Гладкость

Часть 1. Регулярные кольца

Напомним вначале определение регулярных колец и обсудим их основные свойства.

Размерностью Крулля кольца A называется максимальное n, такое что существует строго возрастающая цепочка простых идеалов $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n \subset A$. Если A — целостная алгебра над полем k, а K — ее поле частных, то $\dim A = \mathrm{degtr} K/\mathsf{k}$. Кольцо называется равноразмерным размерности n, если все его неприводимые компоненты имеют размерность n.

Для нетерового равноразмерного кольца A, если $f \in A$, то $\dim A - 1 \leqslant \dim A/(f) \leqslant \dim A$, причем если f не является делителем нуля, то $\dim A/(f) = \dim A - 1$ и кольцо $A/(f)$ также является равноразмерностным.

Напомним, что локальное кольцо A с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ и полем вычетов k называется регулярным, если размерность k-векторного пространства $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ равна размерности Крулля кольца A:

$$\dim_{\mathsf{k}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim A.$$

При этом для произвольного кольца выполнено неравенство $\dim_{\mathsf{k}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \geqslant \dim A$.

Нам потребуется следующая теорема, которую мы пока доказывать не будем, так как для ее доказательства нужна гомологическая алгебра.

Теорема 1.1. *Если кольцо A регулярно, то всякая его локализация тоже регулярна.*

Также без доказательства пока оставим следующее утверждение (его можно найти в любом учебнике по коммутативной алгебре).

Теорема 1.2. *Всякое локальное регулярное кольцо целостное.*

Определение 1.3. Схема X называется регулярной (или неособой) в точке x, если локальное кольцо $\mathcal{O}_{X,x}$ регулярно. Точка, не являющаяся регулярной, называется особой. Схема X называется регулярной (неособой), если она регулярна во всех точках.

Предложение 1.4. *Множество регулярных точек схемы открыто. В частности, если схема регулярна во всех замкнутых точках, то она регулярна.*

Доказательство. Вопрос локален, так что можно считать, что $X = \mathrm{Spec}\, A$ аффинна. Достаточно показать, что множество особых точек замкнуто, то есть вместе с каждой точкой содержит все точки, лежащие в ее замыкании, то есть проверить, что если $A_{\mathfrak{p}}$ нерегулярно и $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$, то $A_{\mathfrak{q}}$ тоже нерегулярно. Но если $A_{\mathfrak{q}}$ регулярно, то $A_{\mathfrak{p}} = (A_{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{p}A_{\mathfrak{q}}}$ тоже регулярно в силу теоремы — противоречие. □

Таким образом регулярность схемы достаточно проверять только в замкнутых точках.

Предложение 1.5. *Всякая регулярная схема является несвязным объединением своих неприводимых компонент.*

Доказательство. Если две неприводимые компоненты пересекаются в точке, то локальное кольцо этой точки не является целостным, а значит нерегулярно. □

Часть 2. Слои пучка дифференциалов

Оказывается, регулярность характеризуется через пучок дифференциалов. Напомним, что если X — схема над k, то пучок дифференциалов $\Omega_{X/\mathsf{k}}$ характеризуется тем, что для любого открытого аффинного подмножества $\mathrm{Spec}\, A \subset X$ его ограничение соответствует модулю $\Omega_{A/\mathsf{k}}$.

Предложение 2.1. *Пусть A — локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ и полем вычетов $\mathsf{k} = A/\mathfrak{m}$. Если существует вложение $\mathsf{k} \subset A$, композиция которого с проекцией $A \to \mathsf{k}$ тождественна, то последовательность $0 \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \Omega_{A/\mathsf{k}} \otimes_A \mathsf{k} \to \Omega_{\mathsf{k}/\mathsf{k}} \to 0$ точна. В частности*

$$\Omega_{A/\mathsf{k}} \otimes_A \mathsf{k} \cong \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2.$$

Доказательство. Построим морфизм $\Omega_{A/\mathsf{k}} \otimes_A \mathsf{k} \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ — это то же самое, что построить дифференцирование $A \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Сейчас мы это сделаем.

