Коэн–Маколеевость

Часть 1. Функторы Tor и Ext

Пусть M — модуль над кольцом A. Проективной резольвентой модуля M называется комплекс $P_\bullet$ проективных A-модулей

$$\cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to 0,$$

такой что $H_0(P_\bullet) = M$, $H_{>0}(P_\bullet) = 0$.

Лемма 1.1. *Всякий A-модуль M имеет проективную резольвенту. Если $P_\bullet$ и $Q_\bullet$ — проективные резольвенты модулей M и N, а $f : M \to N$ — морфизм A-модулей, то существует морфизм резольвент $f_\bullet : P_\bullet \to Q_\bullet$ (то есть набор морфизмов $f_i : P_i \to Q_i$, коммутирующих с дифференциалами), такой что $H_0(f_\bullet) = f$. Если $f_\bullet, g_\bullet : P_\bullet \to Q_\bullet$ — два морфизма комплексов, такие что $H_0(f_\bullet) = H_0(g_\bullet)$, то между ними существует гомотопия, то есть набор морфизмов $h_i : P_i \to Q_{i+1}$, такой что $f_i - g_i = d^Q_{i+1} \circ h_i - h_{i-1} \circ d^P_i$.*

Доказательство. Все строится по индукции, используя следующее (определяющее) свойство проективных модулей — если P проективен, а $S \to T$ — эпиморфизм, то всякий морфизм $P \to T$ поднимается до морфизма $P \to S$ (иначе говоря, функтор $\mathrm{Hom}(P, -)$ точен не только слева, но и справа), а также тот факт, что на любой модуль можно сюръективно отобразить проективный (достаточно выбрать любую систему образующих в M и соответствующий ей морфизм из свободного модуля).

Итак, построим вначале резольвенту. Если первые k-шагов уже построены, остается построить сюръекцию $P_{k+1} \to \mathrm{Ker}(P_k \to P_{k-1})$, что очевидно можно. Теперь построим морфизм резольвент. Предположим, что $f_0, \dots, f_{k-1}$ уже построены. Так как $d^Q_{k-1} \circ f_{k-1} \circ d^P_k = 0$, то $f_{k-1} \circ d^P_k$ бъет из P_k в $\mathrm{Ker}\, d^Q_{k-1} = \mathrm{Im}\, d^Q_k$, а морфизм $Q_k \to \mathrm{Im}\, d^Q_k$ сюръективен, поэтому искомый f_k существует. Наконец, построим гомотопию. Предположим, что $h_0, \dots, h_{k-1}$ уже построены. Тогда $d^Q_k \circ (f_k - g_k - h_{k-1} \circ d^P_k) = (f_{k-1} - g_{k-1} - d^Q_k \circ h_{k-1} - h_{k-2} \circ d^P_{k-1}) \circ d^P_k = 0$, и далее рассуждаем как и выше. □

Определим функторы $\mathrm{Tor}_p(M, N)$ и $\mathrm{Ext}^p(M, N)$ следующим образом. Выберем для M проективную резольвенту $P_\bullet$ и рассмотрим комплексы $P_\bullet \otimes_A N$, $\mathrm{Hom}_A(P_\bullet, N)$ и положим

$$\mathrm{Tor}^A_p(M, N) = H_p(P_\bullet \otimes_A N), \qquad \mathrm{Ext}^p_A(M, N) = H^p(\mathrm{Hom}_A(P_\bullet, N)).$$

Лемма 1.2. *Построенные A-модули не зависят от выбора резольвент и функториальны и по M и по N.*

