Детерминантали. Многообразия Веронезе и Сегре

Часть 1. Напоминание

Два основных базовых класса многообразий в алгебраической геометрии — это аффинные многообразия и проективные многообразия, то есть многообразия, которые можно вложить либо в аффинное либо в проективное пространство подходящей размерности. И те и другие можно описывать в терминах "координатной алгебры" — если X — аффинно, то

$$A_X = \Gamma(X, \mathcal{O}_X),$$

а если X — проективно, то

$$A_X^\bullet = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Gamma(X, \mathcal{O}_X(k)),$$

где $\mathcal{O}_X(1)$ — очень обильное линейное расслоение на X. Вся геометрия многообразия X в этих случаях может быть восстановлена по координатным алгебрам. В частности, по алгебре восстанавливается как само многообразие

$$X = \begin{cases} \operatorname{Spec} A_X, & \text{в аффинном случае,} \\ \operatorname{Proj} A_X^\bullet, & \text{в проективном случае,} \end{cases}$$

так и категории когерентных и квазикогерентных пучков на нем

$$\mathsf{coh} X = \begin{cases} \mathsf{mod}\text{-}A_X, & \text{в аффинном случае,} \\ \mathsf{qgr}\text{-}A_X^\bullet, & \text{в проективном случае,} \end{cases} \qquad \mathsf{Qcoh} X = \begin{cases} \mathsf{Mod}\text{-}A_X, & \text{в аффинном случае,} \\ \mathsf{Qgr}\text{-}A_X^\bullet, & \text{в проективном случае} \end{cases}$$

(маленькие буквы в обозначениях категорий указывают на конечную порожденность объектов, а эквивалентности задаются формулами $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$ и $\mathcal{F} \mapsto \oplus_{k=0}^{\infty} \Gamma(X, \mathcal{F}(k))$ соответственно).

Если многообразие X является подмногообразием в аффинном пространстве, $X \subset \mathbb{A}^n$, то

$$A_X \cong \mathsf{k}[x_1, \dots, x_n]/I_X,$$

где I_X — идеал в кольце функций на $\mathbb{A}^n$, состоящий из функций, обращающихся в ноль на X. Аналогично, если многообразие X является подмногообразием в проективном пространстве, $X \subset \mathbb{P}^n$, то

$$A_X^\bullet \cong \mathsf{k}[x_0, x_1, \dots, x_n]/I_X,$$

где кольцо многочленов рассматривается как градуированое с естественной градуировкой (а идеал I_X, состоящий из многочлено обращающихся в ноль на X, автоматически однороден). Образующие идеала I_X (он автоматически конечно порожден в силу нетеровости кольца многочленов) называются уравнениями, задающими многообразие.

Две стандартных типа задач, встречающихся в алгебраической геометрии — по вложению многообразия определить уравнения, его задающие, и наоборот, по данной системе уравнений понять, что за многообразие ими задается.

Часть 2. Многообразие Веронезе

Пусть $X = \mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(U)$ и рассмотрим морфизм $\nu : X \to \mathbb{P}(S^d U)$, задаваемый естественной сюръекцией $S^d U^* \otimes \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X(d)$ (получающейся применением симметрической степени к тавтологической сюръекции $U^* \otimes \mathcal{O}_X = \Gamma(X \mathcal{O}_X(1)) \otimes \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X(1)$).

Во-первых, для большей наглядности выберем базис u_0, u_1 в U^* (однородные координаты на X) и рассмотрим мономиальный базис в $S^d U^*$: $x_0 = u_0^d$, $x_1 = u_0^{d-1} u_1$, $\dots x_d = u_1^d$. По определению морфизм имеет вид

$$(u_0 : u_1) \mapsto (u_0^d : u_0^{d-1} u_1 : \dots : u_1^d).$$

Попробуем описать идеал I_X для данного вложения. Сразу видно, что $f_{ij}(x) = x_i x_j - x_{i+1}x_{j-1}$ лежит в I_X. В самом деле, подставляя, получаем $f_{ij}(u) = u_0^{d-i}u_1^i \cdot u_0^{d-j}u_1^j - u_0^{d-i-1}u_1^{i+1} \cdot u_0^{d-j+1}u_1^{j-1} = 0$. Покажем, что

