Параметризация семейств подмногообразий

Часть 1. Пространства отображений

В дифференциальной геометрии пространства, параметризующие подмногообразия или отображения многообразий, как правило являются огромными функциональными пространствами, то есть являются объектами совсем другой категории. В алгебраической геометрии, напротив, эти пространства также являются алгебраическими многообразиями (или очень к ним близки).

Рассмотрим, например, пространство отображений $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$. Чтобы задать такое отображение, надо задать вложение расслоений $\mathcal{O}(-d) \to \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$.

Лемма 1.1. *Вложение расслоений $\mathcal{O}(-d) \to \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$ задается парой однородных многочленов степени d от двух переменных, не имеющих общих корней.*

Доказательство. Так как $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(-d), \mathcal{O}) = \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(d))$, то всякий морфизм $\mathcal{O}(-d) \to \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$ задается парой однородных многочленов (f, g) степени d. Он является вложением расслоений, если для каждой точки $P \in \mathbb{P}^1$ матрица $(f(P), g(P))$ имеет ранг 1, то есть $f(P)$ и $g(P)$ не обращаются в нуль одновременно, то есть f и g не имеют общих корней. $\square$

Так как два вложения расслоений задают одно и то же отображение, если они отличаются на автоморфизм, а $\mathrm{Aut}(\mathcal{O}(-d)) = \mathsf{k}^*$, то отображение задается парой многочленов с точностью до умножения на общую ненулевую константу.

Лемма 1.2. *Имеем* $\mathrm{Map}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^1) = \bigsqcup_{d=0}^{\infty} \mathrm{Map}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^1)$, *а* $\mathrm{Map}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^1)$ *— открытое подмножество в* $\mathbb{P}^{2d+1}(\mathsf{k})$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{Map}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^1) \subset \mathrm{Map}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^1)$ — множество таких отображений $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$, для которых $f^*\mathcal{O}(-1) = \mathcal{O}(-d)$. Такие отображения задаются парой многочленов (f, g) степени d без общих множителей с точностью до умножения на константу, то есть подмножеством в $(\mathsf{k}^{d+1} \oplus \mathsf{k}^{d+1})/\mathsf{k}^* = \mathbb{P}^{2d+1}(\mathsf{k})$. Осталось понять, как можно записать условие отсутствия общих множителей. Но это хорошо известно — если $f = a_0x^d + a_1x^{d-1}y + \dots + a_{d-1}xy^{d-1} + a_dy^d$, $g = b_0x^d + b_1x^{d-1}y + \dots + b_{d-1}xy^{d-1} + b_dy^d$, то наличие общего корня равносильно занулению результанта $\mathsf{Res}(f, g)$, который является однородным многочленом степени $2d$ от a_i и b_j, то есть множество пар (f, g), имеющих общий корень — это гиперповерхность степени $2d$ в $\mathbb{P}^{2d+1}$, а $\mathrm{Map}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^1)$ — множество k-точек в ее дополнении. $\square$

Упражнение 1. Рассмотрим отображение $\mathbb{P}^{2d-1} \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^{2d+1}$, $((a_0 : \dots : a_{d-1} : b_0 : \dots : b_{d-1}), (u : v)) \mapsto (a_0u : a_1u + a_0v : \dots : a_{d-1}u + a_{d-2}v : a_{d-1}u : b_0u : b_1u + b_0v : \dots : b_{d-1}u + b_{d-2}v : b_{d-1}u)$. Покажите, что его образ совпадает с гиперповерхностью $\mathsf{Res}(f, g) = 0$ и задает изоморфизм открытого подмножества в $\mathbb{P}^{2d-1} \times \mathbb{P}^1$ и в этой гиперповерхности.

Таким образом, мы видим, что множество отображений является множеством k-точек алгебраического многообразия. Эта ситуация совершенно типична.

Упражнение 2. Докажите, что $\mathrm{Map}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^n) = \bigsqcup_{d=0}^{\infty} \mathrm{Map}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^n)$, $\mathrm{Map}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^n)$ — открытое подмножество в $\mathbb{P}^{nd+n+d}(\mathsf{k})$.

Часть 2. Прямые

Прямой в $\mathbb{P}^n$ называется подмногообразие, изоморфное образу отображения $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n$ степени 1.

