то есть ненулевые элементы A действуют без ядра на M.*

Доказательство. Так как A — область главных идеалов, всякий $\mathfrak{a} \subset A$ имеет вид $\mathfrak{a} = (t)$, $t \in A$, поэтому имеем свободную резольвенту $0 \to A \xrightarrow{t} A \to A/\mathfrak{a} \to 0$, поэтому $\operatorname{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{a}) = \operatorname{Ker}(M \xrightarrow{t} M)$. $\square$

Лемма 32.8. *Модуль M над кольцом A плоский $\iff$ для любого простого $\mathfrak{p} \subset A$ модуль $M_\mathfrak{p}$ над $A_\mathfrak{p}$ плоский.*

Доказательство. Функтор локализации точен и коммутирует с тензорным произведением — $(N \otimes_A M)_\mathfrak{p} = N_\mathfrak{p} \otimes_{A_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}$ — поэтому плоскость модуля влечет плоскость его локализации. Обратно, предположим, что все локализации модуля M плоские. Рассмотрим точную тройку $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$, умножим ее на M, и обозначим через K когомологию в первом члене — $0 \to K \to N' \otimes_A M \to N \otimes_A M \to N'' \otimes_A M \to 0$. Переходя к локализации, получаем точную последовательность $0 \to K_\mathfrak{p} \to N'_\mathfrak{p} \otimes_{A_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} \to N_\mathfrak{p} \otimes_{A_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} \to N''_\mathfrak{p} \otimes_{A_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} \to 0$. Из плоскости модуля $M_\mathfrak{p}$ следует $K_\mathfrak{p} = 0$. Но если $K_\mathfrak{p} = 0$ для всех $\mathfrak{p}$, то $K = 0$. $\square$

Упражнение 62. Пусть $f : A \to B$ — гомоморфизм колец, а M — B-модуль. Покажите, что M плоский над A $\iff$ для любого простого $\mathfrak{p} \subset B$ модуль $M_\mathfrak{p}$ над $A_{f^{-1}(\mathfrak{p})}$ плоский.

Определение 32.9. Пусть $f : Y \to X$ — морфизм схем. Квазикогерентный пучок $\mathcal{F}$ на Y называется плоским над X, если для всякой точки $y \in Y$ слой $\mathcal{F}_y$ является плоским модулем над кольцом $\mathcal{O}_{X,f(y)}$.

Лемма 32.10. *Плоскость сохраняется при замене базы. Иначе говоря, если $f : Y \to X$ — морфизм, $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок на Y плоский над X, а $s : X' \to X$ — произволный морфизм, то $p_Y^* \mathcal{F}$ — пучок на $X' \times_X Y$ плоский над X'.*

Доказательство. Поскольку плоскость — локальное понятие, можно считать, что $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$, $X' = \operatorname{Spec} A'$, а пучок $\mathcal{F}$ ассоциирован с B-модулем M. Тогда пучок $p_Y^* \mathcal{F}$ ассоциирован с $A' \otimes_A B$-модулем $A' \otimes_A M$. Заметим, что для любого A'-модуля N выполнено свойство

$$N \otimes_{A'} (A' \otimes_A M) = N \otimes_A M,$$

поэтому из плоскости M над A следует плоскость $A' \otimes_A M$ над A'. $\square$

Определение 32.11. Морфизм схем $f : Y \to X$ называется плоским, если пучок $\mathcal{O}_Y$ плоский над X.

Упражнение 63. Проверьте, что понятие плоского морфизма сохранятся при замене базы.

