Грассманианы

Часть 1. Грассманиан

Рассмотрим проективное пространство $\mathbb{P}(\Lambda^k W)$ и множество поливекторов минимально ранга. Заметим, что для поливектора $\lambda \in \Lambda^k W$ минимальный ранг равен k, причем он достигается в точности на формах, лежащих в одномерных подпространствах $\Lambda^k U \subset \Lambda^k W$, где $U \subset W$ — подпространство размерности k. В самом деле, по определению ранг λ — это ранг r морфизма свертки $W^* \xrightarrow{\lambda} \Lambda^{k-1} W$, то есть коразмерность его ядра. В силу кососимметричности λ, ясно что $\lambda \in \Lambda^k(K^\perp) \subset \Lambda^k W$, где $K^\perp \subset W$ — аннулятор K. Поэтому при $\lambda \neq 0$ должно быть $\dim K^\perp \geqslant k$, откуда $r = \operatorname{codim} K = \dim K^\perp \geqslant k$, а если достигается равенство, то $\lambda \in \Lambda^k U$, где $U = K^\perp$.

Рассмотрим множество X всех поливекторов ранга k в пространстве $\mathbb{P}(\Lambda^k W)$. Тавтологический морфизм $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Lambda^k W)}(-1) \to \Lambda^k W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Lambda^k W)}$ дает морфизм

$$\varphi : \Lambda^{k-1} W^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Lambda^k W)}(-1) \to W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Lambda^k W)}.$$

Введем на X схемную структуру занулением $\Lambda^{k+1}\varphi$ (таким образом, X — детерминанталь морфизма φ). Ясно, что на X ранг φ постоянен и равен k, поэтому $\mathcal{U} = \operatorname{Im} \varphi_{|X}$ — расслоение ранга k. Обозначим также $W/\mathcal{U} := \operatorname{Coker} \varphi_{|X}$ и $\mathcal{U}^\perp := (W/\mathcal{U})^*$. Многообразие X называется грассманианом k-мерных подпространств в W и обозначается $\mathsf{Gr}(k, W)$ (или $\mathsf{Gr}(k, n)$, где $n = \dim W$). Расслоения $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}^*$ называются тавтологическим подрасслоением и двойственным тавтологическим расслоением, а расслоения $W/\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}^\perp$ — тавтологическим факторрасслоением и расслоением аннуляторов. По определению на $\mathsf{Gr}(k, W)$ имеем точные последовательности расслоений

$$0 \to \mathcal{U} \to W \otimes \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(k,W)} \to W/\mathcal{U} \to 0 \qquad \text{и} \qquad 0 \to \mathcal{U}^\perp \to W^* \otimes \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(k,W)} \to \mathcal{U}^* \to 0.$$

Вложение $\mathsf{Gr}(k, W) \to \mathbb{P}(\Lambda^k W)$ называется вложением Плюккера.

Предложение 1.1. *Пусть S — произвольная схема. Тогда*

$$\operatorname{Map}(S, \mathsf{Gr}(k, W)) = \{\, (E, \varepsilon) \mid E \text{ — расслоение ранга } k \text{ на } S,\ \varepsilon : E \to W \otimes \mathcal{O}_S \text{ — вложение расслоений} \,\}$$

(пары (E, ε) и (E', ε)) эквивалентны, если существует изоморфизм $\xi : E \to E'$, такой что $\epsilon = \epsilon' \circ \xi$). При этом композиция $S \xrightarrow{(E,\varepsilon)} \mathsf{Gr}(k, W) \longrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^k W)$ задается вложением $\Lambda^k E \xrightarrow{\Lambda^k \varepsilon} \Lambda^k W \otimes \mathcal{O}_S$.

