Многообразия модулей

Часть 1. Функторы точек

На прошлой лекции мы установили, что множества различных алгебро-геометрических объектов часто находятся в биекции с множеством точек некоторых алгебраических многообразий. Естественно, хотелось бы, чтобы эти многообразия не падали бы с неба, а определялись однозначно изучаемыми множествами объектов. При этом очевидно, что множество k-точек схемы X не может определять схему однозначно — ясно, что на почти всех схемах множества k-точек равномощны. Поэтому нужна какая-то дополнительная структура. Наиболее удобной, оказывается структура "функтора точек".

Пусть X — произвольная схема. Напомним, что k-точка схемы X — это морфизм $\operatorname{Spec}\mathsf{k} \to X$. Аналогично, S-точкой схемы X (где S — произвольная схема), называется морфизм $S \to X$. Множество S-точек схемы X обозначается $X(S)$. Таким образом, $X(S) = \operatorname{Map}(S, X)$.

Заметим, что сопоставление $S \mapsto X(S)$ является контравариантным функтором на категории схем — морфизму $f : S' \to S$ очевидно сопоставляется морфизм $f^* : X(S) \to X(S')$, переводящий S-точку $S \to X$ в S'-точку $S' \xrightarrow{f} S \to X$. Обозначим этот функтор h_X. Итак,

$$h_X \in \mathsf{Fun}(\mathsf{Sch}^\circ, \mathsf{Sets}), \qquad h_X(S) = X(S).$$

где Sch — категория схем, а Sets — категория множеств. Оказывается, по функтору точек схема восстанавливается однозначно.

Предложение 1.1. *Если функторы точек h_X и h_Y изоморфны, то и схемы X и Y изоморфны. Более того, для любого функтора $F : \mathsf{Sch}^\circ \to \mathsf{Sets}$ имеется изоморфизм*

$$\operatorname{Hom}(h_X, F) \cong F(X).$$

В частности,

$$\operatorname{Hom}(h_X, h_Y) = h_Y(X) = Y(X) = \operatorname{Map}(X, Y).$$

Доказательство. Это совершенно общекатегорное утверждение известное как лемма Ионеды. В самом деле, пусть $\alpha : h_X \to F$ — морфизм функторов. В частности он дает морфизм $\alpha_X : h_X(X) \to F(X)$. Но $h_X(X) = X(X) = \operatorname{Map}(X, X)$ содержит выделенный элемент, id_X. Положим $f_\alpha := \alpha_X(\mathrm{id}_X) \in F(X)$. Обратно, пусть $f \in F(X)$. Каждой схеме S и каждому морфизму $\varphi : S \to X$ сопоставим элемент $F(\varphi)(f) \in F(S)$ — образ f под действием морфизма $F(\varphi) : F(X) \to F(S)$. Ясно, что сопоставление $\varphi \mapsto F(\varphi)(f)$ — морфизм $h_X(S) \to F(S)$, является морфизмом функторов $h_X \to F$, так как коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} h_X(S) \arrow[r] \arrow[d, "h_X(g)"'] & F(S) \arrow[d, "F(g)"] \\ h_X(S') \arrow[r] & F(S') \end{tikzcd}$$

для всякого морфизма $g : S' \to S$ очевидна — в одном случае $\varphi : S \to X$ переходит сначала в $h_X(g)(\varphi) = \varphi \circ g : S' \to X$, а затем в $F(\varphi \circ g)(f)$, а в другом — сначала в $F(\varphi)(f)$, а затем в $F(g)(F(\varphi)(f))$. Обозначим полученный морфизм функторов через $\alpha_f : h_X \to F$. Тогда ясно, что

$$\alpha_{f_\alpha}(\varphi) = F(\varphi)(f_\alpha) = F(\varphi)(\alpha_X(\mathrm{id}_X)) = \alpha_S(h_X(\varphi)(\mathrm{id}_X)) = \alpha_S(\mathrm{id}_X \circ \varphi) = \alpha_S(\varphi),$$