$$I_X = (f_{ij})_{0\leqslant i \leqslant j-2 \leqslant d-2}.$$

В самом деле, легко видеть, что пространство мономов вида $\langle x_0^p x_i x_d^{k-p-1}\rangle_{0\leqslant p\leqslant k-1,\ 1\leqslant i\leqslant d}$ проектируется изоморфно на компоненту степени k в факторкольце $\mathsf{k}[x]/(f_{ij})$. С другой стороны, при гомоморфизме $\mathsf{k}[x]/(f_{ij}) \to \mathsf{k}[u]$, моном $x_0^p x_i x_d^{k-p-1}$ переходит в $u_0^{pd}\cdot u_0^{d-i}u_1^i \cdot u_1^{d(k-p-1)} = u_0^{pd+d-i}u_1^{d(k-p-1)+i}$, а такие мономы составляют базис в компоненте степени dk в $\mathsf{k}[u]$. Следовательно, $\mathsf{k}[x]/(f_{ij})$ изоморфно d-му подкольцу Веронезе в $\mathsf{k}[u]$, и значит $I_X = (f_{ij})$.

Упражнение 1. Покажите, что аналогичные уравнения задают $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(U)$ при аналогичном вложении (которое, кстати, называется d-кратным вложением Веронезе) в $\mathbb{P}(S^dU)$.

Пусть $V = S^dU$ и рассмотрим в $\mathbb{P}(V)$ множество $X \subset \mathbb{P}(V)$ точек, являющихся тензорами ранга 1, то есть такими, что соответствующий элемент в S^dU является d-ой степенью элемента из U. Убедимся, что на X есть естественная структура схемы, причем такая, что $X \cong \mathbb{P}(U)$. Рассмотрим вложение пучков

$$U^*\otimes S^{d-1}U^*\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \to S^dU^*\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} = V^*\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$$

(над точкой $P\in\mathbb{P}(V)$ он задается формулами $u_i\otimes(u_0^pu_1^q) \mapsto u_0^{p+\delta_{0i}}u_1^{q+\delta_{1i}} = x_{q+\delta_{1i}} \mapsto x_{q+\delta_{1i}}(P)$). По сопряженности он дает морфизм пучков

$$\varphi : U^*\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \to S^{d-1}U\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$$

(задается формулами $u_i \mapsto \sum_{p+q=d-1} x_{q+\delta_{1i}}(P)e_0^pe_1^q$, где e_0, e_1 — двойственный базис в U). Ясно, что X — это в точности множество точек, в которых ранг φ равен 1. Отсюда на X сразу возникает схемная структура. В самом деле, условие на ранг — это зануление всех миноров порядка 2 (или, если без координат, это зануление морфизма $\Lambda^2\varphi : \Lambda^2U^*\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \to \Lambda^2S^{d-1}U\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(2)$). Согласно предыдущим вычислениям матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{d-2} & x_{d-1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{d-1} & x_d \end{pmatrix}^T,$$

а ее миноры равны f_{ij}. Значит X совпадает с d-кратно вложенным $\mathbb{P}(U)$.

С другой стороны, можно доказать это и не пользуясь тем, что мы знаем уравнения. Для этого удобно воспользоваться следующим полезным утверждением.

Лемма 2.1. *Пусть R — локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}\subset R$ и полем вычетов $\mathsf{k} = R/\mathfrak{m}$. Пусть $\varphi : R^n \to R^m$ — гомоморфизм свободных R-модулей, такой что $\Lambda^{r+1}\varphi = 0$ и ранг индуцированного морфизма $\bar\varphi : \mathsf{k}^n \to \mathsf{k}^m$ равен r. Тогда ядро, коядро и образ φ — свободные модули ранга $n-r$, r и $m-r$ соответственно.*

Доказательство. Так как ранг морфизма $\bar\varphi$ равен r, один из миноров порядка r его матрицы не равен нулю. Аналогичный минор матрицы φ тогда обратим (элемент локального кольца, не лежащий в максимальном идеале всегда обратим!), а значит меняя базисы в R^n и R^m можно считать, что матрица φ имеет вид

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1_r & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Условие $\Lambda^{r+1}\varphi = 0$ влечет $D = CB$ (равенство нулю окаймляющих миноров). Заметим, что

$$\begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ -C & 1_{m-r} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1_r & B \\ C & D \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1_r & -B \\ 0 & 1_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

