Касательное расслоение и нормальный пучок

Часть 1. Гладкость и регулярность

Всякое комплексное многообразие локально изоморфно шару. Для алгебраических многообразий (даже для регулярных) это уже не верно, так как топология Зариского слишком слаба. Однако верно следующее.

Предложение 1.1. *Пусть A — нетерово локальное кольцо с полем вычетов k и максимальным идеалом $\mathfrak{m}$. Следующие условия эквивалентны*

(i) *A регулярно;*
(ii) $\mathsf{gr}\, A \cong \mathsf{k}[x_1, \ldots, x_n]$, $n = \dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$*;*
(iii) $\widehat{A} \cong \mathsf{k}[[x_1, \ldots, x_n]]$, $n = \dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

Доказательство. Эквивалентность условий *(ii)* и *(iii)* очевидна. Проверим эквивалентность *(i)* и *(iii)*. Предположим, что $\dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = n$. Выбрав n образующих идеала $\mathfrak{m}$, получим сюръективный морфизм $\mathsf{k}[[x_1, \ldots, x_n]] \to \hat{A}$. Исследуем его инъективность. Пусть f — элемент в ядре. Пусть f_d — младшая однородная компонента f. Тогда очевидно $\dim A/\mathfrak{m}^k = \dim \hat{A}/\mathfrak{m}^k \leqslant \binom{k+n-1}{n} - \binom{k-d+n-1}{n}$, что является многочленом от k степени $n-1$, следовательно $\dim A \leqslant n-1$. Таким образом, если A регулярно (то есть $\dim A = n$), то f обязан быть изоморфизмом. И наоборот, если f изоморфизм, то $\dim A/\mathfrak{m}^k = \dim \hat{A}/\mathfrak{m}^k = \binom{k+n-1}{n}$, что является многочленом степени n, значит $\dim A = n$ и A регулярно. □

Иначе говоря, “формальная окрестность” неособой точки изоморфна “формальной окрестности” точки в аффинном пространстве.

Упражнение 1. Выведите из предложения 1.1, что регулярное локальное кольцо целостно.

Напомним, что мы доказали, что для схемы X над алгебраически замкнутым полем k регулярность равносильна тому, что пучок $\Omega_{X/\mathsf{k}}$ локально свободен ранга $\dim X$. Ключевой момент в этом доказательстве — точность слева последовательности $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \Omega_{X/\mathsf{k}} \otimes \mathsf{k}(x) \to \Omega_{\mathsf{k}(x)/\mathsf{k}} \to 0$, которая для замкнутого поля следовала из расщепимости точной последовательности $0 \to \mathfrak{m} \to A \to \mathsf{k}(x) \to 0$. На самом деле, достаточно иметь расщепление для тройки $0 \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to A/\mathfrak{m}^2 \to \mathsf{k}(x) \to 0$.

Упражнение 2. Предположим гомоморфизм колец $A/\mathfrak{m}^2 \to A/\mathfrak{m} = \mathsf{k}(x)$ имеет сечение $\rho : \mathsf{k}(x) \to A/\mathfrak{m}^2$. Постройте морфизм $\Omega_{A/\mathsf{k}} \otimes \mathsf{k}(x) \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, расщепляющий последовательность $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \Omega_{X/\mathsf{k}} \otimes \mathsf{k}(x) \to \Omega_{\mathsf{k}(x)/\mathsf{k}} \to 0$.

Лемма 1.2. *Пусть A — алгебра над k, а $\mathsf{k}(x)/\mathsf{k}$ — сепарабельное алгебраическое расширение. Тогда морфизм $A/\mathfrak{m}^2 \to \mathsf{k}(x)$ имеет сечение.*

Доказательство. Можно считать, что $\mathsf{k}(x) \cong \mathsf{k}[t]/P(t)$, где $P(t)$ — сепарабельный многочлен. Пусть $a \in A$ — прообраз в A образ t в $\mathsf{k}(x)$. Тогда $P(a) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}$. Нам надо найти $a' \in A$, такой что $P(a') \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}^2}$. Будем искать его в виде $a' = a + \alpha$, $\alpha \in \mathfrak{m}$. По модулю $\mathfrak{m}^2$ имеем $P(a+\alpha) = P(a) + \alpha P'(a)$. Но $P'(a) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}$, так как P сепарабелен, значит $P'(a)$ обратимо в $A/\mathfrak{m}^2$, что позволяет найти α. □