так что $\alpha_{f_\alpha} = \alpha$. Обратно,

$$f_{\alpha_f} = \alpha_f(\mathrm{id}_X) = F(\mathrm{id}_X)(f) = \mathrm{id}_{F(X)}(f) = f.$$

Таким образом, мы убедились, что $\operatorname{Hom}(h_X, F) = F(X)$. Утверждение про $\operatorname{Hom}(h_X, h_Y) = \operatorname{Map}(X, Y)$ сразу отсюда следует. Наконец, если $h_X \cong h_Y$, то взаимно обратные морфизмы $h_X \to h_Y$ и $h_Y \to h_X$ обязаны происходить из морфизмов $X \to Y$ и $Y \to X$, которые обязаны быть взаимно обратными. $\square$

Часть 2. Представимые функторы и универсальные семейства

Пусть теперь задан произвольный функтор $F : \mathsf{Sch}^\circ \to \mathsf{Sets}$.

Определение 2.1. Функтор F называется представимым, если существует схема X и изоморфизм функторов $h_X \cong F$. В этом случае говорят, что X — тонкое многообразие модулей, соответствующее функтору F.

Пример 2.2. Пусть W — векторное пространство. Рассмотрим такой функтор $F : \mathsf{Sch}^\circ \to \mathsf{Sets}$. Каждой схеме S сопоставим множество линейных подрасслоений $\epsilon : \mathcal{L} \subset W \otimes \mathcal{O}_S$, с точностью до эквивалентности $(\mathcal{L}, \epsilon) \sim (\mathcal{L}', \epsilon')$, если существует изоморфизм $\varphi : \mathcal{L}' \to \mathcal{L}$, такой что $\epsilon' = \epsilon \circ \varphi$. Тогда функтор F представим, а соответствующее тонкое многообразие модулей — $\mathbb{P}(W)$.

Пример 2.3. Пусть W — векторное пространство. Рассмотрим такой функтор $F : \mathsf{Sch}^\circ \to \mathsf{Sets}$. Каждой схеме S сопоставим множество подрасслоений $\epsilon : \mathcal{E} \subset W \otimes \mathcal{O}_S$ ранга r, с точностью до эквивалентности $(\mathcal{E}, \epsilon) \sim (\mathcal{E}', \epsilon')$, если существует изоморфизм $\varphi : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}$, такой что $\epsilon' = \epsilon \circ \varphi$. Тогда функтор F представим, а соответствующее тонкое многообразие модулей — $\mathsf{Gr}(r, W)$.

Упражнение 1. Напишите функтор, тонкое многообразие модулей которого — это многообразие флагов.

Пример 2.4. Пусть E — векторное расслоение на схеме X. Рассмотрим такой функтор $F : \mathsf{Sch}^\circ \to \mathsf{Sets}$. Каждой схеме S сопоставим множество морфизмов $f : S \to X$ и линейных подрасслоений $\epsilon : \mathcal{L} \subset f^*E$, с точностью до эквивалентности $(f, \mathcal{L}, \epsilon) \sim (f', \mathcal{L}', \epsilon')$, если $f' = f$ и существует изоморфизм $\varphi : \mathcal{L}' \to \mathcal{L}$, такой что $\epsilon' = \epsilon \circ \varphi$. Тогда функтор F представим, а соответствующее тонкое многообразие модулей — $\mathbb{P}_X(E)$.

Упражнение 2. Напишите функтор, тонкое многообразие модулей которого — это $\mathsf{Gr}_X(r, E)$.

Пусть функтор F представим, а соответствующее тонкое многообразие модулей — X. Тогда в множестве $F(X)$ есть выделенный элемент — то, что соответствует тождественному морфизму $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Map}(X, X) = h_X(X)$ при изоморфизме $F \cong h_X$. Этот элемент называется универсальным семейством на X.

Пример 2.5. В примере 2.2 универсальное семейство — тавтологическое вложение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1) \to W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}$.