Доказательство. Морфизму $f : S \to \mathsf{Gr}(k, W)$ сопоставим вложение $f^*\mathcal{U} \to f^*(W \otimes \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(k,W)}) = W \otimes \mathcal{O}_S$. Обратно, пусть (E, ε) расслоение с вложением в $W \otimes \mathcal{O}_S$. Рассмотрим морфизм

$$\Lambda^k \varepsilon : \Lambda^k E \to \Lambda^k W \otimes \mathcal{O}_S.$$

Ясно, что $\Lambda^k \varepsilon$ — вложение линейного подрасслоения, поэтому существует морфизм $\bar{f} : S \to \mathbb{P}(\Lambda^k W)$, такой что $\bar{f}^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Lambda^k W)}(-1) \cong \Lambda^k E$. При этом очевидно, что морфизм $\bar{f}^* \varphi : \Lambda^{k-1} W^* \otimes \Lambda^k E \to W \otimes \mathcal{O}_S$ раскладывается в композицию

$$\Lambda^{k-1} W^* \otimes \Lambda^k E \xrightarrow{\Lambda^{k-1}\varepsilon^*} \Lambda^{k-1} E^* \otimes \Lambda^k E = E \xrightarrow{\varepsilon} W \otimes \mathcal{O}_S$$

Отсюда видно, что $\bar{f}^* \Lambda^{k+1} \varphi = 0$, так как φ пропускается через расслоение E ранга k, так что $\bar{f}$ пропускается через морфизм $f : S \to \mathsf{Gr}(k, W)$, и что обратный образ вложения $\mathcal{U} \to W \otimes \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(k,W)}$ совпадает с исходным морфизмом $\varepsilon : E \to W \otimes \mathcal{O}_S$. $\square$

Следствие 1.2. *Пусть* $\dim W = n$. *Тогда* $\mathsf{Gr}(k, W) \cong \mathsf{Gr}(n - k, W^*)$, $\mathsf{Gr}(1, W) \cong \mathbb{P}(W)$, $\mathsf{Gr}(n-1, W) \cong \mathbb{P}(W^*)$.

Доказательство. В самом деле, вложение $\mathcal{U}^\perp \to W^* \otimes \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(k,W)}$ задает морфизм $\mathsf{Gr}(k, W) \to \mathsf{Gr}(n - k, W^*)$. Обратный морфизм строится аналогично. Далее, тавтологическое расслоение на $\mathsf{Gr}(1, W)$ линейно, поэтому вложение $\mathcal{U} \to W \otimes \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(1,W)}$ задает морфизм $\mathsf{Gr}(1, W) \to \mathbb{P}(W)$, а вложение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1) \to W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}$ — морфизм $\mathbb{P}(W) \to \mathsf{Gr}(1, W)$, которые очевидно взаимно обратны. Третий изоморфизм является немедленным следствием двух первых. $\square$

Часть 2. Уравнения Плюккера

Опишем теперь идеал I_X. По определению, X — схема нулей

$$\Lambda^{k+1}\phi \in \Gamma(\mathbb{P}(\Lambda^k W), \Lambda^{k+1}\Lambda^{k-1}W \otimes \Lambda^{k+1}W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Lambda^k W)}(k+1)),$$

следовательно пучок идеалов $\mathcal{I}_X \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Lambda^k W)}$ порождается образом пространства $\Lambda^{k+1}\Lambda^{k-1}W^* \otimes \Lambda^{k+1}W^*$ в $\Gamma(\mathbb{P}(\Lambda^k W), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Lambda^k W)}(k+1)) = S^{k+1}(\Lambda^k W^*)$ (иначе говоря, X высекается гиперповерхностями степени $k+1$). Однако, на самом деле можно показать, что X высекается даже квадриками.

Предложение 2.1. *Грассманиниан $\mathsf{Gr}(k, W)$ в $\mathbb{P}(\Lambda^k W)$ является схемой нулей композиции морфизмов*

$$\psi : \Lambda^{k-1}W^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Lambda^k W)}(-1) \to W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Lambda^k W)} \to \Lambda^{k+1}W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Lambda^k W)}(1),$$

где первый морфизм совпадает с φ, а второй получается из морфизма $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Lambda^k W)}(-1) \to \Lambda^k W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Lambda^k W)}$ подкруткой и умножением на W.