Обозначим через π композицию $A \to \mathsf{k} \to A$. Это гомоморфизм кольца A в себя. Положим $\rho(x) := x - \pi(x)$. Тогда $\rho(x) \in \mathfrak{m}$ для всех $x \in A$. Заметим, что

$$\pi(xy) + \rho(xy) = xy = (\pi(x) + \rho(x))(\pi(y) + \rho(y)) = \pi(x)\pi(y) + \pi(x)\rho(y) + \pi(y)\rho(x) + \rho(x)\rho(y).$$

Замечая, что $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$ и подставляя $\pi(x) = x - \rho(x)$, $\pi(y) = y - \rho(y)$, получаем

$$\rho(xy) - x\rho(y) - y\rho(x) = -\rho(x)\rho(y) \in \mathfrak{m}^2,$$

значит композиция $\bar{\rho} : A \xrightarrow{\rho} \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ — дифференцирование. Заметим, что если $f : \Omega_{A/\mathsf{k}} \otimes_A \mathsf{k} \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ — соответствующий гомоморфизм, то $f(dx \otimes 1) = \bar{\rho}(x)$. Так как для $x \in \mathfrak{m}$ имеем $\rho(x) = x$, то композиция $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \xrightarrow{d} \Omega_{A/\mathsf{k}} \otimes_A \mathsf{k} \xrightarrow{f} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ — тождественна, откуда сразу следует точность последовательности.

Второе утверждение вытекает из $\Omega_{\mathsf{k}/\mathsf{k}} = 0$. $\square$

Замечание 2.2. Условия предложения выполнены, если A — алгебра над k (в этом случае, по определению существует вложение $\mathsf{k} \to A$).

Конечно-порожденное расширение полей K/k называется сепарабельно порожденным, если его можно представить как последовательность чисто трансцендентного расширения K_0/k и сепарабельного алгебраического расширения K/K_0.

Упражнение 1. Покажите, что если расширение K/k сепарабельно порождено, то $\dim_K \Omega_{K/\mathsf{k}} = \operatorname{degtr} K/\mathsf{k}$.

Упражнение 2. Пусть k — совершенное поле. Покажите, что всякое конечно порожденное расширение поля k сепарабельно порождено. Указание: см. Зариский-Самюэль, теорема 31 (стр. 105).

Предложение 2.3. *Пусть X — целая схема размерности n над алгебраически замкнутым полем k. Тогда следующие свойства эквивалентны:*

(i) *для всех замкнутых точек $x \in X$ пространство $\Omega_{X/\mathsf{k}} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathsf{k}(x)$ имеет размерность n;*
(ii) *пучок $\Omega_{X/\mathsf{k}}$ локально свободен ранга n;*
(iii) *схема X регулярна.*

Замечание 2.4. На самом деле, утверждение верно над любым полем, если все поля $\mathsf{k}(x)$ сепарабельно порождены над k (например, если схема X сепарабельно порождена над k).

Доказательство. Импликация $(ii) \Rightarrow (i)$ очевидна. Докажем $(i) \Rightarrow (iii)$. Достаточно проверить, что локальное кольцо любой замкнутой точки регулярно. Пусть A — такое кольцо, $\mathfrak{m}$ — его максимальный идеал. Тогда $\Omega_{A/\mathsf{k}} \otimes_A \mathsf{k} \cong \mathsf{k}^n$, значит $\dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = n$, значит A регулярно.

Остается доказать $(iii) \Rightarrow (ii)$. Пусть схема X регулярна. Чтобы проверить, что $\Omega_{X/\mathsf{k}}$ локально свободен ранга $n = \dim X$, достаточно проверить, что для всякой замкнутой точки $x \in X$ слой пучка $\Omega_{X/\mathsf{k}}$ в этой точке является свободным модулем ранга n над локальным кольцом $A = \mathcal{O}_{X,x}$. Ясно, что этот модуль — $\Omega_{A/\mathsf{k}}$. Заметим про него два факта. Во-первых, если K — поле частных кольца A, то $\Omega_{A/\mathsf{k}} \otimes_A K = \Omega_{K/\mathsf{k}} = K^n$, так как поле k алгебраически замкнуто, а значит совершенно, а значит K/k сепарабельно порождено, а степень трансцендентности поля K равна размерности кольца A. Во-вторых, так как k алгебраически замкнуто, а точка x замкнута, то $\mathsf{k}(x) = \mathsf{k}$, так что $\Omega_{A/\mathsf{k}} \otimes_A \mathsf{k} = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \mathsf{k}^n$, так как X регулярна размерности n. Остается воспользоваться следующей леммой. $\square$