Пример 2.6. В примере 2.3 универсальное семейство — тавтологическое вложение $\mathcal{U} \to W \otimes \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(r,W)}$.

Пример 2.7. В примере 2.4 универсальное семейство — это проекция $\pi : \mathbb{P}_X(\mathcal{E}) \to X$ и тавтологическое вложение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_X(E)}(-1) \to \pi^* E$.

Полезно понимать, что на языке многообразий модулей и универсальных семейств лемма Ионеды имеет следующую переформулировку.

Предложение 2.8. *Пусть $F : \mathsf{Sch}^\circ \to \mathsf{Sets}$ — функтор, обладающий тонким многообразием модулей X, а $\mathfrak{u} \in F(X)$ — соответствующее универсальное семейство. Тогда морфизмы $S \to X$ находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами множества $F(S)$, причем если $\varphi : S \to X$ соответствует элементу $f \in F(S)$, то $f = F(\varphi)(\mathfrak{u})$.*

Часть 3. Функтор подсхем

Вернемся к вопросу о параметризации семейств подсхем в фиксированном многообразии X. Попробуем определить подходящий функтор $\mathfrak{H} : \mathsf{Sch}^\circ \to \mathsf{Sets}$. Представим себе, что существует алгебраическое многообразие H_X, параметризующее все подсхемы в X. Ясно, что соответствующим универсальным семейстом должна быть подсхема $Z_X \subset X \times H_X$ — тогда слои Z_X над точками H_X будут подсхемами в X. Соответственно, для каждой S-точки схемы H_X, то есть морфизма $S \to H_X$, можно будет рассмотреть расслоенное произведение $Z_X \times_{H_X} S$ — это будет подсхема в $(X \times H_X) \times_{H_X} S = X \times S$. Таким образом, естественно определить $\mathfrak{H}(S)$ как множество подсхем в $Z \subset X \times S$ с какими-то ограничениями.

Естественное ограничение — слои морфизма $Z \to S$ должны быть “похожими”. Например, если общий слой — точка, то специальный слой тоже должен быть точкой, а не двумя точками. Или, например, если общий слой — коника, то и специальный слой должен быть коникой. Вопрос — как такого рода ограничения сформулировать математически.

Можно, например, рассматривать только такие подсхемы $Z \subset X \times S$, что морфизм $Z \to S$ является локально тривиальным расслоением. Это было бы вполне разумным условием в дифференциальной геометрии, но в алгебраической геометрии — это слишком сильное условие. Конечно, оно запрещает появление лишних точек в слоях, но также оно запрещает и вырождения коник. Поэтому условие локальной тривиальности не годится.

С другой стороны, следующие два условия заведомо должны быть выполнены:

- неприводимые компоненты рассматриваемых подсхем $Z \subset X \times S$ должны быть доминантны над S:
- множество рассматриваемых подсхем должно быть замкнуто относительно замены базы — если $Z \subset X \times S$ допустима, а $S' \to S$ — произвольный морфизм, то $Z' = Z \times_S S' \subset X \times S'$ тоже должна быть допустима (иначе $\mathfrak{H}_X$ не будет функтором).

Описание этих свойств приводит к понятиям плоского морфизма и плоского пучка — одним из важнейших понятий алгебраической геометрии.

Часть 4. Плоские пучки и морфизмы

Определение 4.1. Модуль M над кольцом A называется плоским, если функтор $N \mapsto M \otimes_A N$ точен слева.

Пример 4.2. Свободный (проективный) модуль над кольцом всегда плоский. Множество плоских модулей замкнуто относительно расширений и прямых слагаемых.

Лемма 4.3. *Пусть A локальное нетерово кольцо с полем вычетов k, а M конечно порожденный A-модуль. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *M свободен;*
(ii) *M проективен;*
(iii) *M плоский;*
(iv) $\mathrm{Tor}_1(M, \mathsf{k}) = 0$.