Лемма 2.1. *Множество прямых в проективном пространстве $\mathbb{P}(W)$ — это $\mathsf{Gr}(2, W)(\mathsf{k})$.*

Доказательство. Пусть $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}(W)$ — отображение степени 1, а $W^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ — соответствующий эпиморфизм. Переходя к глобальным сечениям получаем морфизм $W^* \to \mathsf{k}^2$, который должен быть сюръективным, так как иначе исходный морфизм раскладывался бы в композицию $W^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ и не мог бы быть сюръективен. А такой морфизм дает k-точку грассманиана. Причем замена f на другой морфизм с тем же образом равносильна замене базиса в k^2, то есть не влияет на полученную k-точку грассманиана.

Обратно, k-точка грассманиана — это сюръекция $W^* \to \mathsf{k}^2$. Отождествляя k^2 с U^*, $\dim U = 2$, получаем на $\mathbb{P}(U)$ морфизм $W^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)} \to U^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(1)$, то есть прямую в $\mathbb{P}(W)$. □

Пусть теперь $X \subset \mathbb{P}(W)$ — замкнутая подсхема. Прямая на X — это прямая в $\mathbb{P}(W)$, лежащая в X.

Лемма 2.2. *Множество прямых на X — это множество k-точек замкнутой подсхемы в $\mathsf{Gr}(2, W)(\mathsf{k})$.*

Доказательство. Пусть X задается уравнениями $f_1, \dots, f_m$ степеней $d_1, \dots, d_m$ соответственно, то есть $f_i \in S^{d_i} W^*$. Сюръекция $W^* \otimes \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(2,W)} \to \mathcal{U}^*$ дает сюръекцию $S^d W^* \otimes \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(2,W)} \to S^d \mathcal{U}^*$, что позволяет рассматривать f_i как глобальное сечение расслоения $S^{d_i}\mathcal{U}^*$. Рассмотрим схему нулей Z_s сечения $s = (f_1, \dots, f_m)$ расслоения $S^{d_1}\mathcal{U}^* \oplus \dots \oplus S^{d_m}\mathcal{U}^*$ на $\mathsf{Gr}(2, W)$. Пусть x — k-точка грассманиана $\mathsf{Gr}(2, W)$, то есть сюръекция $W^* \to U^*$, $\dim U = 2$. Точка $x \in \mathsf{Gr}(2, W)$ лежит в Z_s, если образ каждого из f_i относительно морфизма $S^d W^* \to S^d U^*$ равен нулю. Но ясно, что этот образ — в точности ограничение f_i на нашу прямую — $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(W)$. Поэтому обращение в нуль этих образов равносильно обращению в нуль $s_{|\mathbb{P}(U)}$, то есть как раз тому, что $\mathbb{P}(U) \subset Z_s$ (по универсальному свойству схемы нулей). □

Аналогично, m-мерной плоскостью в $\mathbb{P}^n$ называется подмногообразие, изоморфное образу отображения $\mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^n$ степени 1.

Упражнение 3. Докажите, что множество m-мерных плоскостей на подсхеме $X \subset \mathbb{P}(W)$ — это множество k-точек замкнутой подсхемы в $\mathsf{Gr}(m + 1, W)(\mathsf{k})$.

Часть 3. Коники

Коникой в $\mathbb{P}^2$ называется кривая, задаваемая уравнением степени 2.

Лемма 3.1. *Пусть* $\operatorname{char} \mathsf{k} \neq 2$, *$C \subset \mathbb{P}^2$ — коника. Тогда*

- *или C — гладкая кривая;*
- *или C — объединение двух прямых (возможно определенных над квадратичным расширением поля k), пересекающихся в одной точке;*
- *или C — прямая с неприведенной структурой.*

Доказательство. Уравнение C — квадратичная форма на трехмерном пространстве. Покажем, что невырожденность формы равносильна гладкости кривой. В самом деле, производные уравнения — это линейные формы, являющиеся строками матрицы квадратично формы, поэтому наличие у них общего нетривиального нуля равносильно тому, что ядро матрицы содержит нетривиальный вектор, то есть вырожденности формы.

Пусть теперь квадратичная форма вырождена. Если ее ядро одномерно, то возникающая на факторе квадратичная форма приводится к виду $x^2 - \lambda y^2$. Переходя в случае необходимости к $\mathsf{k}(\sqrt{\lambda})$, можно считать, что $\sqrt{\lambda} \in \mathsf{k}$. Тогда этот многочлен раскладывается в произведение $(x - \sqrt{\lambda} y)(x + \sqrt{\lambda} y)$, а его схема нулей является объединением двух прямых.