Лемма 2.5. *Пусть M — конечно порожденный модуль над целостным локальным кольцом A с полем вычетов k и полем частных K. Если $\dim_K M \otimes_A K = \dim_{\mathsf{k}} M \otimes_A \mathsf{k}$, то M свободен.*

Доказательство. Пусть $\dim_{\mathsf{k}} M \otimes_A \mathsf{k} = n$. Выберем n образующих в $M \otimes_A \mathsf{k} = M/\mathfrak{m}M$ и поднимем их в M. Получим морфизм $\varphi : A^n \to M$. По лемме Накаямы он сюръективен. С другой строны, тензорно домножая на K получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} A^n \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[d] \\ K^n \arrow[r] & M \otimes_A K \end{tikzcd}$$

Так как тензорное произведение точно справа, нижняя стрелка сюръективна. Так как $\dim_K M \otimes_A K = n$, она является изоморфизмом. Наконец, так как A целостно, естественный морфизм $A \to K$ является вложением, значит левая стрелка — вложение, значит композиция стрелок $A^n \to M \otimes_A K$ — вложение, а значит и морфизм $A^n \to M$ — вложение. Значит $M \cong A^n$. $\square$

Следствие 2.6. *Замкнутое подмногообразие $X \subset \mathbb{A}^n$ коразмерности c над алгебраически замкнутым полем k, заданное идеалом $I(X) = (f_1, \ldots, f_m)$, регулярно тогда и только тогда, когда ранг матрицы $J(f) := (\partial f_i / \partial x_j)$ равен c во всех замкнутых точках X.*

Доказательство. В самом деле, пусть $A := A_X = \mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_m)$. Имеем точную последовательность $A^m \xrightarrow{J(f)} A^n \longrightarrow \Omega_{A/\mathsf{k}} \longrightarrow 0$. Тензорно умножая на $\mathsf{k}(x)$ для замкнутой точки $x \in X$, мы видим, что размерность $\Omega_{A/\mathsf{k}} \otimes_A \mathsf{k}(x)$ равна $n - \mathrm{rank} J(f)_x$, откуда и получаем искомое условие. $\square$

Пример 2.7. Проверим, что гиперповерхность Ферма $X = \{ x_0^n + x_1^n + \cdots + x_N^n = 0 \} \subset \mathbb{P}^N$ регулярна, если $\mathrm{char}\, \mathsf{k}$ не делит n. Во-первых, заметим, что размерность X равна $N - 1$. Далее, переходя к аффинной карте, получаем, что $I_X = (1 + y_1^n + \cdots + y_N^n)$, так что $J(f) = (n y_1^{n-1}, \ldots, n y_N^{n-1})$. Если $\mathrm{char}\, \mathsf{k}$ не делит n, то ранг этой матрицы равен нулю, только в точке $(y_1, \ldots, y_N) = (0, \ldots, 0)$, которая не лежит на X, значит X регулярна. Если же $p = \mathrm{char}\, k$ делит n, то $x_0^n + \cdots + x_N^n = (x_0^{n/p} + \cdots + x_N^{n/p})^p$, так что X не приведена, и тем более не регулярна.

Таким образом, условие регулярности эквивалентно тому, что мы ожидаем от гладких многообразий.

Часть 3. Регулярные последовательности и комплекс Кошуля

Пусть A — кольцо, а M — модуль над ним. Последовательность элементов $x_1, \ldots, x_n$ в A называется регулярной последовательностью в M, если x_{i+1} не являятся делителем нуля в модуле $M/(x_1, \ldots, x_i)$ для всех $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Иначе говоря, если для всех таких i точна последовательность

$$0 \longrightarrow M/(x_1, \ldots, x_i) \xrightarrow{x_{i+1}} M/(x_1, \ldots, x_i) \longrightarrow M/(x_1, \ldots, x_{i+1}) \longrightarrow 0.$$

Если модуль не указан, то по умолчанию в качестве M берется A.

Пример 3.1. Последовательность $x_1, \ldots, x_m$ в $\mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ регулярна. А последовательность $x(x+y), y(x+y)$ в $\mathsf{k}[x, y]$ — нерегулярна, так как в $\mathsf{k}[x, y]/x(x+y)$ имеем $x \cdot y(x+y) = 0$.