Доказательство. $(i) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (iii) \Longrightarrow (iv)$ очевидно. Докажем $(iv) \Longrightarrow (i)$. Пусть $\mathrm{Tor}_1(M, \mathsf{k}) = 0$. Пусть $\dim M \otimes_A \mathsf{k} = \dim M/\mathfrak{m}M = n$. Выберем n образующих, поднимем их в M — получим морфизм $A^n \to M$, сюръективный по лемме Накаямы. Пусть N — его ядро, так что $0 \to N \to A^n \to M \to 0$ — точная тройка. Домножая на k получим точную последовательность

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1(M, \mathsf{k}) \to N \otimes_A \mathsf{k} \to \mathsf{k}^n \to M \otimes_A \mathsf{k} \to 0.$$

Отсюда $N \otimes_A \mathsf{k} = 0$, то есть $N = \mathfrak{m}N$, то есть по лемме Накаямы $N = 0$ (N конечно порожден так как A нетерово). ☐

Пример 4.4. Условие конечной порожденности существенно. Например, пусть $A = \mathsf{k}[x, y]_{(0)}$ — локальное кольцо точки $0 \in \mathbb{A}^2$, а $M = \mathsf{k}(x)$ (y действует нулем). Тогда M не является плоским, но $\mathrm{Tor}_1^A(M, \mathsf{k}) = 0$ (проверьте с помощью комплекса Кошуля).

Пример 4.5. $\mathbb{Q}$ является плоским $\mathbb{Z}_p$ модулем, но не является проективным.

Упражнение 3. Покажите, что M плоский над $A \iff \mathrm{Tor}_{>0}^A(M, -) = 0$.

Упражнение 4. Покажите, что множество плоских A-модулей замкнуто относительно ядер эпиморфизмов. В частности, если M обладает конечной правой плоской резольвентой, то M плоский.

Лемма 4.6. *Модуль M над кольцом A плоский $\iff \mathrm{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{a}) = 0$ для всех конечно порожденных идеалов $\mathfrak{a} \subset A$.*

Доказательство. Чтобы доказать $(\Longrightarrow)$ домножим на M точную тройку $0 \to \mathfrak{a} \to A \to A/\mathfrak{a} \to 0$. Так как $\mathrm{Tor}_1^A(M, A) = 0$, получим точную последовательность $0 \to \mathrm{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{a}) \to M \otimes_A \mathfrak{a} \to M \to M/\mathfrak{a}M \to 0$. Если M плоский, то центральная стрелка вложение, значит $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{a}) = 0$.

Докажем теперь $(\Longleftarrow)$. Во-первых, заметим, что из $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{a}) = 0$ следует $\mathrm{Tor}_1^A(M, N) = 0$ для всех конечно представленных A-модулей N, так как все такие модули обладают конечной фильтрацией с факторами вида $A/\mathfrak{a}$. Предположим теперь, $0 \to N_1 \to N_2 \to N_3 \to 0$ — точная тройка, которая после умножения на M теряет точность. Значит морфизм $M \otimes_A N_1 \to M \otimes_A N_2$ не является вложением, то есть некоторый элемент переходит в 0. Пусть этот элемент — $\sum_{i=1}^k m_i \otimes n_i$. То, что он переходит в 0 означает, что найдется элемент $\sum_{j=1}^l \mu_j \otimes a_j \otimes \nu_j \in M \otimes_{\mathbb{Z}} A \otimes_{\mathbb{Z}} N_2$, такой что $\sum_j (\mu_j a_j \otimes \nu_j - \mu_j \otimes a_j \nu_j) = \sum_i m_i \otimes n_i$ в $M \otimes_{\mathbb{Z}} N_2$. Рассмотрим подмодуль в $N_1' \subset N_1$, порожденный элементами n_i, и подмодуль $N_2' \subset N_2$, порожденный образами n_i и ν_j. Тогда $0 \neq \sum \mu_i \otimes n_i \in M \otimes N_1'$ (так как переходит в ненулевой элемент в $M \otimes_A N_1$), но его образ в $M \otimes_A N_2'$ равен нулю. Значит $\operatorname{Tor}_1^A(M, N_2'/N_1') \neq 0$, что невозможно, так как N_2'/N_1' по построению конечно представлен. $\square$