Доказательство. Основой доказательства является следующий факт. Пусть $\lambda \in \Lambda^k W$. Тогда отображение умножения на λ из W в $\Lambda^{k+1}W$ имеет ранг не меньше $n-k$, причем ранг $n-k$ достигается ровно для разложимых поливекторов. В самом деле, пусть вектор w лежит в ядре умножения на λ, то есть $w \wedge \lambda = 0$. Пусть $W' = W/\mathsf{k}w$, то есть существует точная последовательность $0 \to \mathsf{k}w \to W \to W' \to 0$. Переходя к внешним степеням, получаем последовательность $0 \to \Lambda^{k-1}W' \wedge w \to \Lambda^k W \to \Lambda^k W' \to 0$ (морфизм $- \wedge w : \Lambda^{k-1}W \to \Lambda^k W$ очевидно пропускается через $\Lambda^{k-1}W'$, на котором является вложением). Таким образом имеем диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Lambda^{k-1}W' \wedge w \arrow[r] & \Lambda^k W \arrow[r] \arrow[d, "\wedge w"] & \Lambda^k W' \arrow[r] \arrow[dll, dotted] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Lambda^k W' \wedge w \arrow[r] & \Lambda^{k+1}W \arrow[r] & \Lambda^{k+1}W' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Согласно сделанным выше замечаниям ядро морфизма $\wedge w$ равно $\Lambda^{k-1}W' \wedge w$, что означает существование $\lambda' \in \Lambda^{k-1}W$, такого что $\lambda = \lambda' \wedge w$. Пользуясь этим фактом заключаем, что если $K = \mathrm{Ker}(- \wedge \lambda)$ имеет размерность k, то $\lambda \in \Lambda^k K \subset \Lambda^k W$, а больше чем k размерность быть не может.

Таким образом, размерность ядра второго морфизма в определении ψ не превосходит k. С другой стороны, как было показано раньше, размерность образа первого морфизма — не меньше чем k. Значит на схеме нулей Z_ψ обе размерности равны k, а занчит образ первого (или ядро второго морфизма на Z_ψ является расслоением ранга k, вложенным в $W \otimes \mathcal{O}_{Z_\psi}$. Это задает морфизм $Z_\psi \to \mathsf{Gr}(k, W)$, причем такой что композиция с вложением $\mathsf{Gr}(k, W) \to \mathbb{P}(\Lambda^k W)$. Иначе говоря, $Z_\psi \subset \mathsf{Gr}(k, W)$.

Наоборот, как мы видели при ограничении на $\mathsf{Gr}(k, W)$ первый из морфизмов, входящих в определение ψ, факторизуется как $\lambda^{k-1}W^* \otimes \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(k,W)}(-1) \to \mathcal{U} \to W \otimes \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(k,W)}$. С другой стороны, ясно, что композиция $\mathcal{U} \to W \otimes \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(k,W)} \to \Lambda^{k+1}W \otimes \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(k,W)}(1)$ представляется также в виде

$$\mathcal{U} \to \Lambda^{k+1}U \otimes \Lambda^k \mathcal{U}^* \to \Lambda^{k+1}W \otimes \Lambda^k \mathcal{U}^* \cong \Lambda^{k+1}W \otimes \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(k,W)}(1).$$

Но $\Lambda^{k+1}U = 0$, значит $\psi_{|\mathsf{Gr}(k,W)} = 0$, откуда следует, что морфизм $\mathsf{Gr}(k, W) \to \mathbb{P}(\Lambda^k W)$ пропускается через Z_ψ, то есть $\mathsf{Gr}(k, W) \subset Z_\psi$. Значит $\mathsf{Gr}(k, W) = Z_\psi$. $\square$

Морфизм ψ соответствует сечению расслоения $\Lambda^{k-1}W \otimes \Lambda^{k+1}W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Lambda^k W)}(2)$, то есть набору квадрик, являющихся образами отображения $\Lambda^{k-1}W^* \otimes \Lambda^{k+1}W^* \to S^2(\Lambda^2 W^*)$. Согласно определению морфизма ψ, оно задается как композиция $\Lambda^{k-1}W^* \otimes \Lambda^{k+1}W^* \to \Lambda^{k-1}W^* \otimes W^* \otimes \Lambda^k W^* \to \Lambda^k W^* \otimes \Lambda^k W^* \to S^2(\Lambda^k W^*)$. В частности, при этом отображении

$$e_{i_1 \dots i_{k-1}} \otimes e_{j_1 \dots j_{k+1}} \mapsto \sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s-1} x_{i_1 \dots i_{k-1} j_s} x_{j_1 \dots j_{s-1} j_{s+1} \dots j_{k+1}} =: Q_{i_1, \dots, i_{k-1}; j_1, \dots, j_{k+1}}(x).$$

Квадрики $Q_{i_1, \dots, i_{k-1}; j_1, \dots, j_{k+1}}$ называются квадриками Плюккера.