Упражнение 3. Пусть A — алгебра над k, а $\mathsf{k}(x)/\mathsf{k}$ — сепарабельное расширение. Покажите, что
(а) для любого n существует сечение $\mathsf{k}(x) \to A/\mathfrak{m}^n$ проекции $A/\mathfrak{m}^n \to \mathsf{k}(x)$;
(б) существует сечение $\mathsf{k}(x) \to \hat{A}$ проекции $\hat{A} \to \mathsf{k}(x)$;

Предложение 1.3. *Если X — схема над k, а x — точка на X, такая что $\mathsf{k}(x)$ сепарабельно порожденное расширение поля k, то $\Omega_{X/\mathsf{k}} \otimes \mathsf{k}(x) \cong \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.*

Схема X над полем k называется сепарабельной, если все ее поля вычетов сепарабельно порождены над k. Если поле k совершенно, то всякая k-схема сепарабельна над k.

Следствие 1.4. *Если X — сепарабельна над k, а $\Omega_{X/\mathsf{k}}$ локально свободен ранга $\dim X$, то X регулярна.*

Часть 2. Касательное расслоение

Определение 2.1. Пусть X гладкое многообразие над k. Касательным расслоением к X называется расслоение $\mathcal{T}_X$, двойственное (локально свободному) пучку $\Omega_{X/\mathsf{k}}$:
$$\mathcal{T}_X \cong \Omega^*_{X/\mathsf{k}}.$$

Пример 2.2. Пусть $X = \mathbb{P}(W)$. Тогда существует точная последовательность Эйлера
$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)} \to W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(1) \to \mathcal{T}_{\mathbb{P}(W)} \to 0.$$

Пример 2.3. Пусть $X = \mathbb{P}^1$. Тогда $\mathcal{T}_X \cong \mathcal{O}_X(2)$. В самом деле, имеем точную последовательность
$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \xrightarrow{(x,y)} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow 0.$$

Рассмотрим морфизм $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \xrightarrow{(y,-x)} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$. Очевидно, что это сюръективные морфизм, а его композиция с первым морфизмом в последовательности Эйлера равна $yx - xy = 0$, поэтому он индуцирует эпиморфизм $\mathcal{T}_{\mathbb{P}^1} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$. Но эпиморфизм локально свободных пучков одинакового ранга является изоморфизмом.

Пример 2.4. Пусть $X = \mathsf{Gr}(k, W)$. Тогда $\mathcal{T}_{\mathsf{Gr}(k,W)} \cong \mathcal{U}^* \otimes W/\mathcal{U}$.

Упражнение 4. Пусть X, Y — гладкие, $p, q : X \times Y \to X, Y$ — проекции на сомножители. Докажите, что $\mathcal{T}_{X \times Y} = p^*\mathcal{T}_X \oplus q^*\mathcal{T}_Y$.

Для особых многообразий хорошо определить понятие касательного пучка не получается (напрашивающееся определение как двойственного к дифференциалам пучка не годится — это будет объяснено чуть позже). Однако, есть хорошее понятие касательного пространства в точке.

Определение 2.5. Касательным пространством к схеме X в точке x называется векторное пространство $T_{X,x} := (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*$, где $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал точки x, а двойственность применяется над полем $\mathsf{k}(x)$.

Лемма 2.6. *Если X — гладкое многообразие, то касательное пространство в точке совпадает со слоем касательного расслоения: $T_{X,x} = \mathcal{T}_X \otimes \mathsf{k}(x)$.*

Доказательство. Очевидно следует из определения касательного расслоения и того, что слой пучка дифференциалов изоморфен $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. □

Если же многообразие X не является гладким, слой пучка $\Omega^*_{X/\mathsf{k}}$ может и не совпадать с касательным пространством.