Если же ядро формы двумерно, то форма имеет вид f^2, где f — многочлен степени 1, значит коника является прямой с неприведенной структурой. □

Обозначим линейное расслоение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)_{|C}$ на конике C через $\mathcal{L}_C$.

Упражнение 4. Покажите, что если C — гладкая коника и $C(\mathsf{k}) \neq \emptyset$, то $C \cong \mathbb{P}^1$, а $\mathcal{L}_C \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$.

Упражнение 5. Классифицируйте квадрики любой размерности над полем нечетной характеристики.

Лемма 3.2. *Если C — коника, то* $\Gamma(C, \mathcal{L}_C) = \mathsf{k}^3$.

Доказательство. Если C — гладкая, то $\Gamma(C, \mathcal{L}_C) = \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2)) = \mathsf{k}^3$. Если $C = L_1 \sqcup L_2$, то возникает точная последовательность $0 \to \mathcal{O}_{L_1}(-1) \to \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_{L_2} \to 0$, откуда $\dim \Gamma(C, \mathcal{L}_C) \leqslant 3$. С другой стороны, морфизм $\Gamma(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)) \to \Gamma(C, \mathcal{L}_C)$ очевидно инъективен, значит $\dim \Gamma(C, \mathcal{L}_C) = 3$. Наконец, если C — двойная прямая L, то есть точная последовательность $0 \to \mathcal{O}_L(-1) \to \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_L \to 0$, и остается повторить те же аргументы. $\square$

Замечание 3.3. Вообще-то, равенство $\Gamma(C, \mathcal{L}_C) = \mathsf{k}^3$ элементарно доказывается из общих свойств когомологий когерентных пучков и зануления $H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2))$.

Упражнение 6. Проверьте, что $\Gamma(C, \mathcal{L}_C^d) = \mathsf{k}^{2d+1}$ для любого $d > 0$.

Коникой в $\mathbb{P}^n$ называется подсхема C, изоморфная плоской конике, так что $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)_{|C} \cong \mathcal{L}_C$.

Следствие 3.4. *Если $C \subset \mathbb{P}(W)$ — коника, то найдется единственная плоскость $\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}(W)$, т.ч. $C \subset \mathbb{P}^2$.*

Доказательство. Вложение $C \to \mathbb{P}(W)$ задается морфизмом $W^* \otimes \mathcal{O}_C \to \mathcal{L}_C$. Ясно, что вложение в $\mathbb{P}(W)$ пропускается через вложение в $\mathbb{P}(U)$, $U \subset W$, тогда и только тогда, когда морфизм $W^* \otimes \mathcal{O}_X \to L_C$ пропускается через $U^* \otimes \mathcal{O}_C$. Ясно, что $\dim U$ не может быть равно 2, так как иначе вложение $C \to \mathbb{P}(W)$ пропускалось бы через вложение $C \to \mathbb{P}^1$, что невозможно. Значит морфизм $W^* \to \Gamma(C, \mathcal{L}_C) = \mathsf{k}^3$ сюръективен (иначе мы могли бы взять в качестве U^* образ этого морфизма), значит единственная возможность выбрать U с $\dim U = 3$ — это взять в качестве U^* образ. $\square$

Следствие 3.5. *Всякая коника в $\mathbb{P}^n$ — это пересечение $\mathbb{P}^2$ и квадрики.*

Если мы хотим описать множество всех коник в $\mathbb{P}(W)$ — первое, что можно сделать — это рассмотреть множество всех пар плоскость-квадрика, то есть $\mathsf{Gr}(3, W) \times \mathbb{P}(S^2 W^*)$. Однако, это не годится, так как квадрика определена коникой неоднозначно, то есть разным квадрикам могут соответствовать одинаковые коники. Более того, если квадрика содержит плоскость (например, является объединением двух гиперплоскостей, одна из которых содержит плоскость), то их пересечение вообще не является коникой.

Упражнение 7. Множество коник в $\mathbb{P}(W)$ — это $\mathbb{P}_{\mathsf{Gr}(3,W)}(S^2\mathcal{U}^*)(\mathsf{k})$.