Пример 2.2. Пусть $k=2$, $n=4$. Тогда

$$Q_{1;2,3,4} = x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23}, \qquad Q_{2;1,3,4} = -x_{12}x_{34} - x_{23}x_{14} + x_{24}x_{13} = -Q_{1;2,3,4}$$

Аналогично $Q_{3;1,2,4} = -Q_{4;1,2,3} = Q_{1;2,3,4}$. С другой стороны, $Q_{1;1,2,3} = 0 - x_{12}x_{13} + x_{13}x_{12} = 0$. Аналогично равны нулю и все остальные квадрики. Таким образом $\mathsf{Gr}(2,4) \subset \mathbb{P}^5$ — квадрика. Кстати, любая невырожденная квадрика в $\mathbb{P}^5$ над алгебраически замкнутым полем характеристики большей двух приводится к плюккеровому виду, так что любая такая квадрика изоморфна грассманиану $\mathsf{Gr}(2,4)$.

Замечание 2.3. Легко видеть, что если $\{ i_1, \dots, i_{k-1} \} \subset \{ j_1, \dots, j_{k+1} \}$, то $Q_{i_1,\dots,i_{k-1};j_1,\dots,j_{k+1}} = 0$.

Пример 2.4. Пусть $k=2$, $n=5$. Тогда

$$Q_{1;2,3,4} = x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23},\ Q_{1;2,3,5} = x_{12}x_{35} - x_{13}x_{25} + x_{15}x_{23},\ Q_{1;2,4,5} = x_{12}x_{45} - x_{14}x_{25} + x_{15}x_{24},$$
$$Q_{1;3,4,5} = x_{13}x_{45} - x_{14}x_{35} + x_{15}x_{34}, \qquad Q_{2;3,4,5} = x_{23}x_{45} - x_{24}x_{35} + x_{25}x_{34}.$$

Остальные квадрики либо совпадают с этими, либо нулевые, т.е. $\mathsf{Gr}(2,5) \subset \mathbb{P}^9$ — пересечение пяти квадрик.

Часть 3. Локальная структура

Опишем теперь локальное строение грассманиана. Для этого рассмотрим пересечение $\mathsf{Gr}(k,W)$ с аффинной картой в $\mathbb{P}(\Lambda^k W)$, заданной неравенством $x_{12\dots k} \neq 0$.

Лемма 3.1. *Пусть V — векторное пространство, а $\mathbb{A}(V) = \operatorname{Spec} S^\bullet(V^*)$ — аффинное. Тогда*

$$\operatorname{Map}(S, \mathbb{A}(V)) = \Gamma(S, V \otimes \mathcal{O}_S).$$

Доказательство. Так как $\mathbb{A}(V)$ аффинно, $\operatorname{Map}(S,\mathbb{A}(V)) = \operatorname{Hom}_{\mathrm{alg}}(S^\bullet(V^*), A_S)$, где $A_S = \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ — координатная алгебра. Так как $S(V^*)$ — свободная коммутативная алгебра, $\operatorname{Hom}_{\mathrm{alg}}(S^\bullet(V^*), A_S) = \operatorname{Hom}(V^*, A_S) = V \otimes A_S = \Gamma(S, V \otimes \mathcal{O}_S)$. □

Предложение 3.2. *Пересечение $X := \mathsf{Gr}(k,W) \cap \{ x_{12\dots k} \neq 0 \}$ изоморфно аффинному пространству $\mathbb{A}^{k(n-k)}$.*