Доказательство. Начнем с функториальности. Пусть $P_\bullet$ и $P'_\bullet$ — проективные резольвенты для M и M', а $f : M \to M'$ — морфизм. По предыдщей лемме мы можем построить морфизм комплексов $f_\bullet : P_\bullet \to P'_\bullet$, который даст морфизмы комплексов $P_\bullet \otimes_A N \to P'_\bullet \otimes_A N$ и $\mathrm{Hom}_A(P'_\bullet, N) \to \mathrm{Hom}_A(P_\bullet, N)$, а затем и морфизмы их когомологий $\mathrm{Tor}^A_p(M, N) \to \mathrm{Tor}^A_p(M', N)$ и $\mathrm{Ext}^p_A(M', N) \to \mathrm{Ext}^p_A(M, N)$. Естественно, построенный морфизм $f_\bullet$ не единственен, но если $g_\bullet$ — другой такой морфизм, то существует гомотопия $h_\bullet$, которая индуцирует гомотопию и между морфизмами комплексов $P_\bullet \otimes_A N$ и $P'_\bullet \otimes_A N$, $\mathrm{Hom}_A(P'_\bullet, N)$ и $\mathrm{Hom}_A(P_\bullet, N)$, а гомотопные морфизмы очевидно дают одно и то же отображение на когомологиях. Отсюда сразу следует функториальность — если $g : M' \to M''$ еще один морфизм, а $g_\bullet : P'_\bullet \to P''_\bullet$ — его поднятие на резольвенту, то $g_\bullet \circ f_\bullet$ является поднятием морфизма $g \circ f$, а на когомологиях индуцирует как раз композицию морфизмов.

Теперь легко убедиться и в независимости от выбора резольвент. Если $P_\bullet$ и $P'_\bullet$ — две резольвенты для модуля M, то морфизм $\mathrm{id}_M : M \to M$ поднимается до морфизмов $f_\bullet : P_\bullet \to P'_\bullet$ и $g_\bullet : P'_\bullet \to P_\bullet$, причем композиции $f_\bullet \circ g_\bullet$ и $g_\bullet \circ f_\bullet$ тоже поднимают тождественные морфизмы, и поэтому гомотопны тождественным морфизмам комплексов. Отсюда видно, что ими индуцированные морфизмы на когомологиях взаимно обратны. □

Предложение 1.3. *(i)* $\mathrm{Tor}_0^A(M,N) \cong M \otimes_A N$, $\mathrm{Ext}^0_A(M,N) \cong \mathrm{Hom}_A(M,N)$.
(ii) Если M проективен, то $\mathrm{Tor}^A_{>0}(M,N) = \mathrm{Ext}^{>0}_A(M,N) = 0$*; если N проективен, то* $\mathrm{Tor}^A_{>0}(M,N) = 0$.
(iii) Всякая точная тройка $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ дает функториальные точные последовательности

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1(M',N) \to \mathrm{Tor}_1(M,N) \to \mathrm{Tor}_1(M'',N) \to M' \otimes_A N \to M \otimes_A N \to M'' \otimes_A N \to 0,$$
$$0 \to \mathrm{Hom}(M'',N) \to \mathrm{Hom}(M,N) \to \mathrm{Hom}(M',N) \to \mathrm{Ext}^1(M'',N) \to \mathrm{Ext}^1(M,N) \to \mathrm{Ext}^1(M',N) \to \dots$$

(iv) Всякая точная тройка $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ дает функториальные точные последовательности

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1(M,N') \to \mathrm{Tor}_1(M,N) \to \mathrm{Tor}_1(M,N'') \to M \otimes_A N' \to M \otimes_A N \to M \otimes_A N'' \to 0,$$
$$0 \to \mathrm{Hom}(M,N') \to \mathrm{Hom}(M,N) \to \mathrm{Hom}(M,N'') \to \mathrm{Ext}^1(M,N') \to \mathrm{Ext}^1(M,N) \to \mathrm{Ext}^1(M,N'') \to \dots$$

(v) $\mathrm{Tor}_p(M,N) \cong \mathrm{Tor}_p(N,M)$.

Доказательство. (i) Утверждение сразу следует из точности справа функтора тензорного произведения и точности слева функтора Hom.