Пример 2.7. Пусть X — кривая в $\mathbb{A}^2$ с уравнением $y^2 = x^3$ (каспидальная кубика), $X = \operatorname{Spec} \mathsf{k}[t^2, t^3]$. Пусть $\operatorname{char} \mathsf{k} \neq 2, 3$. Тогда $\Omega_{X/\mathsf{k}} = \operatorname{Coker}(\mathcal{O}_X \xrightarrow{(3x^2, 2y)} \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X) = \operatorname{Coker}(\mathsf{k}[t^2,t^3] \xrightarrow{(t^4, t^3)} \mathsf{k}[t^2,t^3] \oplus \mathsf{k}[t^2,t^3])$, а $\Omega^*_{X/\mathsf{k}} = \operatorname{Ker}(\mathsf{k}[t^2,t^3] \oplus \mathsf{k}[t^2,t^3] \xrightarrow{(t^4, t^3)} \mathsf{k}[t^2,t^3]) = \operatorname{Im}(\mathsf{k}[t^2,t^3] \xrightarrow{(t^2, -t^3)} \mathsf{k}[t^2,t^3] \oplus \mathsf{k}[t^2,t^3])$, так что $\Omega^*_{X/\mathsf{k}}$ — локально свободный пучок ранга 1, а его слой в нуле одномерен. При этом легко видеть, что $\dim T_{X,0} = 2$.

Для проверки гладкости многообразия часто очень удобно следующее

Предложение 2.8. *Для всех точек $x \in X$ выполнено $\dim T_{X,x} \geqslant \dim X$. При этом, если $\dim T_{X,x} = \dim X$, то точка x неособа. В частности, если $\dim T_{X,x} = \dim X$ для всех точек $x \in X$, то X неособо.*

Доказательство. По определению касательного пространства $\dim T_{X,x} = \dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \geqslant \dim \mathcal{O}_{X,x} = \dim X$, причем равенство означает регулярность локального кольца, то есть неособость точки. □

Для вычисления касательного пространства часто удобно использовать следующее соображение.

Лемма 2.9. *Пусть X — схема над полем k, x — ее замкнутая точка, причем расширение полей $\mathsf{k}(x)/\mathsf{k}$ сепарабельно. Тогда касательное пространство $T_{X,x}$ совпадает с $\operatorname{Map}(\operatorname{Spec}(\mathsf{k}(x)[\epsilon]/\epsilon^2), X, x)$ — множеством всех отображений, переводящих $\operatorname{Spec} \mathsf{k}(x)$ в x.*

Доказательство. Можно считать, что $X = \operatorname{Spec} A$. Тогда нас интересуют морфизмы $A \to \mathsf{k}(x)[\epsilon]/\epsilon^2$, переводящие $\mathfrak{m} \subset A$ в $\mathsf{k}(x)\epsilon$. Ясно, что такие морфизмы зануляются на $\mathfrak{m}^2$ и поэтому дают $\mathsf{k}(x)$-линейное отображение $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \mathsf{k}(x)\epsilon \cong \mathsf{k}(x)$, то есть элемент в $(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^* = T_{X,x}$. Обратно, рассмотрим произвольное отображение $v : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \mathsf{k}(x) = \mathsf{k}(x)\epsilon \subset \mathsf{k}(x)[\epsilon]/\epsilon^2$, В силу леммы 1.2 имеем $A/\mathfrak{m}^2 \cong \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \oplus \mathsf{k}(x)$, что позволяет продолжить его до морфизма $A/\mathfrak{m}^2 \to \mathsf{k}(x)[\epsilon]/\epsilon^2$, который очевидно является гомоморфизмом колец, и дает морфизм $A \to \mathsf{k}(x)[\epsilon]/\epsilon^2$. □

Условия того, что схема является схемой над полем, и поле вычетов является его сепарабельным расширением существенны.

Пример 2.10. Пусть $A = \mathbb{Z}$, $\mathfrak{m} = (p)$, так что $\mathsf{k}(x) = \mathbb{F}_p$. Тогда $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \cong \mathbb{F}_p$, но единственный гомоморфизм $\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_p[\epsilon]/\epsilon^2$ имеет вид $\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_p \subset \mathbb{F}_p[\epsilon]/\epsilon^2$.