Следствие 4.7. *Пусть A — область главных идеалов. Модуль M над A плоский $\iff$ M не имеет кручения, то есть ненулевые элементы A действуют без ядра на M.*

Доказательство. Так как A — область главных идеалов, всякий $\mathfrak{a} \subset A$ имеет вид $\mathfrak{a} = (t)$, $t \in A$, поэтому имеем свободную резольвенту $0 \to A \xrightarrow{t} A \to A/\mathfrak{a} \to 0$, поэтому $\operatorname{Tor}_1^A(M, A/\mathfrak{a}) = \operatorname{Ker}(M \xrightarrow{t} M)$. $\square$

Лемма 4.8. *Модуль M над кольцом A плоский $\iff$ для любого простого $\mathfrak{p} \subset A$ модуль $M_{\mathfrak{p}}$ над $A_{\mathfrak{p}}$ плоский.*

Доказательство. Функтор локализации точен и коммутирует с тензорным произведением — $(N \otimes_A M)_{\mathfrak{p}} = N_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}}$ — поэтому плоскость модуля влечет плоскость его локализации. Обратно, предположим, что все локализации модуля M плоские. Рассмотрим точную тройку $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$, умножим ее на M, и обозначим через K когомологию в первом члене — $0 \to K \to N' \otimes_A M \to N \otimes_A M \to N'' \otimes_A M \to 0$. Переходя к локализации, получаем точную последовательность $0 \to K_{\mathfrak{p}} \to N'_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} \to N_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} \to N''_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} \to 0$. Из плоскости модуля $M_{\mathfrak{p}}$ следует $K_{\mathfrak{p}} = 0$. Но если $K_{\mathfrak{p}} = 0$ для всех $\mathfrak{p}$, то $K = 0$. $\square$

Упражнение 5. Пусть $f : A \to B$ — гомоморфизм колец, а M — B-модуль. Покажите, что M плоский над $A \iff$ для любого простого $\mathfrak{p} \subset B$ модуль $M_{\mathfrak{p}}$ над $A_{f^{-1}(\mathfrak{p})}$ плоский.

Определение 4.9. Пусть $f : Y \to X$ — морфизм схем. Квазикогерентный пучок $\mathcal{F}$ на Y называется плоским над X, если для всякой точки $y \in Y$ слой $\mathcal{F}_y$ является плоским модулем над кольцом $\mathcal{O}_{X,f(y)}$.

Лемма 4.10. *Плоскость сохраняется при замене базы. Иначе говоря, если $f : Y \to X$ — морфизм, $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок на Y плоский над X, а $s : X' \to X$ — произволный морфизм, то $p_Y^* \mathcal{F}$ — пучок на $X' \times_X Y$ плоский над X'.*

Доказательство. Поскольку плоскость — локальное понятие, можно считать, что $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$, $X' = \operatorname{Spec} A'$, а пучок $\mathcal{F}$ ассоциирован с B-модулем M. Тогда пучок $p_Y^* \mathcal{F}$ ассоциирован с $A' \otimes_A B$-модулем $A' \otimes_A M$. Заметим, что для любого A'-модуля N выполнено свойство

$$N \otimes_{A'} (A' \otimes_A M) = N \otimes_A M,$$

поэтому из плоскости M над A следует плоскость $A' \otimes_A M$ над A'. $\square$

Определение 4.11. Морфизм схем $f : Y \to X$ называется плоским, если пучок $\mathcal{O}_Y$ плоский над X.

Упражнение 6. Проверьте, что понятие плоского морфизма сохранятся при замене базы.