(ii) Если M проективен, то можно взять тривиальную резольвенту $P_0 = M$, $P_{>0} = 0$. Для второй части достаточно заметить, что умножение на проективный модуль сохраняет точность комплекса.

(iii) Выберем резольвенту $P''_\bullet$. Затем построим резольвенту $P_\bullet$ с морфизмом $P_\bullet \to P''_\bullet$, продолжающим морфизм $M \to M''$, так чтобы он был сюръективен (на каждом шаге достаточно добавлять к P_k прямое слагаемое, сюръективно отображающееся на $\mathrm{Ker}(P''_k \to P''_{k-1})$). Положим $P'_k = \mathrm{Ker}(P_k \to P''_k)$. Легко видеть, что P'_k будут проективны (в самом деле, сюръекция $P_k \to P''_k$ расщепляется в силу проективности P''_k, поэтому $P_k \cong P''_k \oplus P'_k$, а значит P'_k проективен). По лемме о змее $P'_\bullet$ будет резолвентой для M'. Получаем почленно расщепимую точную тройку резолвент. Домножая ее на N (или применяя функтор $\mathrm{Hom}(-,N)$), получим посленно расщепимую точную тройку комплексов. Поэтому лемма о змее дает искомую длинную точную последовательность. Функториальность легко проверяется.

(iv) Аналогично.

(v) Надо проверить, что если $Q_\bullet$ — проективная резольвента для N, то $H_p(M \otimes_A Q_\bullet) = \mathrm{Tor}^A_p(M,N)$. Пусть $N_i = \mathrm{Im}\, d^Q_i$, так что возникают точные тройки $0 \to N_{i+1} \to Q_i \to N_i \to 0$, $N_0 = N$. Применяя к ним пункт (iv) и пункт (i) получаем точные последовательности

$$0 \to \mathrm{Tor}_1(M,N_i) \to M \otimes_A N_{i+1} \to M \otimes_A Q_i \to M \otimes_A N_i \to 0$$

и изоморфизмы $\mathrm{Tor}^A_{i+1}(M,N_i) = \mathrm{Tor}^A_i(M,N_{i+1})$ для $i > 0$. В конечном итоге, получаем диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & & & & 0 \arrow[d] & & & \\
 & & & & \mathrm{Tor}_{i+1}(M,N) \arrow[d] & & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}_{i+2}(M,N) \arrow[r] & M \otimes_A N_{i+2} \arrow[r] & M \otimes_A Q_{i+1} \arrow[r] \arrow[dr] & M \otimes_A N_{i+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 & & \\
 & & & & M \otimes_A Q_i \arrow[d] \arrow[dr] & & & \\
 & & 0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}_i(M,N) \arrow[r] & M \otimes_A N_i \arrow[r] \arrow[d] & M \otimes_A Q_{i-1} \arrow[r] & M \otimes_A N_{i-1} \arrow[r] & 0 \\
 & & & & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

в которой диагональные стрелки — дифференциалы в комплексе $M \otimes_A Q_\bullet$. Из диаграммы сразу видно, что $\mathrm{Coker}(M \otimes_A Q_{i+1} \to M \otimes_A Q_i) = M \otimes_A N_i$, поэтому когомология этого комплекса в степени i равна $\mathrm{Ker}(M \otimes_A N_i \to M \otimes_A Q_{i-1}) = \mathrm{Tor}^A_i(M,N)$. □

Замечание 1.4. Действия кольца A на $\mathrm{Tor}_p(M,N)$ (или на $\mathrm{Ext}^p(M,N)$), возникающие из действий A на M и N совпадают. В самом деле, они возникают из действий A на комплексе $P_\bullet \otimes_A N$ (соотв. $\mathrm{Hom}_A(P_\bullet, N)$), индуцированных действием A на $P_\bullet$ и на N соответственно, а они совпадают.