значит заменами базисов в R^n и R^m матрица φ приводится к указанному виду. Отсюда лемма следует немедленно. □

Обозначим через L образ ограничения φ на X. Заметим, что по определению X ранг $\varphi_{|X}$ не превосходит 1. С другой стороны, он нигде не равен нулю, поэтому выполнены условия леммы. Значит L — линейное расслоение на X, причем у нас есть сюръекция $U^*\otimes\mathcal{O}_X \to L$. Такая сюръекция автоматически дает морфизм $\pi : X \to \mathbb{P}(U)$, такой что $\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(1) = L$. Чтобы проверить, что π и ν взаимно обратны надо убедиться в том, что $\operatorname{Im}\nu^*\varphi$ — это тавтологический морфизм $U^*\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(1)$. В самом деле, применяя ν^* к матрице φ получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} u_0^d & u_0^{d-1}u_1 & \dots & u_0^2u_1^{d-2} & u_0u_1^{d-1} \\ u_0^{d-1}u_1 & u_0^{d-2}u_1^2 & \dots & u_0u_1^{d-1} & u_1^d \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} u_0^{d-1} & u_0^{d-2}u_1 & \dots & u_0u_1^{d-2} & u_1^{d-1} \end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix} u_0 & u_1 \end{pmatrix}$$

откуда видно, что морфизм $\nu^*\varphi$ раскладывается в композицию $U^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(1) \to S^{d-1}U \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(d)$, причем первый морфизм сюръективен, а второй инъективен.

Упражнение 2. Проверьте, что те же рассуждения проходят для пространства U любой размерности.

Часть 3. Схема нулей и детерминантали

Пусть Y — схема, а E — векторное расслоение на Y (локально свободный пучок конечного ранга). Пусть $s \in \Gamma(Y, E)$ — глобальное сечение, а $Z_s \subset Y$ — множество точек, в которых s обращается в нуль (то есть таких точек y, что образ s в $E_{Y,y} = E \otimes \mathcal{O}_{Y,y}$ лежит в $E \otimes \mathfrak{m}_{Y,y}$). Покажем, что на множестве Z_s есть естественная структура замкнутой подсхемы.

В самом деле, рассмотрим морфизм пучков $E^* \to \mathcal{O}_Y$, задаваемый сечением s. Его образ I_s — подпучок в $\mathcal{O}_Y$, то есть пучок идеалов на Y. Заметим, что $\operatorname{supp} \mathcal{O}_Y/I_s$ — как раз Z_s. Действительно, это вопрос локальный, поэтому можно считать пучок E тривиальным, то есть $E \cong \mathcal{O}_Y^n$. Тогда $\Gamma(Y, E) = \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)^n$, таким образом сечение s — это набор $(f_1, \dots, f_n)$ функций на Y. Ясно, что $Z_s = \{ f_1 = \dots = f_n = 0 \}$. С другой стороны, $E^* \cong \mathcal{O}_Y^n$ и морфизм $s : E^* \to \mathcal{O}_Y$ задается формулой $(g_1, \dots, g_n) \mapsto f_1 g_1 + \dots + f_n g_n$, поэтому его образ — это как раз идеал $(f_1, \dots, f_n)$, носитель фактора по которому совпадает с Z_s.

Таким образом $Z_s \subset Y$ имеет естественную структуру замкнутой подсхемы. Эта подсхема называется схемой нулей сечения s.

Аналогично, пусть вместо сечения расслоения задан морфизм $s : E \to F$ расслоений. Так как

$$\operatorname{Hom}(E, F) \cong \Gamma(Y, E^* \otimes F),$$

мы можем рассматривать его как сечение расслоения $E^* \otimes F$. Схема нулей этого сечения также называется схемой нулей мофризма.

Предложение 3.1. *Пусть E — векторное расслоение на Y, $s \in \Gamma(Y, E)$, а S — произвольная схема. Тогда*

$$\operatorname{Map}(S, Z_s) = \{ f \in \operatorname{Map}(S, Y) \mid f^*s = 0 \},$$

где f^*s рассматривается как сечение расслоения f^*E.