Упражнение 8. Множество гладких коник в $\mathbb{P}(W)$ — это множество k-точек некоторой открытой подсхемы в $\mathbb{P}_{\mathsf{Gr}(3,W)}(S^2\mathcal{U}^*)(\mathsf{k})$ (опишите дополнение как схему нулей явного сечения явного линейного расслоения).

Упражнение 9. Множество коник в подсхеме $X \subset \mathbb{P}(W)$ — это множество k-точек замкнутой подсхемы в $\mathbb{P}_{\mathsf{Gr}(3,W)}(S^2\mathcal{U}^*)$.

Часть 4. Скрученные кубики

Скрученной кубикой в $\mathbb{P}^3$ называется образ трехкратного вложения Веронезе $\nu_3 : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$.

Попробуем описать множество всех скрученных кубик. Ясно, что всякая скрученная кубика является пересечением трех квадрик. Однако, далеко не любая тройка квадрик пересекается по скрученной кубике.

Упражнение 10. Покажите, что $\{\, x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = x^2 - y^2 - z^2 + w^2 = xw - yz = 0 \,\} \subset \mathbb{P}^3$ — 8 точек.

Лемма 4.1. *Пусть $C \subset \mathbb{P}^3$ — скрученная кубика. Тогда существует морфизм $\varphi : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)^{\oplus 2} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^{\oplus 3}$, такой что $C = D_1(\varphi)$.*

Доказательство. Мы проверяли, что для $\varphi = \left(\begin{smallmatrix} x & y & z \\ y & z & w \end{smallmatrix}\right)$ детерминанталь $D_1(\varphi)$ является скрученной кубикой. Действуя на эту матрицу подходящим автоморфизмом $g \in \mathrm{GL}_4$, получаем детерминантальное представление произвольной скрученной кубики. $\square$

Пусть теперь $\dim A = 2$, $\dim B = 3$. Рассмотрим проективное пространство $\mathbb{P}(\mathrm{Mat}_{2\times 3}(W^*)) = \mathbb{P}(A^* \otimes B^* \otimes W^*)$ и естественный морфизм $A \otimes B \otimes \mathcal{O}(-1) \to W^* \otimes \mathcal{O}$ на нем. Применяя S^2, получаем морфизм $\psi : \Lambda^2 A \otimes \Lambda^2 B \otimes \mathcal{O}(-2) \to S^2 W^* \otimes \mathcal{O}$. Пусть $U = \mathbb{P}(A^* \otimes B^* \otimes W^*) \setminus D_2(\psi)$. Тогда на U морфизм ψ является вложением расслоений и дает морфизм $U \to \mathsf{Gr}(3, S^2 W^*)$. Пусть $M \subset \mathsf{Gr}(3, S^2 W^*)$ — его образ. Тогда ясно, что множество всех скрученных кубик совпадает с множеством всех k-точек многообразия M.

Часть 5. Параметризация Чжоу

Докажем результат о параметризации произвольных семейств подмногообразий в $\mathbb{P}^n$ (а значит и в произвольных проективных подмногообразиях) с помощью так называемых "координат Чжоу".

Начнем с подготовки. Пусть E — расслоение на схеме X. Говорят, что X порождается глобальными сечениями, если естественное отображение вычисления $\Gamma(X, E) \otimes \mathcal{O}_X \xrightarrow{\mathrm{ev}} E$ сюръективно.

Лемма 5.1. *Пусть X — целостная схема, E — расслоение на X, порожденное глобальными сечениями. Тогда для общего сечения $s \in \Gamma(X, E)$ либо $Z_s = \emptyset$, либо $\dim Z_s = \dim X - r(E)$. Иначе говоря, существует непустое открытое подмножество $U \subset \mathbb{P}(\Gamma(X, E))$, такое что это свойство выполнено для всякого $s \in U$.*

Замечание 5.2. Если X коэн–маколеева, то все сечения из U регулярны.

Доказательство. Обозначим $W := \Gamma(X, E)$, $E^\perp = \mathrm{Ker}(W \otimes \mathcal{O}_X \to E)$. Рассмотрим на $X \times \mathbb{P}(W)$ морфизм $f : p_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1) \to W \otimes \mathcal{O}_{X \times \mathbb{P}(W)} \to p_1^* E$.

Упражнение 11. Покажите, что схема нулей $Z_f \subset X \times \mathbb{P}(W)$ совпадает с $\mathbb{P}_X(E^\perp)$.