Лемма 4.12. *Пусть X — целая регулярная схема размерности 1. Морфизм $f : Y \to X$ плоский $\iff$ всякая ассоциированная точка схемы Y отображается в общую точку схемы X.*

Доказательство. Утверждение локально, поэтому можно считать, что $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$, а морфизм f задан морфизмом колец $f : A \to B$. Пусть $\mathfrak{p} \subset B$ — ассоциированный идеал B, такой что $f^{-1}(\mathfrak{p}) \neq 0$. Значит существует $0 \neq t \in A$, такой что $f(t)$ является делителем нуля в B. Домножая точную тройку $0 \to A \xrightarrow{t} A \to A/tA \to 0$ (t не является делителем нуля в A, так как A целостно) на B, получим тройку, не являющуюся точной слева, значит B не является плоским A-модулем.

Обратно, предположим для всех ассоциированных идеалов $\mathfrak{p} \subset B$ имеем $f^{-1}(\mathfrak{p}) = 0$. Значит для всех $0 \neq t \in A$ элемент $f(t) \in B$ не является делителем нуля. Для проверки плоскости B достаточно проверить, что для любого максимального идеала $\mathfrak{m} \subset A$ модуль $B_{\mathfrak{m}}$ плоский над $A_{\mathfrak{m}}$. Но $A_{\mathfrak{m}}$ — кольцо дискретного нормирования, значит область главных идеалов, поэтому достаточно проверить, что ненулевые элементы в $A_{\mathfrak{m}}$ переходят не в делители нуля в $B_{\mathfrak{m}}$, что очевидно. $\square$

Пример 4.13. Условие регулярности существенно. В самом деле, пусть $X = \operatorname{Spec} \mathsf{k}[t^2, t^3]$, $Y = \operatorname{Spec} \mathsf{k}[t]$. Тогда $\operatorname{Tor}_i^{\mathsf{k}[t^2,t^3]}(\mathsf{k}[t], \mathsf{k}) = \mathsf{k}^2$ для всех $i \geqslant 0$ (проверьте!), значит $\mathsf{k}[t]$ не плоский.

Пример 4.14. Условие размерности 1 существенно. В самом деле, пусть $X = \operatorname{Spec} \mathsf{k}[y, z]$, $Y = \operatorname{Spec} \mathsf{k}[x, y]$, $z \mapsto xy$. Тогда $\operatorname{Tor}_i^{\mathsf{k}[y,z]}(\mathsf{k}[x, y], \mathsf{k}) = \mathsf{k}[x]$ для $i = 0, 1$ (проверьте!), значит $\mathsf{k}[x, y]$ не плоский над $\mathsf{k}[y, z]$.

Упражнение 7. Пусть $g : Z \to Y$ и $f : Y \to X$ — морфизмы, а $\mathcal{F} \in \mathsf{Qcoh}(Z)$. Если f плоский, а $\mathcal{F}$ плоский над Y, то $\mathcal{F}$ плоский над X.

Упражнение 8. Докажите, что (а) открытое вложение плоско; (б) локально тривиальное расслоение плоско; (в) замкнутое вложение **не плоско** (кроме вложения компонент связности); (г) конечный морфизм $Y \to X$ (то есть $Y = \operatorname{Spec}_X \mathcal{A}$, где $\mathcal{A}$ — пучок $\mathcal{O}_X$-алгебр, когерентный как пучок $\mathcal{O}_X$-модулей) плоский $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}$ локально свободен.

Упражнение 9. Покажите, что (а) плоский морфизм доминантен; (б) размерность всех слоев плоского морфизма $X \to Y$ равна разности размерностей многообразий X и Y.

Часть 5. Функторы Hilb, Quot и многочлен Гильберта

Пусть X — схема, а $\mathcal{E}$ — когерентный пучок на X. Определим функторы Hilb и Quot формулами

$$\begin{aligned} \mathsf{Hilb}_X(S) &= \{\, Z \subset X \times S \mid Z \text{ — подсхема, плоская над } S \,\}, \\ \mathsf{Quot}_X^{\mathcal{E}}(S) &= \{\, (\mathcal{F}, \varphi) \mid \mathcal{F} \in \mathsf{coh}(X \times S),\ \mathcal{F} \text{ — плоский над } S, \text{ а } \varphi : \mathcal{E} \boxtimes \mathcal{O}_S \to \mathcal{F} \text{ — эпиморфизм} \,\}. \end{aligned}$$

Упражнение 10. Покажите, что $\mathsf{Hilb}_X = \mathsf{Quot}_X^{\mathcal{O}_X}$.