Доказательство. Обозначим через i вложение $Z_s \to Y$. Заметим, что $i^*s = 0$. В самом деле, утверждение локально, поэтому можно считать, что $Y = \operatorname{Spec} A$, $E = A^m$, а $s = (s_1, \dots, s_m)$, $s_i \in A$. Тогда утверждение означает, что образы s_i в факторкольце $A/(s_1, \dots, s_m)$ равны нулю, что тавтологично. Отсюда сразу следует, что если $g : S \to Z_s$, а $f = i \circ g$, то $f^*s = g^*i^*s = 0$, поэтому $g \mapsto i \circ g$ задает отображение слева направо.

Пусть теперь f — морфизм $S \to Y$, такой что $f^*s = 0$. Покажем, что f единственным образом пропускается через i. Это утверждение также локально и означает следующее: если $A \to B$ — гомоморфизм колец, такой что при естественном морфизме $A^m \to A^m \otimes_A B$ набор $(s_1, \dots, s_m)$ переходит в ноль, то морфизм пропускается через $A/(s_1, \dots, s_m)$, что очевидно. $\square$

Схема нулей морфизма $\Lambda^r s : \Lambda^r E \to \Lambda^r F$ называется r-ой детерминанталью мофризма s и обозначается $D_r(s)$. Например, подмногообразие Веронезе является детерминанталью $D_1(\varphi)$.

Замечание 3.2. Внешней степенью свободного модуля над коммутативным кольцом называется подмодуль в его тензорной степени, состоящий из антиинвариантных тензоров. Ясно, что если $f : V \to W$ — линейное отображение, то отображение $f^{\otimes n} : V^{\otimes n} \to W^{\otimes n}$ коммутирует с действием симметрической группы, и поэтому переводит антиинвариантные тензоры в антиинвариантные тензоры, то есть индуцирует отображение $\Lambda^n f : \Lambda^n V \to \Lambda^n W$. При этом ясно, что матрица отображения $\Lambda^n f$ состоит из миноров матрицы f.

Следствие 3.3. *Пусть $s : E \to F$ — морфизм векторных расслоений на Y, а S — любая схема. Тогда*

$$\operatorname{Map}(S, D_k(s)) = \{ f \in \operatorname{Map}(S, Y) \mid \Lambda^{k+1} f^*s = 0 \}.$$

Пример 3.4. Пусть $Y = \mathbb{P}^1$ с координатами $(x : y)$, $E = \mathcal{O}(1)$, $s = x$. Тогда Z_s — точка $(0 : 1)$ с приведенной структурой. В самом деле, на аффинной окрестности точки $(1 : 0)$ при стандартной тривиализации сечение s представляется функцией 1 и поэтому нулей не имеет, а на аффинной окрестности точки $(0 : 1)$ с координатой t — функцией t, а факторкольцо $\mathsf{k}[t]/t\mathsf{k}[t]$ целостно.

Пример 3.5. Пусть $Y = \mathbb{P}^1$ с координатами $(x : y)$, $E = \mathcal{O}(2)$, $s = x^2$. Тогда Z_s — точка $(0 : 1)$ с неприведенной структурой. В самом деле, так же как и выше проверяется, что $(0 : 1)$ — единственный ноль s, при этом на аффинной окрестности точки $(0 : 1)$ сечение s представляется функцией t^2, а факторкольцо $\mathsf{k}[t]/t^2\mathsf{k}[t]$ содержит нильпотенты.

Важно понимать следующее. Пусть $Y = \mathbb{P}^n$ и $E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)^m$. Тогда $\Gamma(\mathbb{P}^n, E) = \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))^m$, поэтому сечение s представляется набором $(s_1, \dots, s_m)$ однородных многочленов степени d. Пусть $X = Z_s$. Тогда легко видеть, что $(s_1, \dots, s_m) \subset I_X$. В самом деле, по определению схемной структуры на локусе нулей имеем точную справа последовательность

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d)^m \xrightarrow{(s_1,\dots,s_m)} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow i_*\mathcal{O}_X$$

где $i : X \to \mathbb{P}^n$ — вложение. Подкручивая ее на d и переходя к глобальным сечениям, получаем комплекс

$$\mathsf{k}^m \xrightarrow{(s_1,\dots,s_m)} \mathsf{k}[x_0, \dots, x_n]_d \longrightarrow (A_X)_d$$

значит $s_i \in I_X$. Однако, **не верно**, что идеал I_X порождается многочленами $s_1, \dots, s_m$.