Так как $Z_f = \mathbb{P}_X(E^\perp)$, имеем $\dim Z_f = \dim X + r(E^\perp) - 1 = \dim X + \dim W - r(E) - 1$. Рассмотрим теперь проекцию $p_2 : Z_f \to \mathbb{P}(W)$. Заметим, что слой этой проекции над точкой $w \in \mathbb{P}(W)$ — это схема нулей в X соответствующего сечения расслоения E. Если при этом общий слой проекции пуст, то есть (локально) найдется функция на $\mathbb{P}(W)$, переходящая в ноль, то прообраз соответсвующего открытого подмножества в $\mathbb{P}(W)$ пуст, значит для всякого сечения s, соответствующего точке этого множества, схема нулей Z_s пуста. Если же общий слой не пуст, то из приведенного ниже утверждения следует, что найдется открытое подмножество $U \subset \mathbb{P}(W)$, такое что для всех $s \in U$ слой над точкой s имеет размерность $\dim Z_f - \dim \mathbb{P}(W) = \dim X - r(E)$. $\square$

Морфизм $f : X \to Y$ называется доминантным, если $f(X)$ плотно в Y. Если схема Y целая, то доминантность морфизма равносильна тому, что общая точка Y лежит в образе f, то есть что $X \times_Y \mathrm{Spec}\, K(Y) \neq \emptyset$.

Предложение 5.3. *Пусть $f : X \to Y$ — доминантный морфизм целых схем над полем k. Тогда существует непустое открытое подмножество $U \subset Y$, такое что для всякой точки $y \in U$ слой $X_y := X \times_Y y$ имеет размерность $\dim X - \dim Y$.*

Доказательство. Вопрос локальный, так что можно считать, что $X = \mathrm{Spec}\, A$, $Y = \mathrm{Spec}\, B$, а f соответствует вложению колец $B \to A$. Рассмотрим соответствующее вложение полей частных $K(B) \to K(A)$. Ясно, что $\mathrm{degtr}(K(A)/K(B)) = \mathrm{degtr}(K(A)/\mathsf{k}) - \mathrm{degtr}(K(B)/\mathsf{k}) = \dim X - \dim Y =: n$. Выберем базис транцендентности $y_1, \ldots, y_n \in K(A)$ над $K(B)$. Локализуя A можно считать, что $y_1, \ldots, y_n \in A$, то есть возникает вложение $B[t_1, \ldots, t_n] \to A$, $t_i \mapsto y_i$ и таким образом вопрос сводится к случаю $n = 0$. Пусть теперь $n = 0$, так что $K(A)/K(B)$ — конечное расширение. Индукция по степени сводит все к случаю, когда $K(A) = K(B)[t]/P(t)$. Пролокализовав A и B, можно считать, что $A = B[t]/P(t)$, $P = t^m + b_1 t^{m-1} + \cdots + b_m$, $b_i \in B$. Но тогда $\dim A = \dim B$, что и требовалось. $\square$

Упражнение 12. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ замкнутая подсхема, $\mathrm{codim} X = m$. Проверьте, что для общей плоскости $\mathbb{P}^m \subset \mathbb{P}^n$ пересечение $X \cap \mathbb{P}^m$ — артинова подсхема, причем $\dim \Gamma(X \cap \mathbb{P}^m, \mathcal{O}_{X \cap \mathbb{P}^m})$ не зависит от выбора плоскости.

Определение 5.4. Число $\dim \Gamma(X \cap \mathbb{P}^m, \mathcal{O}_{X \cap \mathbb{P}^m})$ для общей плоскости $\mathbb{P}^m \subset \mathbb{P}^n$ называется степенью подсхемы $X \subset \mathbb{P}^n$.

Пусть $X \subset \mathbb{P}(W)$ — подсхема коразмерности m и степени d. Пусть $\dim W = n$. Рассмотрим $\mathsf{Gr}(m, W)$, $\mathsf{Fl}(1, m; W) \subset \mathbb{P}(W) \times \mathsf{Gr}(m, W)$ и пусть p и q — проекции $\mathsf{Fl}(1, m; W)$ на $\mathbb{P}(W)$ и $\mathsf{Gr}(m, W)$ соответственно. Положим $Z_X = X \times_{\mathbb{P}(W)} \mathsf{Fl}(1, m; W) = p^{-1}(X) \subset X \times \mathsf{Gr}(m, W)$. Наконец, пусть $D_X = q(Z_X) \subset \mathsf{Gr}(m, W)$. Ясно, что D_X — неприводимое замкнутое подмножество.