Замечание 1.5. Аналогом утверждения (v) для Ext является утверждение о том, что в результате замены N на инъективную резольвенту, применении функтора $\mathrm{Hom}_A(M,-)$ и вычислении когомологий также получатся $\mathrm{Ext}^p(M,N)$.

Часть 2. Ассоциированные идеалы

Лемма 2.1. *В нетеровом кольце количество минимальных простых идеалов конечно. Иначе говоря, у нетеровой схемы число неприводимых компонент конечно.*

Доказательство. Докажем геометрическую формулировку. Рассмотрим минимальное замкнутое подмножество $Z \subset X$, которое имеет бесконечное множество неприводимых компонент (в силу нетеровости такое существует, так как иначе можно было бы построить бесконечную убывающую цепочку замкнутых подмножеств). Ясно, что Z приводимо, то есть $Z = Z' \cup Z''$, при этом так как Z было минимальным, как Z', так и Z'' имеют конечное число неприводимых компонент. Значит то же верно и для Z. □

Пусть A — кольцо, M — A-модуль. Всякому элементу $0 \neq m \in M$ соответствует аннуляторный идеал

$$\mathrm{Ann}(m, M) = \mathrm{Ker}(A \xrightarrow{m} M) = \{\, a \in A \mid am = 0 \,\}.$$

Пересечение всех таких идеалов обозначается $\mathrm{Ann}(M)$ и называется аннулятором модуля. Замкнутая подсхема в $\mathrm{Spec}(A)$, соответствующая этому идеалу, называется носителем модуля M (или соответствующего ему пучка) и обозначается $\mathrm{supp}(M)$.

Простые идеалы вида $\mathrm{Ann}(m, M)$ называются ассоциированными идеалами модуля M. Множество ассоциированных идеалов модуля M обозначается $\mathsf{Ass}(M)$.

Пример 2.2.

- Если $\mathfrak{p} \subset A$ — простой идеал, то $\mathsf{Ass}(A/\mathfrak{p}) = \{\, \mathfrak{p} \,\}$.
- Пусть $A = \mathsf{k}[x, y]/(y^2, xy)$. Тогда $\mathsf{Ass}(A) = \{\, (y), (x, y) \,\}$.
- Пусть $A = \mathsf{k}[x]$, $M = \oplus_{a \in \mathsf{k}} A/(x - a)$. Тогда $\mathsf{Ass}(M) = \{\, (x - a) \,\}_{a \in \mathsf{k}}$.
- Пусть $A = \prod_{i=1}^{\infty} \mathsf{k}$. Тогда $\mathsf{Ass}(A) = \{\, \mathfrak{m}_i \,\}_{i=1}^{\infty}$, где $\mathfrak{m}_i$ — ядро проекции на i-ый сомножитель.

С геометрической точки зрения ассоциированные простые идеалы — это неприводимые компоненты носителей сечений пучка.

Лемма 2.3. *Если кольцо A нетерово, а модуль M конечно порожден, то $\mathsf{Ass}(M)$ непусто и конечно.*

Доказательство. Вначале проверим непустоту. Для этого заметим, что если $I = \mathrm{Ann}(m, M)$ макисмален по включению среди аннуляторных идеалов (а максимальные по включению аннуляторные идеалы существуют ввиду нетеровости кольца), то он простой. В самом деле, пусть $b \notin I$, $ab \in I$. Тогда $abm = 0$ по определению I, но $bm \neq 0$. Значит $a \in \mathrm{Ann}(bm, M)$. Но очевидно $I = \mathrm{Ann}(m, M) \subset \mathrm{Ann}(bm, M)$, значит в силу макисмальности I имеем $\mathrm{Ann}(bm, M) = I$, то есть $a \in I$.