Очень важно следующее наблюдение.

Предложение 5.1. *Если X — проективная схема, а $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на $X \times S$, плоский над S, то функция $s \mapsto P_{\mathcal{F}_s}$ локально постоянна на S, где $\mathcal{F}_s$ — ограничение $\mathcal{F}$ на $X \times \operatorname{Spec} \mathsf{k}(s)$, а $P_{\mathcal{F}_s}$ — его многочлен Гильберта, то есть такой многочлен, что $P_{\mathcal{F}_s}(m) := \dim_{\mathsf{k}(s)} \Gamma(X \times \operatorname{Spec} \mathsf{k}(s), \mathcal{F}_s(m))$ при $m \gg 0$.*

Доказательство. Можно с самого начала считать, что $X = \mathbb{P}^n$, а S — спектр локального кольца A. Тогда $X \times S = \operatorname{Proj}_A(A[x_0, \dots, x_n])$, а пучок $\mathcal{F}$ соответствует градуированному $A[x_0, \dots, x_n]$-модулю $M = \oplus M_k$, $M_k = \Gamma(\mathbb{P}^n_A, \mathcal{F}(k))$. Заметим также, что пучок $\mathcal{F}_s$ соответствует градуированному $\mathsf{k}(s)[x_0, \dots, x_n]$-модулю $M \otimes_A \mathsf{k}(s) = \oplus_m M_m \otimes_A \mathsf{k}(s)$, то есть $\Gamma(X \times \operatorname{Spec} \mathsf{k}(s), \mathcal{F}_s(m)) = \dim_{\mathsf{k}(s)} M_m \otimes_A \mathsf{k}(s)$ при $m \gg 0$, поэтому достаточно проверить, что при $m \gg 0$ модуль M_m свободен над A.

Рассмотрим точную последовательность градуированных $B := A[x_0, \dots, x_n]$-модулей

$$0 \to B \to \oplus_{i=0}^n B[x_i^{-1}] \to \oplus_{0 \leqslant i < j \leqslant n} B[x_i^{-1}, x_j^{-1}] \to \dots \to B[x_0^{-1}, \dots, x_n^{-1}] \to x_0^{-1} \dots x_n^{-1} A[x_0^{-1}, \dots, x_n^{-1}] \to 0,$$

в которой все морфизмы кроме последнего — знакопеременные суммы естественных вложений, а последний — естественная проекция. Так как все его члены кроме последнего плоские над B, то домножая его над B на M получим комплекс

$$(*) \qquad 0 \to M \to \oplus_{i=0}^n M[x_i^{-1}] \to \oplus_{0 \leqslant i < j \leqslant n} M[x_i^{-1}, x_j^{-1}] \to \dots \to M[x_0^{-1}, \dots, x_n^{-1}] \to 0,$$

когомологии которого будут равны $\operatorname{Tor}_k^B(M, x_0^{-1} \dots x_n^{-1} A[x_0^{-1}, \dots, x_n^{-1}])$. С другой стороны, так как M конечно порожден легко проверить, что M обладает конечной свободной над B резольвентой (при построении резольвенты максимальное l, такое что $\operatorname{Tor}_l^B(M, A)$ будет уменьшаться, при этом оно изначально ограничено числом n ввиду резольвенты Кошуля, а если оно равно нулю, то M — свободный B-модуль). Используя такую резольвенту для вычисления $\operatorname{Tor}_k^B(M, x_0^{-1} \dots x_n^{-1} A[x_0^{-1}, \dots, x_n^{-1}])$, легко видеть, что найдется число $N \in \mathbb{Z}$, такое что все модули $\operatorname{Tor}_k^B(M, x_0^{-1} \dots x_n^{-1} A[x_0^{-1}, \dots, x_n^{-1}])$ сосредоточены в степенях $< N$. Поэтому для $m \geqslant N$ градуировачная компонента комплекса $(*)$ с номером m — это точная последовательность