Пример 2.11. Пусть $A = \mathbb{F}_p(t)[y]$, $\mathfrak{m} = (y^p - t)$, так что $\mathsf{k}(x) = \mathbb{F}_p(y)$. Тогда $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \cong \mathbb{F}_p(y)$, но $A/\mathfrak{m}^2 = \mathbb{F}_p(t)[y]/(y^p - t)^2 \not\cong \mathbb{F}_p(y)[\epsilon]/\epsilon^2$, так как морфизм $A/\mathfrak{m}^2 \to \mathsf{k}(x)$ не имеет сечения (в $A/\mathfrak{m}^2$ нет элемента, проектирующегося в y и в p-ой степени равного t — в самом деле $(y + (y^p - t)z)^p = y^p \neq t$).

В некоторых случаях лемму 2.9 очень использовать для вычисления касательного пространства.

Пример 2.12. Пусть точка $x \in \mathbb{P}(W)$ соответствует прямой $L \subset W$. Тогда $Map(\mathsf{k}[\epsilon]/\epsilon^2, \mathbb{P}(W), x)$ — это множество классов эквивалентности линейных подрасслоений $\mathcal{L} \subset W \otimes \mathcal{O}$ на $\operatorname{Spec} \mathsf{k}[\epsilon]/\epsilon^2$, таких что при ограничении на $\operatorname{Spec} \mathsf{k}$ получается $L \subset W$. Всякое такое линейное расслоение $\mathcal{L}$ изоморфно тривиальному, то есть соответствует свободному модулю $\mathsf{k} \oplus \mathsf{k}\epsilon$, а вложение $\mathcal{L} \to W \otimes \mathcal{O}$ соответствует линейному отображению $w_0 + w_1\epsilon : \mathsf{k} \to W \oplus W\epsilon$ (на $\mathsf{k}\epsilon$ оно продолжается по линейности), причем компонента $w_0 : \mathsf{k} \to W$ должна быть естественным изоморфизмом на $L \subset W$. Таким образом, все задается одним морфизмом $w_1 : \mathsf{k} \to W$. При этом, нам надо отождествить отображения $\mathcal{L} \to W \otimes \mathcal{O}$, отличающиеся на автоморфизм $\mathcal{L}$. Но автоморфизмы $\mathcal{L}$ — это обратимые элементы кольца $\mathsf{k}[\epsilon]/\epsilon^2$, то есть элементы вида $1 + a\epsilon$. При этом $(w_0 + w_1\epsilon) : \mathsf{k} \to W \oplus W\epsilon$ меняется на $w_0 + (w_1 + aw_0)\epsilon$, то есть w_1 определен с точностью до прибавления кратного w_0, то есть однозначно определен как отображение $L \to W/L$. Значит $T_{X,x} = \operatorname{Hom}(L, W/L)$.

Упражнение 5. Проведите аналогичные рассуждения для грассманиана.

Упражнение 6. Покажите, что если X гладкое, то $\operatorname{Map}(\operatorname{Spec}(\mathsf{k}[\epsilon]/\epsilon^2), X)$ — это множество k-точек тотального пространства касательного расслоения к X, причем проекция на базу X соответствует отображению ограничения $\operatorname{Map}(\operatorname{Spec}(\mathsf{k}[\epsilon]/\epsilon^2), X) \to \operatorname{Map}(\operatorname{Spec} \mathsf{k}, X) = X$.

Если же схема задана уравнениями, то можно явно вычислить касательное пространство.

Упражнение 7. Пусть $X \subset \mathbb{A}^n$ задается уравнениями $f_1, \dots, f_m$, то $T_{X,x} = \operatorname{Ker}(\mathsf{k}^n \xrightarrow{(\partial f_i/\partial x_j)(x)} \mathsf{k}^m)$.