Докажем теперь, что на всяком модуле M есть конечная фильтрация, присоединенные факторы которой имеют вид $A/\mathfrak{p}A$, где $\mathfrak{p}$ — простой. В самом деле, согласно предыдущему рассуждению, мы можем найти простой идеал $\mathfrak{p}$, являющийся аннулятором какого-то элемента $m \in M$. Тогда $\mathrm{Im}(A \xrightarrow{m} M) = A/\mathfrak{p}$. Рассмотрим модуль $M_1 = \mathrm{Coker}\, M/Am$. Применяя то же рассуждение, получим цепочку фактормодулей $M \to M_1 \to M_2 \to \dots$, которая в силу нетеровости A и конечной порожденности M должна стабилизироваться. Значит $M_n = 0$ для какого-то n, то есть на $M = \mathrm{Ker}(M \to M_n)$ возникает конечная фильтрация, все факторы которой имеют вид $A/\mathfrak{p}$.

Теперь покажем, что если есть точная тройка $0 \to M' \to M \xrightarrow{\pi} M'' \to 0$, то $\mathsf{Ass}(M) \subset \mathsf{Ass}(M') \cup \mathsf{Ass}(M'')$. В самом деле, пусть $\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(m)$, $m \in M$. Тогда существует вложение $A/\mathfrak{p} \subset M$. Получаем коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \cap (A/\mathfrak{p}) \arrow[r] \arrow[d] & A/\mathfrak{p} \arrow[r] \arrow[d] & \pi(A/\mathfrak{p}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & M \arrow[r, "\pi"] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Если $M' \cap (A/\mathfrak{p}) = 0$, то $\pi(A/\mathfrak{p}) \cong A/\mathfrak{p}$, откуда видно, что $A/\mathfrak{p} \subset M''$, то есть $\mathfrak{p} \in \mathsf{Ass}(M'')$. Если же $M' \cap (A/\mathfrak{p}) \neq 0$, то для любого $0 \neq m' \in M' \cap (A/\mathfrak{p})$ очевидно $\mathrm{Ann}(m') = \mathfrak{p}$, то есть $\mathfrak{p} \in \mathsf{Ass}(M')$.

Применяя это рассуждение к факторам построенной фильтрации, заключаем, что множество ассоциированных идеалов заведомо содержится в множестве простых идеалов, факторы по которым составляют нашу фильтрацию, а это множество конечно. □

Замечание 2.4. При этом ясно, что множество простых идеалов, полученных данной процедурой может быть сильно больше, чем $\mathsf{Ass}(M)$. Например, если $A = M = \mathbb{Z}$, то фильтрация $p\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ дает $\{ (0), (p) \}$, в то время как $\mathsf{Ass}(\mathbb{Z}) = \{ (0) \}$.

Упражнение 1. Покажите, что $\mathsf{Ass}(M[S^{-1}]) = \{ \mathfrak{p}[S^{-1}] \mid \mathfrak{p} \in \mathsf{Ass}(M),\ \mathfrak{p} \cap S = \emptyset \}$.

Упражнение 2. Покажите, что любой минимальный простой идеал является ассоциированным идеалом кольца (остальные ассоциированные идеалы называются вложенными).

Упражнение 3. Покажите, что множество делителей нуля — это объединение всех ассоциированных идеалов кольца A.

Часть 3. Коэн–Маколеевость

Определение 3.1. Глубиной A-модуля M называется максимальная длина регулярной для M последовательности в A. Глубиной кольца A называется его глубина как A-модуля. Глубина M обозначается $\operatorname{depth}(M)$, а глубина кольца A — $\operatorname{depth}(A)$. Если кольцо A локально, будут рассматриваться только регулярные последовательности в его максимальном идеале.

Вот гомологическая переформулировка глубины.

Предложение 3.2. *Пусть M — конечно порожденный модуль над локальным кольцом A. Тогда*
$$\operatorname{depth}(M) = \min\{ l \mid \operatorname{Ext}^l(\mathsf{k}, M) \neq 0 \}.$$

Доказательство. Достаточно проверить две вещи, во-первых, что равенство нулю каждой из частей влечет зануление другой, а во-вторых, что переход от M к M/xM для любого регулярного для M элемента уменьшает правую часть на 1.