Доказательство. Выберем разложение в прямую сумму $W = U_0 \oplus U_1$, так что $\dim U_0 = k$, $\dim U_1 = n-k$, где $U_1 = \{ x_1 = \dots = x_k = 0 \}$, и построим морфизм $\mathbb{A}^{k(n-k)} = \operatorname{Hom}(U_0, U_1) \to \mathsf{Gr}(k,W)$. Для этого рассмотрим тавтологическое сечение $s : \mathcal{O}_{\operatorname{Hom}(U_0,U_1)} \to \operatorname{Hom}(U_0,U_1) \otimes \mathcal{O}_{\operatorname{Hom}(U_0,U_1)}$. Оно индуцирует морфизм расслоений $U_0 \otimes \mathcal{O}_{\operatorname{Hom}(U_0,U_1)} \to U_1 \otimes \mathcal{O}_{\operatorname{Hom}(U_0,U_1)}$ и далее морфизм

$$U_0 \otimes \mathcal{O}_{\operatorname{Hom}(U_0,U_1)} \xrightarrow{(1,s)^T} (U_0 \oplus U_1) \otimes \mathcal{O}_{\operatorname{Hom}(U_0,U_1)} = W \otimes \mathcal{O}_{\operatorname{Hom}(U_0,U_1)}.$$

Ясно, что ранг этого морфизма во всех точках равен k, так что он задает морфизм $\operatorname{Hom}(U_0,U_1) \to \mathsf{Gr}(k,W)$. При этом композиция этого морфизма с плюккеровым вложением задается минорами матрицы $(1,s)^T$. Первый из этих миноров равен 1, поэтому образ отображения содержится в X.

Обратно, детерминант композиции $\mathcal{U}_{|X} \to W \otimes \mathcal{O}_X \to U_0 \otimes \mathcal{O}_X$ очевидно равен $x_{12\dots k}$, поэтому она является изоморфизмом. Пользуясь им, получим морфизм $U_0 \otimes \mathcal{O}_X \cong \mathcal{U}_{|X} \to W \otimes \mathcal{O}_X \to U_1 \otimes \mathcal{O}_X$, то есть сечение расслоения $\operatorname{Hom}(U_0,U_1) \otimes \mathcal{O}_X$. Оно дает морфизм $X \to \mathbb{A}(\operatorname{Hom}(U_0,U_1)) = \mathbb{A}^{k(n-k)}$.

Построенные отображения очевидно взаимно обратны. □

Поскольку множества $x_{i_1 i_2 \dots i_k} \neq 0$ покрывают все $\mathbb{P}(\Lambda^k W)$, заключаем что $\mathsf{Gr}(k,W)$ покрывается открытыми подмножествами, каждое из которых изоморфно аффинному пространству.

Часть 4. Относительный грассманиан

Точно так же как существует относительная версия проективного пространства — проективизация векторного расслоения, существует и относительная версия грассманиана.

Теорема 4.1. *Пусть E — векторное расслоение ранга n на схеме X. Для всякого $0 < k < n$ существует схема $\mathsf{Gr}_X(k,E)$, такая что*

$$\mathrm{Map}(S, \mathsf{Gr}_X(k,E)) \cong \left\{ (f,F,\varphi) \;\middle|\; \begin{array}{l} f \in \mathrm{Map}(S,X),\ F \text{ — расслоение ранга } k \text{ на } S, \\ \varphi : F \to f^*E \text{ — вложение расслоений} \end{array} \right\}$$

Тройки (f,F,φ) и (f',F',φ') эквивалентны, если $f' = f$ и существует изоморфизм $\xi : F \to F'$, т.ч. $\varphi' \circ \xi = \varphi$.

Заметим, что в случае $X = \operatorname{Spec} \mathsf{k}$ (в этом случае расслоение E — это просто векторное пространство W), отображение $f : S \to \operatorname{Spec} \mathsf{k}$ для всякой S существует и единственно, так что его можно исключить из правой части, а $f^*E \cong W \otimes \mathcal{O}_S$, поэтому $\mathsf{Gr}_{\operatorname{Spec} \mathsf{k}}(k,E) = \mathsf{Gr}(k,W)$.

Доказательство. Проделаем те же рассуждения, что и в абсолютном случае. Рассмотрим $\tilde{X} := \mathbb{P}_X(\Lambda^k E)$. Пусть $\pi : \tilde{X} \to X$ — проекция. Тавтологический морфизм $\mathcal{O}_{\tilde{X}/X}(-1) \to \pi^*\Lambda^k E$ индуцирует морфизм $\tilde{\psi} : \pi^*\Lambda^{k-1}E^* \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}/X}(-1) \to \pi^*E$, который на каждом слое совпадает с морфизмом из абсолютной ситуации. Отсюда следует, что ранг морфизма $\tilde{\psi}$ всегда не меньше k. Рассмотрим детерминанталь $Y = D_k(\tilde{\psi})$ и обозначим $p = \pi_{|Y}$. Ясно, что $\mathcal{U} = \operatorname{Im}(\tilde{\psi}_{|Y})$ — подрасслоение ранга k в $\pi^*E_{|Y} = p^*E$. Покажем, что Y — искомая схема.