Лемма 32.12. *Пусть X — целая регулярная схема размерности 1. Морфизм $f : Y \to X$ плоский $\iff$ всякая ассоциированная точка схемы Y отображается в общую точку схемы X.*

Доказательство. Утверждение локально, поэтому можно считать, что $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$, а морфизм f задан морфизмом колец $f : A \to B$. Пусть $\mathfrak{p} \subset B$ — ассоциированный идеал B, такой что $f^{-1}(\mathfrak{p}) \neq 0$. Значит существует $0 \neq t \in A$, такой что $f(t)$ является делителем нуля в B. Домножая точную тройку $0 \to A \xrightarrow{t} A \to A/tA \to 0$ (t не является делителем нуля в A, так как A целостно) на B, получим тройку, не являющуюся точной слева, значит B не является плоским A-модулем.

Обратно, предположим для всех ассоциированных идеалов $\mathfrak{p} \subset B$ имеем $f^{-1}(\mathfrak{p}) = 0$. Значит для всех $0 \neq t \in A$ элемент $f(t) \in B$ не является делителем нуля. Для проверки плоскости B достаточно проверить, что для любого максимального идеала $\mathfrak{m} \subset A$ модуль $B_\mathfrak{m}$ плоский над $A_\mathfrak{m}$. Но $A_\mathfrak{m}$ — кольцо дискретного нормирования, значит область главных идеалов, поэтому достаточно проверить, что ненулевые элементы в $A_\mathfrak{m}$ переходят не в делители нуля в $B_\mathfrak{m}$, что очевидно. $\square$

Пример 32.13. Условие регулярности существенно. В самом деле, пусть $X = \operatorname{Spec} \mathsf{k}[t^2, t^3]$, $Y = \operatorname{Spec} \mathsf{k}[t]$. Тогда $\operatorname{Tor}_i^{\mathsf{k}[t^2,t^3]}(\mathsf{k}[t], \mathsf{k}) = \mathsf{k}^2$ для всех $i \geqslant 0$ (проверьте!), значит $\mathsf{k}[t]$ не плоский.

Пример 32.14. Условие размерности 1 существенно. В самом деле, пусть $X = \operatorname{Spec} \mathsf{k}[y, z]$, $Y = \operatorname{Spec} \mathsf{k}[x, y]$, $z \mapsto xy$. Тогда $\operatorname{Tor}_i^{\mathsf{k}[y,z]}(\mathsf{k}[x, y], \mathsf{k}) = \mathsf{k}[x]$ для $i = 0, 1$ (проверьте!), значит $\mathsf{k}[x, y]$ не плоский над $\mathsf{k}[y, z]$.

Упражнение 64. Пусть $g : Z \to Y$ и $f : Y \to X$ — морфизмы, а $\mathcal{F} \in \mathsf{Qcoh}(Z)$. Если f плоский, а $\mathcal{F}$ плоский над Y, то $\mathcal{F}$ плоский над X.

Упражнение 65. Докажите, что (а) открытое вложение плоско; (б) локально тривиальное расслоение плоско; (в) замкнутое вложение **не плоско** (кроме вложения компонент связности); (г) конечный морфизм $Y \to X$ (то есть $Y = \operatorname{Spec}_X \mathcal{A}$, где $\mathcal{A}$ — пучок $\mathcal{O}_X$-алгебр, когерентный как пучок $\mathcal{O}_X$-модулей) плоский $\iff \mathcal{A}$ локально свободен.

Упражнение 66. Покажите, что (а) плоский морфизм доминантен; (б) размерность всех слоев плоского морфизма $X \to Y$ равна разности размерностей многообразий X и Y.

Часть 33. Функторы Hilb, Quot и многочлен Гильберта

Пусть X — схема, а $\mathcal{E}$ — когерентный пучок на X. Определим функторы Hilb и Quot формулами

$$\begin{aligned} \mathsf{Hilb}_X(S) &= \{\, Z \subset X \times S \mid Z \text{ — подсхема, плоская над } S \,\}, \\ \mathsf{Quot}_X^{\mathcal{E}}(S) &= \{\, (\mathcal{F}, \varphi) \mid \mathcal{F} \in \mathsf{coh}(X \times S),\ \mathcal{F} \text{ — плоский над } S, \text{ а } \varphi : \mathcal{E} \boxtimes \mathcal{O}_S \to \mathcal{F} \text{ — эпиморфизм} \,\}. \end{aligned}$$

Упражнение 67. Покажите, что $\mathsf{Hilb}_X = \mathsf{Quot}_X^{\mathcal{O}_X}$.