Часть 3. Нормальный пучок

Пусть $Y \subset X$ — замкнутая подсхема с пучком идеалов $\mathcal{J}$. Напомним, что пучок $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ является прямым образом на X некоторого пучка на Y, который называется конормальным пучком. Двойственный к нему пучок

$$\mathcal{N}_{X/Y} := (\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)^*$$

называется **нормальным пучком подсхемы**. Заметьте, что дуализация берется на Y, а не на X!

Предложение 3.1. *Для всякой гладкой подсхемы $Y \subset X$ существует точная последовательность*

$$(\star) \qquad 0 \to \mathcal{T}_Y \to \mathcal{T}_{X|Y} \to \mathcal{N}_{X/Y} \to 0,$$

а $\mathcal{N}_{X/Y}$ — расслоение ранга $r = \dim X - \dim Y$.

Доказательство. Последовательность получается дуализацией последовательности пучков дифференциалов. Так как Y неособо в неособом X, то Y — локально полное пересечение, поэтому $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ локально свободен на Y ранга r, а значит то же верно и для $\mathcal{N}_{X/Y}$. Точность справа следует из точности слева последовательности пучков дифференциалов и следующей леммы. □

Лемма 3.2. *Пусть $0 \to F \to G \to H \to 0$ — точная последовательность квазикогерентных пучков. Если H локально свободен, то двойственная последовательность $0 \to H^* \to G^* \to F^* \to 0$ также точна.*

Доказательство. Вопрос локален, поэтому можно считать, что у нас точная последовательность модулей над кольцом, причем модуль H свободен. Но тогда такая последовательность расщепляется, что дает расщепление и для двойственной последовательности, и в частности проверяет ее точность. □

Вычислять нормальный пучок проще всего, если подсхема Y является схемой нулей регулярного сечения векторного расслоения.

Лемма 3.3. *Пусть $Y \subset X$ — схема нулей регулярного сечения $s \in \Gamma(X, E)$. Тогда $\mathcal{N}_{Y/X} = E_{|Y}$.*

Доказательство. Сразу следует из изоморфизма $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \cong E^*$. □

Пример 3.4. Пусть $X \subset \mathbb{P}^2$ — кривая степени d. Тогда $\mathcal{N}_{X/\mathbb{P}^2} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)_{|X}$.

Рассмотрим вложение Веронезе $\nu_d : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^d$ и найдем нормальное расслоение. При $d = 1$ искать нечего, при $d = 2$ предыдущее рассуждение показывает, что $\mathcal{N} = \nu_2^*\mathcal{O}(2) = \mathcal{O}(4)$. Рассмотрим теперь случай $d = 3$. Здесь очень полезным оказывается следующее рассуждение.

Лемма 3.5. *Пусть $f : \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(V)$ — вложение, задаваемое сюръекцией $V^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(d)$ и пусть $F : V^* \to S^dW^*$ соответствующий морфизм глобальных сечений. Тогда*

$$\mathcal{N}_{f(\mathbb{P}(W))/\mathbb{P}(V)} = \operatorname{Coker}(W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(1) \xrightarrow{\tilde{F}} V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(d)),$$

где $\tilde{F}$ — отображение двойственное к частичной поляризации F — $V^* \to S^dW^* \to W^* \otimes S^{d-1}W^*$.

Доказательство. Заметим вначале вот что. Пусть $\varphi : S \to \mathbb{P}(W)$ — отображение, задаваемое вложением $\mathcal{L} \to W \otimes \mathcal{O}_S$. Тогда композиция $f \circ \varphi : S \to \mathbb{P}(V)$ задается вложением $\mathcal{L}^d \to S^dW \otimes \mathcal{O}_S \xrightarrow{F} V \otimes \mathcal{O}_S$. Применим теперь это в случае $S = \operatorname{Spec}(\mathsf{k}[\epsilon]/\epsilon^2)$, $\mathcal{L} = \mathsf{k} + \mathsf{k}\epsilon$ и $\varphi = w_0 + w_1\epsilon$. Тогда $f \circ \varphi$ задается $S^d(w_0 + w_1\epsilon) = w_0^d + dw_0^{d-1}w_1\epsilon)$, а это означает, что отображение $df : \mathcal{T}_{\mathbb{P}(W)} \to \mathcal{T}_{\mathbb{P}(V)|\mathbb{P}(W)}$ достраивается до коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)} & \longrightarrow & W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(1) & \longrightarrow & \mathcal{T}_{\mathbb{P}(W)} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \tilde{F}} & & \big\downarrow{\scriptstyle df} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)} & \longrightarrow & V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(d) & \longrightarrow & \mathcal{T}_{\mathbb{P}(V)|\mathbb{P}(W)} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Применяя ($\star$) и лемму о змее, получаем искомое утверждение. □