В самом деле, если $g : S \to Y$ — морфизм, то $f = p \circ g$, $F = g^*\mathcal{U}$, и φ — обратный образ относительно g вложения $\mathcal{U} \to p^*E$, подходящая тройка. Обратно, для всякой тройки (f,F,φ) рассмотрим морфизм $\Lambda^k\varphi : \Lambda^k F \to f^*\Lambda^k E$. В силу универсального свойства проективизации расслоения, он индуцирует морфизм $\tilde{f} : S \to \mathbb{P}_X(\Lambda^k E)$, такой что $\pi \circ \tilde{f} = f$ и $\tilde{f}^*\mathcal{O}_{\tilde{X}/X}(-1) = \Lambda^k F$. При этом очевидно, что морфизм $\tilde{f}^*\psi : f^*\Lambda^{k-1}E^* \otimes \Lambda^k F \to f^*E$ раскладывается в композицию

$$f^*\Lambda^{k-1}E^* \otimes \Lambda^k F \xrightarrow{\Lambda^{k-1}\varphi^*} \Lambda^{k-1}F^* \otimes \Lambda^k F = F \xrightarrow{\varepsilon} f^*E$$

Отсюда видно, что $\tilde{f}^*\Lambda^{k+1}\psi = 0$, так как ψ пропускается через расслоение F ранга k, так что $\tilde{f}$ пропускается через морфизм $f : S \to \mathsf{Gr}_X(k,E)$, и что обратный образ вложения $\mathcal{U} \to p^*E$ совпадает с исходным морфизмом $\varphi : F \to f^*E$.

Взаимная обратность построенных морфизмов проверяется так же, как и в абсолютном случае. □

Заметим, что относительный грассманиан $\mathsf{Gr}_X(k,E)$ автоматически снабжен проекцией $\pi : \mathsf{Gr}_X(k,E) \to X$ и тавтологическими точными последовательностями векторных расслоений

$$0 \to \mathcal{U} \to \pi^*E \to E/\mathcal{U} \to 0, \qquad 0 \to \mathcal{U}^\perp \to \pi^*E^* \to \mathcal{U}^* \to 0.$$

Это можно увидеть либо из конструкции грассманиана, либо вывести следующим способом. Чтобы построить $\mathcal{U}$, воспользуемся теоремой **??**. Возьмем $S = \mathsf{Gr}_X(k,E)$ и рассмотрим тождественный морфизм $S \to \mathsf{Gr}_X(k,E)$. Тогда в силу теоремы ему соответствует тройка, состоящая из морфизма $S \to X$ (это и есть π), расслоения на S (это и есть $\mathcal{U}$) и вложения $\mathcal{U} \to \pi^*E$. Остается обозначить $E/\mathcal{U} := \pi^*E/\mathcal{U}$, $\mathcal{U}^\perp = (E/\mathcal{U})^*$.

Упражнение 1. Докажите, что $\mathsf{Gr}_X(1,E) \cong \mathbb{P}_X(E)$, $\mathsf{Gr}_X(n-1,E) \cong \mathbb{P}_X(E^*)$, $\mathsf{Gr}_X(k,E) \cong \mathsf{Gr}_X(n-k,E^*)$, где n — ранг E.

Часть 5. Многообразия инцидентности

Многообразия инцидентности — это довольно широкий класс многообразий. Рассмотрим типичный пример. Пусть W — векторное пространство размерности n. Полным флагом в W называется последовательность подпространств

$$0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset U_{n-1} \subset W,$$

такая что $\dim U_i = i$.