Также нам понадобится описание группы классов дивизоров на грассманиане.

Лемма 5.5. *Имеем $\mathsf{Pic}\,\mathsf{Gr}(m, W) \cong \mathbb{Z}$, причем образующей является линейное расслоение $\Lambda^m \mathcal{U}^*$.*

Доказательство. Выберем разложение $W = V_0 \oplus V_1$, $\dim V_0 = m$. Тогда $D = \{\, U \in \mathsf{Gr}(m, W) \mid U \cap V_0 \neq 0 \,\}$ — простой дивизор (он является образом морфизма $\mathsf{Gr}_{\mathbb{P}(V_1)}(m-1, W/\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_1)}(-1)) \to \mathsf{Gr}(m, W)$ и одновременно схемой нулей сечения расслоения $\Lambda^m \mathcal{U}^*$, соответствующего вложению $\Lambda^m V_0^* \subset \Lambda^m W^* = \Gamma(\mathsf{Gr}(m, W), \Lambda^m \mathcal{U}^*)$). При этом дополнение к D — аффинное пространство $\mathrm{Hom}(V_0, V_1)$. Остается применить точную последовательность $\mathbb{Z}D \to \mathsf{Pic}\,\mathsf{Gr}(m, V) \to \mathsf{Pic}(\mathsf{Gr}(m, W) \setminus D) \to 0$. $\square$

Линейное расслоение $\Lambda^m \mathcal{U}^*$ на $\mathsf{Gr}(m, W)$ обозначается $\mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(m,W)}(1)$, а его d-ая тензорная степень обозначается $\mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(m,W)}(d)$.

Упражнение 13. Пусть $0 \subset V_2 \subset V_1 \subset W$, $\dim V_2 < m < \dim V_1$. Проверьте, что функтор обратного образа для вложения $\mathsf{Gr}(k, V_1/V_2) \to \mathsf{Gr}(m, W)$ (где $k = m - \dim V_2$) переводит $\mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(m,W)}(d)$ в $\mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(k,V_1/V_2)}(d)$.

Теорема 5.6. *Подсхема D_X — схема нулей сечения расслоения $\mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(m,W)}(d)$. Если подсхема $X \subset \mathbb{P}(W)$ приведена, то она однозначно восстанавливается по D_X.*

Доказательство. Во-первых, заметим, что p — локально тривиальное расслоение со слоем $\mathsf{Gr}(m-1, n-1)$. Поэтому $\mathrm{codim}_{\mathsf{Fl}(1,m;W)} Z_X = \mathrm{codim} X = m$. Значит $\dim D_X \leqslant \dim Z_X = \dim \mathsf{Gr}(m, W) + (m-1) - m = \dim \mathsf{Gr}(m, W) - 1$. Выберем теперь общее подпространство $U_1 \subset W$ размерности $m+1$ (так чтобы $X \cap \mathbb{P}(U_1)$ было артиновой подсхемой), и общее подпространство $U_2 \subset U_1$ размерности $m-1$ (так чтобы $X \cap \mathbb{P}(U_2) = \emptyset$). Тогда рассмотрим $L_{U_1,U_2} = \{\, U \in \mathsf{Gr}(m, W) \mid U_2 \subset U \subset U_1 \,\} \cong \mathbb{P}(U_1/U_2)$. Ясно, что $D_X \cap L_{U_1,U_2}$ — подсхема длины d. Отсюда следует, что D_X дивизор. В самом деле, заметим, что $\mathsf{Gr}(m, U_1) \subset \mathsf{Gr}(m, W)$ — схема нулей сечения расслоения $(\mathcal{U}^*)^{\oplus(n-m-1)}$, которое порождается глобальными сечениями, а $L_{U_1,U_2} \subset \mathsf{Gr}(m, U_1)$ — схема нулей сечения расслоения $(U_1/\mathcal{U})^{\oplus(m-1)}$, которое тоже порождается глобальными сечениями, поэтому $\mathrm{codim}_{L_{U_1,U_2}}(D_X \cap L_{U_1,U_2}) = \mathrm{codim} D_X$. Остается заметить, что если $\mathcal{O}(k)$ — линейное расслоение, соответствующее дивизору D_X, то дивизору $D_X \cap L_{U_1,U_2}$ на L_{U_1,U_2} также соответствует расслоение $\mathcal{O}(k)$, поэтому $k = d$.