Итак, пусть $d = 3$. Тогда $F = (x^3, x^2y, xy^2, y^3)$, откуда получаем точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(1)^2 \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 3x^2, 2xy, y^2, 0 \\ 0, x^2, 2xy, 3y^2 \end{smallmatrix}\ ^T} \mathcal{O}(3)^4 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow 0.$$

Покажем, что $\mathcal{N} = \mathcal{O}(5)^2$. Для этого рассмотрим морфизм

$$\mathcal{O}(3)^4 \xrightarrow{\begin{smallmatrix} x^2, -2xy, y^2, 0 \\ 0, x^2, -2xy, y^2 \end{smallmatrix}} \mathcal{O}(5)^2 .$$

Легко видеть, что он сюръективен (среди его миноров есть и x^4 и y^4), а его композиция с первым морфизмом в точной последовательности равна нулю. Поэтому он индуцирует эпиморфизм $\mathcal{N} \to \mathcal{O}(5)^2$, который обязан быть изоморфизмом.

Упражнение 8. Докажите, что для произвольного d выполнено $\mathcal{N}_{\nu_d(\mathbb{P}^1)/\mathbb{P}^d} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d+2)^{d-1}$.

Упражнение 9. Докажите, что $\mathcal{N}_{\nu_2(\mathbb{P}^2)/\mathbb{P}^5} \cong S^2\mathcal{T}_{\mathbb{P}^2}$.

Найдем теперь нормальное расслоение к грассманиану. Рассмотрим вначале $\mathsf{Gr}(2,W) \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 W)$. Заметим, что вложение в проективное пространство задается так: надо взять естественное вложение $\mathcal{U} \subset W \otimes \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(2,W)}$ и рассмотреть его внешний квадрат — $\Lambda^2\mathcal{U} \subset \Lambda^2 W \otimes \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(2,W)}$. Соответственно, точная последовательность $(\star)$ в этом случае имеет вид

$$0 \to \mathcal{U}^* \otimes W/\mathcal{U} \to \Lambda^2\mathcal{U}^* \otimes \Lambda^2 W/\Lambda^2\mathcal{U} \to \mathcal{N} \to 0.$$

Подкручивая ее на $\Lambda^2\mathcal{U}$ получаем последовательность

$$0 \to \mathcal{U} \otimes W/\mathcal{U} \to \Lambda^2 W/\Lambda^2\mathcal{U} \to \mathcal{N} \otimes \Lambda^2\mathcal{U} \to 0.$$

Заметим теперь следующее. Точную последовательность $0 \to \mathcal{U} \to W \otimes \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(2,W)} \to W/\mathcal{U} \to 0$ можно рассматривать как фильтрацию длины 2 на расслоении $W \otimes \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(2,W)}$ с факторами $\mathcal{U}$ и $W/\mathcal{U}$.

Лемма 3.6. *Если на пучке B задана фильтрация длины 2 с факторами A и C, то на пучке $\Lambda^k B$ существует фильтрация длины $k+1$ с факторами $\Lambda^i A \otimes \Lambda^{k-i} C$.*