Лемма 3.2. *Пусть A — равноразмерностное регулярное кольцо. Тогда последовательность $x_1, \ldots, x_m$ регулярна тогда и только тогда, когда $\dim A/(x_1, \ldots, x_m) = \dim A - m$.*

В одну сторону импликация очевидна — так как при факторизации по элементу, не являщемуся делителем нуля, размерность уменьшается ровно на единицу. В дпугую сторону мы пока доказывать не будем, так как проще будет это доказать в более общих условиях, то есть для произвольного Коэн-Маколеева кольца. Об этом мы поговорим в другой раз.

Пусть теперь E — векторное расслоение на равноразмерной регулярной (Коэн-Маколеевой) схеме X. Глобальное сечение $s \in \Gamma(X, E)$ называется регулярным, если $\dim Z_s = \dim X - \mathrm{rank}(E)$.

Возьмем открытое аффинное подмножество $\mathrm{Spec}\, A = U \subset X$, на котором расслоение E тривиализуется: $E_{|U} \cong \mathcal{O}_U^r$. При этой тривиализации сечение $s_{|U}$ соответствует последовательности $s_1, \ldots, s_r$ элементов кольца A. В силу предыдущей леммы s — регулрно, тогда и только тогда, когда каждая такая последовательность регулярна.

Рассмотрим теперь внешние степени расслоения E^*. Сечение s индуцирует морфизм свертки

$$\Lambda^{k+1}E^* \longrightarrow \Lambda^k E^* \otimes E^* \xrightarrow{1\otimes s} \Lambda^k E^*,$$

который мы также обозначим s. Если локально тривиализовать E, то на базисе $e_{i_0\dots i_k}$ в $\Lambda^{k+1}E^*$ этот морфизм действует по формулам

$$e_{i_0\dots i_k} \mapsto \sum_{j=0}^{k}(-1)^j s(e_{i_j}) e_{i_0\dots i_{j-1} i_{j+1}\dots i_k}.$$

Лемма 3.3. *Пусть E — расслоение ранга r, а $s \in \Gamma(X, E)$. Тогда последовательность*

$$(\star) \qquad 0 \to \Lambda^r E^* \xrightarrow{s} \Lambda^{r-1}E^* \xrightarrow{s} \cdots \xrightarrow{s} \Lambda^2 E^* \xrightarrow{s} E^* \xrightarrow{s} \mathcal{O}_X \to 0.$$

является комплексом.

Доказательство. Надо проверить, что композиция морфизмов равна нулю. Утверждение локально, поэтому можно считать, что расслоение тривиально, и морфизмы задаются приведенными выше формулами. После этого все проверяется непосредственно. □

Комплекс $(\star)$ называется комплексом Кошуля сечения s.

Предложение 3.4. *Если сечение s регулярно, то комплекс Кошуля ацикличен везде, кроме крайнего справа члена, когомология в котором изоморфна $\mathcal{O}_{Z_s}$ — структурному пучку схемы нулей.*

Доказательство. Докажем индукцией по рангу r расслоения E. Если $r = 0$ доказывать нечего. Пусть мы доказали для ранга $r-1$. Утверждение о точности локально, так что мы можем считать, что E тривиально, а сечение s соответствует регулярной последовательности $s_1, \dots, s_r$. Обозначим через F сумму первых $r-1$ слагаемых в E, а через t соответствующее сечение F, так что $E = F \oplus \mathcal{O}$. Тогда $\Lambda^k E^* = \Lambda^k F^* \oplus \Lambda^{k-1}F^*$. Заметим, что у нас получается точная тройка комплексов Кошуля:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \Lambda^{r-1}F^* \arrow[r, "t"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "t"] & \Lambda^2 F^* \arrow[r, "t"] \arrow[d] & F^* \arrow[r, "t"] \arrow[d] & \mathcal{O} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Lambda^r E^* \arrow[r, "s"] \arrow[d, equal] & \Lambda^{r-1}E^* \arrow[r, "s"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "s"] & \Lambda^2 E^* \arrow[r, "s"] \arrow[d] & E^* \arrow[r, "s"] \arrow[d] & \mathcal{O} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Lambda^{r-1}F^* \arrow[r, "t"] \arrow[d] & \Lambda^{r-2}F^* \arrow[r, "t"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "t"] & F^* \arrow[r, "t"] \arrow[d] & \mathcal{O} \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \\
 & 0 & 0 & & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Из леммы 3.2 следует, что сечение t регулярно, а функция s_n является регулярной функцией (не делителем нуля) на схеме нулей $Z_t \subset X$. Пользуясь леммой о змее и предположением индукции получаем точную последовательность

$$0 \to H^{-1}(\Lambda^\bullet E^*, s) \to \mathcal{O}_{Z_t} \xrightarrow{s_n} \mathcal{O}_{Z_t} \to H^0(\Lambda^\bullet E^*, s) \to 0$$