Теорема 5.1. *Существует многообразие $\mathsf{Fl}(W)$, такое что*

$$\mathrm{Map}(S, \mathsf{Fl}(W)) = \left\{ 0 \to F_1 \to F_2 \to \cdots \to F_{n-1} \to W \otimes \mathcal{O}_S \;\middle|\; \begin{array}{l} F_i \text{ — расслоение ранга } i, \\ F_i \to F_{i+1} \text{ — вложение расслоений} \end{array} \right\}$$

Доказательство. Рассмотрим произведение грассманианов $X = \mathsf{Gr}(1,W) \times \mathsf{Gr}(2,W) \times \cdots \times \mathsf{Gr}(n-1,W)$ и обозначим через $\mathcal{U}_i$ обратный образ тавтологического расслоения с $\mathsf{Gr}(i,W)$ на X. Обозначим через φ_i композицию морфизмов

$$\varphi_i : \mathcal{U}_i \to W \otimes \mathcal{O}_X \to W/\mathcal{U}_{i+1}.$$

Покажем, что $Z = Z_{\varphi_1 \oplus \varphi_2 \oplus \cdots \oplus \varphi_{n-2}} = Z_{\varphi_1} \cap Z_{\varphi_2} \cap \cdots \cap Z_{\varphi_{n-2}}$ — искомое многообразие. В самом деле, рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{U}_i \arrow[r] \arrow[drr, dashed] & W \otimes \mathcal{O}_Z \arrow[r] \arrow[d, equal] & W/\mathcal{U}_i \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{U}_{i+1} \arrow[r] & W \otimes \mathcal{O}_Z \arrow[r] & W/\mathcal{U}_{i+1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ясно, что пунктирный морфизм — это $(\varphi_i)_{|Z}$, что равно нулю по определению Z. Поэтому существует стрелка $\mathcal{U}_i \to \mathcal{U}_{i+1}$, делающая левый квадрат коммутативным. Таким образом на Z возникает цепочка вложений расслоений $0 \to \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2 \to \cdots \to \mathcal{U}_{n-1} \to W \otimes \mathcal{O}_Z$. Если теперь $f : S \to Z$ — морфизм, применяя обратный образ получаем необходимую цепочку на S.

Обратно, пусть дано S и цепочка $0 \to F_1 \to F_2 \to \cdots \to F_{n-1} \to W \otimes \mathcal{O}_S$ вложений расслоений. Каждое из вложений $F_i \to W \otimes \mathcal{O}_S$ задает морфизм $f_i : S \to \mathsf{Gr}(i,X)$, такой что $f^*\mathcal{U}_i = F_i$. Произведение этих морфизмов дает морфизм $\tilde{f} : S \to X$. При этом очевидно, что $\tilde{f}^*\varphi_i = 0$, так как морфизм $\tilde{f}^*\varphi_i$ — это композиция $F_i \to W \otimes \mathcal{O}_S \to W \otimes \mathcal{O}_S/F_{i+1}$, а первая из стрелок пропускается через F_{i+1}. Значит морфизм $\tilde{f}$ пропускается через $f : S \to Z$. $\square$

Упражнение 2. Постройте универсальную цепочку расслоений на многообразии флагов.

Упражнение 3. Постройте многообразие частичных флагов $\mathsf{Fl}(i_1, i_2, \ldots, i_k; W)$ и докажите его универсальное свойство.

Упражнение 4. Докажите, что $\mathsf{Fl}(i_1, \ldots, i_k; W) \cong \mathsf{Fl}(n - i_k, \ldots, n - i_1; W^*)$. В частности $\mathsf{Fl}(W) \cong \mathsf{Fl}(W^*)$.

Упражнение 5. Докажите, что $\mathsf{Fl}(i_1, \ldots, i_k; W) \cong \mathsf{Gr}_{\mathsf{Fl}(i_1,\ldots,i_{k-1};W)}(i_k - i_{k-1}, W/\mathcal{U}_{i_{k-1}}) \cong \mathsf{Gr}_{\mathsf{Fl}(i_2,\ldots,i_k;W)}(i_1, \mathcal{U}_{i_2})$.

Упражнение 6. Постройте относительное многообразие флагов в расслоении.

Вот еще один пример многообразия инцидентности.

Упражнение 7. Докажите, что расслоенное произведение $X = \mathsf{Fl}(1,2;W) \times_{\mathsf{Gr}(2,W)} \mathsf{Fl}(1,2;W)$ параметризует тройки подпространств $U_1, U_1', U_2 \subset W$, таких что $\dim U_1 = \dim U_1' = 1$, $\dim U_2 = 2$. Опишите его универсальное свойство.