$$0 \to M_m \to \oplus_{i=0}^n M[x_i^{-1}]_m \to \oplus_{0 \leqslant i < j \leqslant n} M[x_i^{-1}, x_j^{-1}]_m \to \dots \to M[x_0^{-1}, \dots, x_n^{-1}]_m \to 0.$$

Плоскость пучка $\mathcal{F}$ над S по определению равносильна плоскости каждого из A-модулей $M[x_i^{-1}]_0$. Заметим, что $M[x_i^{-1}]_m \cong M[x_i^{-1}]_0$ — плоский над A модуль, а все остальные являются его локализациями, поэтому тоже плоские. Отсюда заключаем, что M_m тоже плоский. Но M_m конечно порожден над A, значит M_m свободен. $\square$

Следствие 5.2. *Функторы* Hilb_X *и* $\mathsf{Quot}_X^{\mathcal{E}}$ *являются несвязным объединением функторов*

$$\begin{array}{rclrcl} \mathsf{Hilb}_X & = & \bigsqcup_p \mathsf{Hilb}_X^p, & \mathsf{Hilb}_X^p(S) & = & \{\, Z \in \mathsf{Hilb}_X(S) \mid P_{Z_s} = p \text{ для всех } s \in S \,\}, \\ \mathsf{Quot}_X^{\mathcal{E}} & = & \bigsqcup_p \mathsf{Quot}_X^{\mathcal{E},p}, & \mathsf{Quot}_X^{\mathcal{E},p}(S) & = & \{\, (\mathcal{F},\varphi) \in \mathsf{Quot}_X^{\mathcal{E}}(S) \mid P_{\mathcal{F}_s} = p \text{ для всех точек } s \in S \,\}, \end{array}$$

где p *пробегает множество всех многочленов.*

Несвязным объединением функторов $F_i : \mathsf{Sch}^\circ \to \mathsf{Sets}$, $i \in I$ называется функтор

$$\left(\bigsqcup_{i\in I} F_i\right)(S) = \bigsqcup_{\varphi : S \to I} \prod_{i \in I} F_i(\varphi^{-1}(i)),$$

где φ пробегает множество всех непрерывных отображений $S \to I$ (I рассматривается с дискретной топологией), а произведение берется по тем i, для которых φ^{-1} непусто.

Упражнение 11. Покажите, что функтор $\bigsqcup F_i$ представим $\Longleftrightarrow$ каждый из функторов F_i представим, причем многообразие модулей функтора $\bigsqcup F_i$ — несвязное объединению многообразий модулей функторов F_i.

Упражнение 12. Покажите, что $\mathsf{Hilb}_X^p = \mathsf{Quot}_X^{\mathcal{O}_X,p}$.

Из упражнения следует, что для представимости функтора Hilb_X необходимо и достаточно проверить представимость каждого из функторов Hilb_X^p, которые являются частным случаем функторов $\mathsf{Quot}_X^{\mathcal{E},p}$. Представимость функтора Quot, доказанная Гротендиком (мы ее обсудим на следующей лекции), является основой всех теорем о представимости функторов в алгебраической геометрии.

Упражнение 13. Покажите, что (а) функтор Hilb_X^1 представляется схемой X; (б) функтор $\mathsf{Hilb}_{\mathbb{P}^n}^{1+m}$ представляется схемой $\mathsf{Gr}(2, n+1)$; (в) функтор $\mathsf{Quot}_{\operatorname{Spec}\mathsf{k}}^{W,r}$ представляется схемой $\mathsf{Gr}(r, W^*)$. Во всех случаях опишите универсальные семейства.