(то, что морфизм посередине — это s_n также следует из леммы о змее) и зануление остальных когомологий среднего комплекса. Наконец, поскольку s_n не является делителем нуля в $\mathcal{O}_{Z_t}$, средний морфизм — вложение, так что $H^{-1} = 0$, а $H^0 = \mathcal{O}_{Z_s}$. □

Часть 4. Конормальный пучок

Пусть $Y \subset X$ — замкнутая подсхема, $i : Y \to X$ — вложение, а $\mathcal{J}$ — ее пучок идеалов.

Лемма 4.1. *Существует точная последовательность*

$$(*) \qquad \mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \to i^*\Omega_{X/\mathsf{k}} \to \Omega_{Y/\mathsf{k}} \to 0.$$

Доказательство. Очевидно, что локальные последовательности склеиваются в глобальную. □

Пучок $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ называется конормальным пучком подсхемы Y.

Упражнение 3. Покажите, что $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \cong i^*\mathcal{J}$, где i — вложение $Y \to X$.

Предложение 4.2. *Пусть $Y \subset X$ — схема нулей сечения s векторного расслоения E ранга r на X. Если сечение s регулярно, то конормальный пучок локально свободен ранга r, точнее $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \cong i^*E^*$.*

Доказательство. Из комплекса Кошуля получаем точную справа последовательность
$$\Lambda^2 E^* \xrightarrow{s} E^* \to \mathcal{J} \to 0.$$
Применяя точный справа функтор i^* получаем точную справа последовательность
$$\Lambda^2 i^*E^* \xrightarrow{i^*s} i^*E^* \to i^*\mathcal{J} \to 0.$$
Но $i^*s = 0$, так как Y — схема нулей s, поэтому $i^*\mathcal{J} \cong i^*E^*$. □

Упражнение 4. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — гиперповерхность степени d. Докажите, что $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \cong \mathcal{O}_X(-d)$.

Обратное утверждение верно локально.

Предложение 4.3. *Пусть $Y \subset X$ — замкнутая подсхема, такая что конормальный пучок локально свободен ранга $r = \dim X - \dim Y$. Тогда локально Y является схемой нулей регулярного сечения векторного расслоения.*

Доказательство. В самом деле, возьмем произвольную точку $y \in Y$. Локально в окрестности точки y мы можем тривиализовать пучок $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ и (возможно еще раз уменьшив окрестность) поднять r его базисных сечений до сечений пучка $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$, то есть получить r функций $s_1, \dots, s_r$. Ясно, что морфизм $\mathcal{O}_X^r \to \mathcal{J}$, задаваемый этими функциями сюръективен в точке y, поэтому он сюръективен и в некоторой ее окрестности. Таким образом, в этой окрестности $Y = Z_{(s_1,\dots,s_r)}$ и так как $\dim Y = \dim X - r$, то $s = (s_1, \dots, s_r)$ — регулярное сечение расслоения $\mathcal{O}_X^r$, а Y — его схема нулей. □

Если замкнутая подсхема $Y \subset X$ локально является схемой нулей регулярной последовательности, то говорят, что Y — локально полное пересечение в X.

Следствие 4.4. *Замкнутая подсхема $Y \subset X$ является локально полным пересечением тогда и только тогда, когда конормальный пучок локально свободен ранга $r = \dim X - \dim Y$.*

Упражнение 5. Докажите, что конечное множество замкнутых точек в $\mathbb{P}^n$ является локально полным пересечением.

Теперь можно сказать, когда последовательность $(*)$ точна слева.