Действительно, если $\operatorname{Hom}(\mathsf{k}, M) \neq 0$, то в M есть элемент, аннулируемый идеалом $\mathfrak{m}$, поэтому не может быть никакой регулярной последовательности. С другой стороны, пусть $\operatorname{depth}(M) = 0$. Значит $\mathfrak{m} \subset \cup_{\mathfrak{p} \in \mathsf{Ass}(M)} \mathfrak{p}$, но всякий идеал, содержащийся в объединении конечного множества простых (а множество $\mathsf{Ass}(M)$ конечно), содержится в одном из них (см. Атья-Макдональдс), значит $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{p}$ для какого-то $\mathfrak{p} \in \mathsf{Ass}(M)$, но тогда $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$, то есть $\mathfrak{m} \in \mathsf{Ass}(M)$.

Наконец, пусть у нас есть элемент, скажем x, не являющийся делителем нуля в M. Положим $M' = M/xM$. Получим точную тройку
$$0 \to M \xrightarrow{x} M \to M' \to 0.$$
Применяя к ней функтор $\operatorname{Hom}(\mathsf{k}, -)$ мы видим, что $\operatorname{Ext}^l(\mathsf{k}, M') = 0$ при $l < n - 1$, и что
$$\operatorname{Ext}^{n-1}(\mathsf{k}, M') = \operatorname{Ker}(x : \operatorname{Ext}^n(\mathsf{k}, M) \to \operatorname{Ext}^n(\mathsf{k}, M)).$$
Но x действует нулем на k, а значит и на $\operatorname{Ext}^n(\mathsf{k}, M)$, так что $\operatorname{Ext}^{n-1}(\mathsf{k}, M') = \operatorname{Ext}^n(\mathsf{k}, M) \neq 0$. Таким образом, для модуля M', число из правой части равно $n - 1$. □

Следствие 3.3. *Если x регулярен для M, то* $\operatorname{depth}(M/xM) = \operatorname{depth}(M) - 1$.

Следствие 3.4. *Любой регулярный для M элемент в A достраивается до регулярной последовательности длины* $\operatorname{depth}(M)$.

Следствие 3.5. $\operatorname{depth}(A) \leqslant \dim A$.

Доказательство. Неравенство доказывается индукцией по $\operatorname{depth}(A)$. Если x не является делителем нуля, то $\operatorname{depth}(A/xA) = \operatorname{depth}(A) - 1$, $\dim(A/xA) = \dim A - 1$. □

Определение 3.6. Кольцо A называется кольцом Коэна–Маколея, если $\operatorname{depth}(A) = \dim(A)$. Схема называется схемой Коэна–Маколея, если все ее локальные кольца являются кольцами Коэна–Маколея.

Согласно 3.2, кольцо Коэн–Маколеево тогда и только тогда, когда
$$\operatorname{Ext}^l_A(\mathsf{k}, A) = 0 \qquad \text{для всех } l < \dim A.$$
В дальнейшем мы обсудим другие гомологические критерии Коэн–Маколеевости.

Лемма 3.7. *Регулярное локальное кольцо является кольцом Коэна–Маколея. В частности, регулярная схема является схемой Коэна–Маколея.*