Пример 3.6. Пусть $Y = \mathbb{P}^1$ с координатами $(x : y)$, $E = \mathcal{O}(2)^2$, $s = (x^2, xy)$. Тогда Z_s — точка $(0 : 1)$ с неприведенной структурой, а $I_{Z_s} = x\mathsf{k}[x, y]$. В самом деле, так же как и выше проверяется, что $(0 : 1)$ — единственный ноль s, при этом на аффинной окрестности точки $(0 : 1)$ сечение s представляется функциями (t^2, t), а факторкольцо $k[t]/(t^2, t) = \mathsf{k}[t]/t\mathsf{k}[t]$, так что Z_s имеет приведенную структуру.

Другой способ убедится в этом такой. Заметим, что морфизм $s : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)^2 \xrightarrow{(x^2,xy)} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ представляется в виде композиции $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)^2 \xrightarrow{(x,y)} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \xrightarrow{x} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$, в которой первый морфизм сюръективен. Поэтому его образ равен образу второго морфизма.

Часть 4. Многообразие Сегре

Разобранный пример показывает, что многообразие тензоров минимального ранга обладает хорошими свойствами. Разберем еще пару примеров.

Рассмотрим множество X тензоров ранга 1 в $\mathbb{P}(U \otimes W)$. Покажем, что оно изоморфно произведению $\mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(W)$. Вначале построим морфизм $X \to \mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(W)$. Для этого заметим, что тавтологический морфизм $U^* \otimes W^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U \otimes W)} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U \otimes W)}(1)$ дает морфизм

$$\varphi : U^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U \otimes W)} \to W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U \otimes W)}(1).$$

Введем на X схемную структуру как $X = D_1(\varphi))$. Ясно, что на X ранг φ постоянен и равен единице, поэтому $L = \operatorname{Im} \varphi_{|X}$ — линейное расслоение. При этом имеем сюръекцию $U^* \otimes \mathcal{O}_X \to L$ и вложение $L \to W \otimes \mathcal{O}_X(1)$, которое после дуализации и подкрутки дает сюръекцию $W^* \otimes \mathcal{O}_X \to L^* \otimes \mathcal{O}_X(-1)$. Получаем морфизмы $p : X \to \mathbb{P}(U)$, $q : X \to \mathbb{P}(W)$, такие что $p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(1) = L$, $q^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(1) = L^* \otimes \mathcal{O}_X(1)$. Произведение морфизмов p и q дает морфизм $p \times q : X \to \mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(W)$.

Теперь построим морфизм в обратную сторону. Для этого заметим поднимем тавтологические морфизмы $U^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(1)$ и $W^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(1)$ на произведение и тензорно перемножим. Получим сюръекцию

$$(U \otimes W)^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(W)} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(W)}(1, 1) := p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(1) \otimes q^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(1),$$

которая задает морфизм $s : \mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(U \otimes W)$, который называется морфизмом Сегре. При этом ясно, что морфизм $s^*\varphi$ раскладывается в композицию $U^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(W)} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(W)}(1, 0) \to W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(W)}(1, 1)$ (где первый морфизм — это поднятие тавтологического морфизма на $\mathbb{P}(U)$, а второй — это подкрученное на $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(W)}(0, 1)$ поднятие тавтологического морфизма на $\mathbb{P}(W)$). Поэтому $p \circ s$ и $q \circ s$ — это проекции $\mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(W)$ на сомножители, а $(p \times q) \circ s = \mathrm{id}$. Остается воспользоваться следующим упражнением.

Упражнение 3. Покажите, что идеал I_X порожден квадриками $Q_{ij,kl} = x_{ij}x_{kl} - x_{il}x_{kj}$, где x_{ij} — базис в $(U \otimes W)^*$ двойственный к тензорному произведению базисов U и W. Проверьте, что градуированная алгебра $\mathsf{k}[x_{ij}]/I_X$ изоморфна диагональной компоненте биградуированной алгебры $\mathsf{k}[u_i] \otimes \mathsf{k}[w_j]$.

Упражнение 4. Найдите минимальный ранг тензоров в $\mathbb{P}(\Lambda^k W)$ и опишите многообразие таких тензоров.