Предложение 4.5. *Пусть X — регулярная схема над совершенным полем k, E — векторное расслоение, s — его регулярное сечение, а $Y = Z_s$ — его схема нулей. Если Y приведена, то последовательность $(*)$ точна слева.*

Доказательство. Согласно предыдущему предложению, нам надо исследовать точность слева последовательности
$$0 \to i^*E^* \to i^*\Omega_{X/\mathsf{k}} \to \Omega_{Y/\mathsf{k}} \to 0.$$
Утверждение локально, поэтому можно считать, что $X = \operatorname{Spec} A$ и $Y = \operatorname{Spec} B$ — аффинны. Морфизм $i^*E^* \to i^*\Omega_{X/\mathsf{k}}$ является морфизмом свободных B-модулей. Заметим, что он является вложением тогда и только тогда, когда он является вложением после локализации в любом минимальном простом идеале. В самом деле, в одну сторону утверждение очевидно (так как функтор локализации точен). В другую сторону это сразу следует из диаграммы
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}\varphi \arrow[r] \arrow[d] & B^r \arrow[r] \arrow[d] & B^n \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \oplus_{\mathfrak{p}}(\operatorname{Ker}\varphi \otimes_B B_{\mathfrak{p}}) \arrow[r] & \oplus_{\mathfrak{p}} B_{\mathfrak{p}}^r \arrow[r] & \oplus_{\mathfrak{p}} B_{\mathfrak{p}}^n
\end{tikzcd}$$

где суммирование берется по всем минимальным простым идеалам $\mathfrak{p}$, так как ядро морфизма $B \to \oplus_{\mathfrak{p}} B_{\mathfrak{p}}$ содержится в пересечении минимальных простых идеалов, то есть в нильрадикале B, который по условию нулевой. Так как минимальные простые идеалы соответствуют общим точкам неприводимых компонент Y, то достаточно проверять точность в этих точках. Пусть y — такая точка. Тогда $\mathcal{O}_{Y,y}$ — поле $\mathsf{k}(y)$, поэтому при ограничении в точку y последовательность принимает вид $i^*E^* \otimes \mathsf{k}(y) \to i^*\Omega_{X/\mathsf{k}} \otimes \mathsf{k}(y) \to \Omega_{\mathsf{k}(y)/\mathsf{k}} \to 0$. Так как поле k совершенно, а $\dim Y = \dim X - \mathrm{rank} E = n - r$, так как s регулярно, то $\Omega_{\mathsf{k}(y)/\mathsf{k}} = \mathsf{k}(y)^{n-r}$. Таким образом наша последовательность имеет вид $\mathsf{k}(y)^r \to \mathsf{k}(y)^n \to \mathsf{k}(y)^{n-r} \to 0$. Но она точна в середине и справа, значит она точна также и слева. □

Упражнение 6. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — гиперповерхность степени d с уравнением f. Покажите, что Ω_X является когомологией комплекса

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-d) \xrightarrow{(\partial f/\partial x_i)} \mathcal{O}_X(-1)^{n+1} \xrightarrow{(x_i)} \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

в среднем члене.

Наконец, докажем следующую теорему.

Теорема 4.6. *Пусть X — регулярная схема над полем k, а $Y \subset X$ — неособая подсхема в X коразмерности r. Тогда Y — локально полное пересечение, а последовательность $(*)$ точна.*

Доказательство. Достаточно проверить, что Y — локально полное пересечение, так как точность следует из предыдущего предложения. Локализуем в произвольной точке Y. Получим сюръекцию $f : A \to B$ регулярных локальных колец, такую что $\dim A - \dim B = r$. Если $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ — максимальные идеалы, а $I = \mathrm{Ker}\, f$, то получаем точную последовательность

$$I/\mathfrak{m}I \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \to 0$$

векторных пространств. Ядро правого морфизма имеет размерность r. Выберем r образующих и поднимем их до элементов $x_1, \dots, x_r \in I$. Покажем, что они порождают I. В самом деле, пусть $B' = A/(x_1, \dots, x_r)$ и пусть $\mathfrak{n}'$ — максимальный идеал в B'. Тогда ясно, что $\dim \mathfrak{n}'/(\mathfrak{n}')^2 = n - r$, так что $\dim B' \leqslant n - r = \dim B$. С другой стороны, по построению B — факторкольцо кольца B', поэтому $\dim B \leqslant \dim B'$. Значит размерности равны и кольцо B' регулярно. Но нетривиальный фактор локального регулярного кольца всегда имеет строго меньшую размерность, значит $B' = B$ и $I = (x_1, \dots, x_r)$ — порождается r элементами. □