Доказательство. Для каждого i обозначим через F_i образ морфизма $\Lambda^i A \otimes \Lambda^{k-i} B \to \Lambda^i B \otimes \Lambda^{k-i} B \to \Lambda^k B$. Ясно, что $F_k \subset F_{k-1} \subset \dots \subset F_1 \subset F_0 = \Lambda^k B$ — фильтрация. С другой стороны, обозначим через F'_i ядро морфизма $\Lambda^k B \to \Lambda^{i-1} B \otimes \Lambda^{k-i+1} B \to \Lambda^{i-1} B \otimes \Lambda^{k-i+1} C$. Тогда $F'_k \subset F'_{k-1} \subset \dots \subset F'_1 \subset F'_0 = \Lambda^k B$ — еще одна фильтрация. Легко видеть, что композиция $\Lambda^i A \otimes \Lambda^{k-i} B \to \Lambda^k B \to \Lambda^{i-1} B \otimes \Lambda^{k-i+1} C$ равна нулю (откуда следует, что $F_i \subset F'_i$), и что композиция $\Lambda^i A \otimes \Lambda^{k-i} B \to \Lambda^k B \to \Lambda^i B \otimes \Lambda^{k-i} C$ раскладывается также в композицию $\Lambda^i A \otimes \Lambda^{k-i} B \to \Lambda^i A \otimes \Lambda^{k-i} C \to \Lambda^i B \otimes \Lambda^{k-i} C$, где первый морфизм — эпиморфизм, а второй — мономорфизм (откуда следует, что $F_i/F'_{i-1} = \Lambda^i A \otimes \Lambda^{k-i} C$). Таким образом, остается проверить, что $F_i = F'_i$, что является локальным утверждением и проверяется, например, выбором локального расщепления последовательности $0 \to A \to B \to C \to 0$. □

Упражнение 10. Докажите аналогичное утверждение для симметрических степеней.

Применяя лемму к точной последовательности $0 \to \mathcal{U} \to W \otimes \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(2,W)} \to W/\mathcal{U} \to 0$, получаем фильтрацию $F_2 \subset F_1 \subset F_0 = \Lambda^2 W \otimes \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(2,W)}$ с $F_2 \cong \Lambda^2\mathcal{U}$, $F_1/F_2 \cong \mathcal{U} \otimes W/\mathcal{U}$, $F_0/F_1 \cong \Lambda^2(W/\mathcal{U})$.

Упражнение 11. Покажите, что подкрутка на $\Lambda^2\mathcal{U}$ морфизма $\mathcal{T}_{\mathsf{Gr}(2,W)} \to \mathcal{T}_{\mathbb{P}(\Lambda^2 W)|\mathsf{Gr}(2,W)}$ совпадает с морфизмом $F_1/F_2 \to F_0/F_2$.

Значит $\mathcal{N}_{\mathsf{Gr}(2,W)/\mathbb{P}(\Lambda^2 W)} \otimes \Lambda^2\mathcal{U} \cong F_0/F_1 \cong \Lambda^2(W\mathcal{U})$, откуда получаем $\mathcal{N}_{\mathsf{Gr}(2,W)/\mathbb{P}(\Lambda^2 W)} \cong \Lambda^2(W\mathcal{U}) \otimes \Lambda^2\mathcal{U}^*$.

Упражнение 12. Докажите, что на расслоении $\mathcal{N}_{\mathsf{Gr}(k,W)/\mathbb{P}(\Lambda^k W)}$ существует фильтрация длины $k-1$ с факторами $\Lambda^i(W/\mathcal{U}) \otimes \Lambda^i\mathcal{U}^*$, $2 \leqslant i \leqslant k$.

Упражнение 13. Докажите, что $\mathcal{N}_{\mathbb{P}(U)\times\mathbb{P}(W)/\mathbb{P}(U\otimes W)} \cong \mathcal{T}_{\mathbb{P}(U)} \boxtimes \mathcal{T}_{\mathbb{P}(W)}$.

Упражнение 14. Пусть X — гладкое многообразие, а $\Delta : X \to X \times X$ — диагональ. Докажите, что $\mathcal{N}_{\Delta(X)/X\times X} \cong \mathcal{T}_X$.

Упражнение 15. Пусть $Z \subset Y \subset X$ — гладкие многообразия. Постройте точную последовательность

$$0 \to \mathcal{N}_{Y/Z} \to \mathcal{N}_{X/Z} \to \mathcal{N}_{X/Y|Z} \to 0.$$