Очень важно следующее наблюдение.

Предложение 33.1. *Если X — проективная схема, а $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на $X \times S$, плоский над S, то функция $s \mapsto P_{\mathcal{F}_s}$ локально постоянна на S, где $\mathcal{F}_s$ — ограничение $\mathcal{F}$ на $X \times \operatorname{Spec} \mathsf{k}(s)$, а $P_{\mathcal{F}_s}$ — его многочлен Гильберта, то есть такой многочлен, что $P_{\mathcal{F}_s}(m) := \dim_{\mathsf{k}(s)} \Gamma(X \times \operatorname{Spec} \mathsf{k}(s), \mathcal{F}_s(m))$ при $m \gg 0$.*

Доказательство. Можно с самого начала считать, что $X = \mathbb{P}^n$, а S — спектр локального кольца A. Тогда $X \times S = \operatorname{Proj}_A(A[x_0, \dots, x_n])$, а пучок $\mathcal{F}$ соответствует градуированному $A[x_0, \dots, x_n]$-модулю $M = \oplus M_k$, $M_k = \Gamma(\mathbb{P}^n_A, \mathcal{F}(k))$. Заметим также, что пучок $\mathcal{F}_s$ соответствует градуированному $\mathsf{k}(s)[x_0, \dots, x_n]$-модулю $M \otimes_A \mathsf{k}(s) = \oplus_m M_m \otimes_A \mathsf{k}(s)$, то есть $\Gamma(X \times \operatorname{Spec} \mathsf{k}(s), \mathcal{F}_s(m)) = \dim_{\mathsf{k}(s)} M_m \otimes_A \mathsf{k}(s)$ при $m \gg 0$, поэтому достаточно проверить, что при $m \gg 0$ модуль M_m свободен над A.

Рассмотрим точную последовательность градуированных $B := A[x_0, \dots, x_n]$-модулей

$$0 \to B \to \oplus_{i=0}^n B[x_i^{-1}] \to \oplus_{0 \leqslant i < j \leqslant n} B[x_i^{-1}, x_j^{-1}] \to \dots \to B[x_0^{-1}, \dots, x_n^{-1}] \to x_0^{-1} \dots x_n^{-1} A[x_0^{-1}, \dots, x_n^{-1}] \to 0,$$

в которой все морфизмы кроме последнего — знакопеременные суммы естественных вложений, а последний — естественная проекция. Так как все его члены кроме последнего плоские над B, то домножая его над B на M получим комплекс

$$(*) \qquad 0 \to M \to \oplus_{i=0}^n M[x_i^{-1}] \to \oplus_{0 \leqslant i < j \leqslant n} M[x_i^{-1}, x_j^{-1}] \to \dots \to M[x_0^{-1}, \dots, x_n^{-1}] \to 0,$$

когомологии которого будут равны $\operatorname{Tor}_k^B(M, x_0^{-1} \dots x_n^{-1} A[x_0^{-1}, \dots, x_n^{-1}])$. С другой стороны, так как M конечно порожден легко проверить, что M обладает конечной свободной над B резольвентой (при построении резольвенты максимальное l, такое что $\operatorname{Tor}_l^B(M, A)$ будет уменьшаться, при этом оно изначально ограничено числом n ввиду резольвенты Кошуля, а если оно равно нулю, то M — свободный B-модуль). Используя такую резольвенту для вычисления $\operatorname{Tor}_k^B(M, x_0^{-1} \dots x_n^{-1} A[x_0^{-1}, \dots, x_n^{-1}])$, легко видеть, что найдется число $N \in \mathbb{Z}$, такое что все модули $\operatorname{Tor}_k^B(M, x_0^{-1} \dots x_n^{-1} A[x_0^{-1}, \dots, x_n^{-1}])$ сосредоточены в степенях $< N$. Поэтому для $m \geqslant N$ градуировачная компонента комплекса $(*)$ с номером m — это точная последовательность