Доказательство. Докажем индукцией по $\dim A$. Если $\dim A = 0$, то $\operatorname{depth}(A) \leqslant \dim A = 0$, так что доказывать нечего. Пусть $\dim A > 0$. Выберем ненулевой элемент в $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ и поднимем его до $x \in \mathfrak{m}$. Так как регулярное локальное кольцо целостно, то x не является делителем нуля, поэтому $\dim A/(x) = \dim A - 1$. С другой стороны, максимальный идеал кольца $A/(x)$ — это $\mathfrak{m}/x\mathfrak{m}$, а $(\mathfrak{m}/x\mathfrak{m})/(\mathfrak{m}/x\mathfrak{m})^2 = \mathfrak{m}/(x\mathfrak{m} + \mathfrak{m}^2) = (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)/(x)$, в частности его размерность на 1 меньше размерности $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Значит кольцо $A/(x)$ тоже регулярно, а значит по предположению индукции Коэн–Маколеево, а значит $\operatorname{depth}(A/(x)) = \dim(A/(x)) = \dim A - 1$. Но $\operatorname{depth}(A/(x)) = \operatorname{depth}(A) - 1$ в силу 3.3, значит $\operatorname{depth}(A) = \dim A$, то есть A — кольцо Коэна–Маколея. $\square$

Лемма 3.8. *Если A — кольцо Коэна–Маколея, а $x_1, \ldots, x_m$ — регулярная последовательность, то кольцо $A/(x_1, \ldots, x_m)$ тоже Коэн–Маколеево.*

Доказательство. Достаточно проверить случай $m = 1$, а он очевиден. В самом деле, если x_1 регулярен, то $\operatorname{depth}(A/xA) = \operatorname{depth} A - 1$ в силу 3.3, а $\dim(A/(x_1)) = \dim A - 1$ по теории размерности. $\square$

Таким образом, локально полное пересечение в Коэн–Маколеевой схеме (в частности в регулярной схеме) тоже Коэн–Маколеево.

Лемма 3.9. *Если A — локальное кольцо Коэна–Маколея, то оно не имеет вложенных ассоциированных идеалов.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{p} \subset A$ — вложенный простой, не являющийся минимальным. Тогда $A/\mathfrak{p} \subset A$, $\dim A/\mathfrak{p} < \dim A$. Ясно, что всякая регулярная последовательность в A является также регулярной и для $A/\mathfrak{p}$, значит $\operatorname{depth}(A) \leqslant \operatorname{depth}(A/\mathfrak{p})$. Но $\operatorname{depth}(A/\mathfrak{p}) \leqslant \dim(A/\mathfrak{p})$. $\square$

Теорема 3.10. *Пусть A — локальное кольцо Коэна–Маколея. Последовательность $x_1, \ldots, x_m$ регулярна тогда и только тогда, когда $\dim A/(x_1, \ldots, x_m) = \dim A - m$.*

Доказательство. Если последовательность регулярна, то размерность очевидно понижается на m. Докажем обратное утверждение индукцией по m.

Рассмотрим вначале случай $m = 1$. Ясно, что если x_1 регулярен (то есть не является делителем нуля), то $\dim A/(x_1) = \dim A - 1$. Поэтому надо проверить, что если $\dim A/(x_1) = \dim A - 1$, то x_1 не делитель нуля. В самом деле, если бы x_1 был делителем нуля, то он лежал бы в ассоциированом простом идеале $\mathfrak{p}$. Но поскольку A — Коэн–Маколеево, то $\mathfrak{p}$ должен быть минимальным, а тогда $\dim A/(x_1) = \dim A$.

Теперь рассмотрим случай $m > 1$. В цепочке колец A, $A/(x_1)$, $\ldots$, $A/(x_1, \ldots, x_m)$ на каждом шаге размерность понижается не больше чем на 1, а в результате понижается на m. Значит она понижалась на 1 на каждом шаге. В частности $\dim A/(x_1) = \dim A - 1$, значит в силу предыдущего рассуждения x_1 не является делителем нуля в A, то есть регулярен. Кроме того, в силу следствия 3.3 имеем $\operatorname{depth}(A/(x_1)) = \operatorname{depth}(A) - 1$, значит кольцо $A/(x_1)$ тоже Коэн–Маколеево, и для последовательности $x_2, \ldots, x_m$ в нем выполнено условие теоремы. Значит по индукции последовательность регулярна. $\square$