Покажем теперь, как X восстановить по D_X. Заметим для этого, что если $x \in \mathbb{P}(W) \setminus X$ — произвольная точка, то для общего $U \in q(p^{-1}(x))$ пересечение $\mathbb{P}(U) \cap X$ пусто, то есть $q(p^{-1}(x)) \not\subset D_X$, в то время как для $x \in X$ имеем $q(p^{-1}(x)) \subset D_X$ по построению. Значит $X = \{\, x \in X \mid q(p^{-1}(x)) \subset D_X \,\}$. Если X приведена, то схемная структура на X восстанавливается однозначно. $\square$

Остается заметить, что множество всех дивизоров, соответствующих линейному расслоению $\mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(m,W)}(d)$ — это проективное пространство $\mathbb{P}(V)$, $V = \Gamma(\mathsf{Gr}(m, W), \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(m,W)}(d))$. Мы показали, что всякая подсхема $X \subset \mathbb{P}(W)$ коразмерности m и степени d соответствует точке в нем. Отдельно можно проверить, что в $\mathbb{P}(V)$ существует локально замкнутое подмножество $C_{n-1,n-1-m,d}$ (которое называется схема Чжоу) такое что подсхемы X соответствуют его k-точкам. Однородные координаты на $\mathbb{P}(V)$ дают систему координат на $C_{n-1,n-1-m,d}$, которые называются координаты Чжоу.

Упражнение 14. Покажите, что $C_{n,n-1,d} = \mathbb{P}(S^d W^*)$.

Упражнение 15. Покажите, что $C_{n,k,1} = \mathsf{Gr}(k+1, n+1)$.

Пример 5.7. Рассмотрим нульмерные подсхемы степени 2 в $\mathbb{P}^n$. Тогда $m = n$, $\mathsf{Gr}(m, n+1) = \mathbb{P}^n$ (двойственное проективное пространство), а D_X — объединение двух гиперплоскостей (если X — две различные точки), либо двойная плоскость (если X — подсхема длины 2, сосредоточенная в одной точке). На этом примере хорошо видно, что приведенность X необходима для восстановления X по D_X.

Упражнение 16. Покажите, что $C_{n,0,2} = D_2(\varphi)$, где $\varphi : W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S^2 W^*)} \to W^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S^2 W^*)}$. Проверьте, что для $n = 2$ — это гиперповерхность степени 3 в $\mathbb{P}^5$.

Пример 5.8. Рассмотрим $C_{3,1,2}$. Тогда $V = S^2\Lambda^2W^*/\Lambda^4W^*$. Рассмотрим морфизм $\varphi_1 : \mathsf{Gr}(2,4) \times \mathsf{Gr}(2,4) \to \mathbb{P}(V)$, переводящий пару прямых (L_1, L_2) в образ $\Lambda^2L_1^\perp \otimes \Lambda^2L_2^\perp$ при отображении $\Lambda^2W^* \otimes \Lambda^2W^* \to V$. Пусть $M_1 \subset \mathbb{P}(V)$ — образ φ_1. Кроме того, рассмотрим морфизм $\varphi_2 : \mathbb{P}_{\mathbb{P}(W^*)}(S^2\mathcal{U}^*) \to \mathbb{P}(V)$, переводящий конику C, заданную уравнениями $\{ f_1 = f_2 = 0 \}$ (f_1 — уравнение плоскости, а f_2 — уравнение квадрики) в образ $f_1^2 \otimes f_2$ при отображении $S^2W^* \otimes S^2W^* \subset S^2(W^* \otimes W^*) \to V$. Пусть $M_2 \subset \mathbb{P}(V)$ — образ φ_2. Можно проверить, что $D_{L_1 \cup L_2} = \varphi_1(L_1, L_2)$, $D_C = \varphi_2(C)$. Отсюда видно, что $C_{3,1,2} \supset M_1 \cup M_2$. Более того, можно проверить, что они на самом деле равны, так что M_1 и M_2 — неприводимые компоненты в $C_{3,1,2}$.