$$0 \to M_m \to \oplus_{i=0}^n M[x_i^{-1}]_m \to \oplus_{0 \leqslant i < j \leqslant n} M[x_i^{-1}, x_j^{-1}]_m \to \dots \to M[x_0^{-1}, \dots, x_n^{-1}]_m \to 0.$$

Плоскость пучка $\mathcal{F}$ над S по определению равносильна плоскости каждого из A-модулей $M[x_i^{-1}]_0$. Заметим, что $M[x_i^{-1}]_m \cong M[x_i^{-1}]_0$ — плоский над A модуль, а все остальные являются его локализациями, поэтому тоже плоские. Отсюда заключаем, что M_m тоже плоский. Но M_m конечно порожден над A, значит M_m свободен. $\square$

Следствие 33.2. *Функторы* Hilb_X *и* $\mathsf{Quot}_X^{\mathcal{E}}$ *являются несвязным объединением функторов*

$$\begin{array}{lclcl} \mathsf{Hilb}_X & = & \bigsqcup_p \mathsf{Hilb}_X^p, & \mathsf{Hilb}_X^p(S) & = & \{ Z \in \mathsf{Hilb}_X(S) \mid P_{Z_s} = p \text{ для всех } s \in S \}, \\ \mathsf{Quot}_X^{\mathcal{E}} & = & \bigsqcup_p \mathsf{Quot}_X^{\mathcal{E},p}, & \mathsf{Quot}_X^{\mathcal{E},p}(S) & = & \{ (\mathcal{F}, \varphi) \in \mathsf{Quot}_X^{\mathcal{E}}(S) \mid P_{\mathcal{F}_s} = p \text{ для всех точек } s \in S \}, \end{array}$$

где p *пробегает множество всех многочленов.*

Несвязным объединением функторов $F_i : \mathsf{Sch}^\circ \to \mathsf{Sets}$, $i \in I$ называется функтор

$$\left(\bigsqcup_{i \in I} F_i \right)(S) = \bigsqcup_{\varphi : S \to I} \prod_{i \in I} F_i(\varphi^{-1}(i)),$$

где φ пробегает множество всех непрерывных отображений $S \to I$ (I рассматривается с дискретной топологией), а произведение берется по тем i, для которых φ^{-1} непусто.

Упражнение 68. Покажите, что функтор $\bigsqcup F_i$ представим $\iff$ каждый из функторов F_i представим, причем многообразие модулей функтора $\bigsqcup F_i$ — несвязное объединению многообразий модулей функторов F_i.

Упражнение 69. Покажите, что $\mathsf{Hilb}_X^p = \mathsf{Quot}_X^{\mathcal{O}_X, p}$.

Из упражнения следует, что для представимости функтора Hilb_X необходимо и достаточно проверить представимость каждого из функторов Hilb_X^p, которые являются частным случаем функторов $\mathsf{Quot}_X^{\mathcal{E},p}$. Представимость функтора Quot, доказанная Гротендиком (мы ее обсудим на следующей лекции), является основой всех теорем о представимости функторов в алгебраической геометрии.

Упражнение 70. Покажите, что (а) функтор Hilb_X^1 представляется схемой X; (б) функтор $\mathsf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^{1+m}$ представляется схемой $\mathsf{Gr}(2, n+1)$; (в) функтор $\mathsf{Quot}_{\operatorname{Spec} \mathsf{k}}^{W,r}$ представляется схемой $\mathsf{Gr}(r, W^*)$. Во всех случаях опишите универсальные семейства.