УДК 512.66

А. И. Бондал, М. М. Капранов

Оснащенные триангулированные категории

Решается задача описания триангулированной категории, порожденной конечным числом объектов. Для этого вводится понятие «оснащения» триангулированной категории с помощью комплексов RHom.

Понятие триангулированной категории [1], [2], [18], широко используемое в гомологической алгебре, не во всех отношениях является удовлетворительным, что отмечалось, в частности, в книге [18]. Именно, основной принцип гомологической алгебры состоит в том, что надо всегда рассматривать не только когомологии комплексов, а и сами комплексы. В то же время абелева группа $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(E, F)$ в триангулированной категории $\mathscr{D}$ есть образование типа группы нулевых когомологий некоторого цепного комплекса (в алгебраически возникающих категориях) или нулевой гомотопической группы некоторого CW-спектра (в топологически возникающих категориях). В большинстве случаев, встречающихся на практике, дело обстоит именно так. В частности, в триангулированных категориях, встречающихся в гомологической алгебре (гомотопическая, производная категории) группа $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(E, F)$ является группой нулевых когомологий естественно возникающего комплекса $\mathrm{RHom}(E, F)$. При этом возникающие точные функторы происходят из функторов, сохраняющих комплексы RHom.

Аксиоматизация понятия «триангулированная категория с комплексами RHom» приводит к необходимости рассматривать дифференциальные градуированные (DG-) категории. Структура DG-категории должна быть в разумном смысле согласована с триангулированной структурой. Во-первых, когомологии комплексов RHom должны быть естественно изоморфны группам Ext в триангулированной категории. Далее, имеются два способа определения высших композиций Масси. Один исходит из DG-структуры, другой — из триангулированной. Естественно ожидать, что для DG-структуры, согласованной с триангулированной, оба способа должны приводить к одному ответу.

Чтобы удовлетворить этим (и другим) требованиям, мы вводим в настоящей работе понятие предтриангулированной категории (§ 3). Это DG-категория, обладающая функториальным конусом замкнутых морфизмов (и, более общо, сверткой так называемых скрученных комплексов, см. §1). Условия существования свертки можно сформулировать как представимость некоторых функторов. Таким образом, предтриангулированная категория — это DG-категория с дополнительными свойствами, а не с дополнительной структурой.

Важным примером предтриангулированной категории является категория $\mathrm{Pre\text{-}Tr}(\mathscr{A})$ скрученных комплексов над DG-категорией $\mathscr{A}$ (см. § 1). Функтор перехода от $\mathscr{A}$ к $\mathrm{Pre\text{-}Tr}(\mathscr{A})$ является аналогом взятия свободного объекта в алгебраической теории. В действительности предтриангулированная категория может быть определена как алгебра над монадой (в смысле Квиллена — Маклейна [3]), построенной с помощью функтора Pre-Tr.

Триангулированная категория, как математическая структура, не является частным случаем универсальной алгебры в смысле А. Г. Куроша [4], т. е. множества с заранее заданной системой операций (подобно тому, как не является универсальной алгеброй топологическое пространство). Напротив, предтриангулированная категория является универсальной алгеброй.

Наряду с монадой Pre-Tr можно ввести еще одну монаду, используя односторонние скрученные комплексы. Это делается в § 4, где дается описание оснащенной триангулированной категории, порожденной конечным числом объектов.

В случае, когда триангулированная категория порождена элементами упорядоченного исключительного набора (см. [9], [17]), естественно задаться вопросом о том, как будет преобразовываться Ext-алгебра набора при его перестройках. Оказывается, что знание Ext-групп между элементами исходного набора для этого, вообще говоря, недостаточно. Однако за перестройками вполне можно проследить на уровне DG-алгебр. Для этого необходимо рассмотреть предтриангулированное оснащение категории (см. § 5).

§ 1. *DG*-категории и скрученные комплексы над ними

Предаддитивная категория [5] — это такая категория $\mathscr{A}$, в которой все множества $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(E, F)$ снабжены структурами абелевых групп, так что композиция морфизмов билинейна. Предаддитивная категория с одним объектом есть не что иное как кольцо. Аддитивной категорией называется предаддитивная категория, в которой существуют конечные прямые суммы.

DG-категорией мы будем называть такую предаддитивную категорию $\mathscr{A}$, у которой все абелевы группы $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(E, F)$ снабжены $\mathbb{Z}$-градуировкой и дифференциалом d степени $+1$, т. е. снабжены структурой комплекса. При этом требуется, чтобы морфизмы композиции

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(E, F) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(F, G) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(E, G)$$

были морфизмами комплексов и, кроме того, для всякого $E \in \mathscr{A}$ выполнено равенство $d(\mathrm{id}_E) = 0$. Обозначим через $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}^k(E, F)$ k-ю градуировочную компоненту комплекса $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(E, F)$.

Всякое дифференциальное градуированное кольцо может быть рассмотрено как DG-категория с одним объектом. Другой важный пример DG-категории строится так. Пусть $\mathscr{A}$ — аддитивная категория. Рассмотрим категорию $C(\mathscr{A})$, объектами которой являются коцепные комплексы над $\mathscr{A}$. Если $K^{\cdot}$, $L^{\cdot}$ — такие комплексы, то

$$\mathrm{Hom}^m_{C(\mathscr{A})}(K^{\cdot}, L^{\cdot}) = \bigoplus_{j-i=m} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(K^i, L^j).$$

Для

$$f = \{f_i\colon K^i \to L^{i+m}\} \in \mathrm{Hom}^m(K^{\cdot}, L^{\cdot})$$

положим

$$df = \{f_{i+1}d_K + (-1)^{m+1} d_L f_i\colon K^i \to L^{i+m+1}\},$$

где d_K, d_L — дифференциалы в $K^{\cdot}$ и $L^{\cdot}$. Этим на $C(\mathscr{A})$ задается структура DG-категории. Замкнутые морфизмы степени 0 — это морфизмы комплексов в обычном смысле. «Точные» морфизмы — те, что гомотопны нулю. С любой DG-категорией $\mathscr{A}$ связана градуированная категория $H(\mathscr{A})$, называемая категорией когомологий $\mathscr{A}$. Объекты в $H(\mathscr{A})$ — те же, что и в $\mathscr{A}$, а морфизмы из X в Y определяются как когомологии комплекса $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, Y)$.

Ограничиваясь нулевыми когомологиями комплексов Hom, мы получим предаддитивную категорию $H^0(\mathscr{A})$. Так, например, для аддитивной категории $\mathscr{B}$ категория $H^0C(\mathscr{B}) = \mathrm{Hot}(\mathscr{B})$ есть гомотопическая категория комплексов над $\mathscr{B}$. Пусть также $\mathscr{A}^{\natural}$ — градуированная категория, получающаяся из $\mathscr{A}$ забыванием дифференциала на морфизмах.

DG-функтором между DG-категориями $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ называется аддитивный функтор $f\colon \mathscr{A}\to\mathscr{B}$, сохраняющий градуировку и дифференциал на морфизмах. Такой функтор индуцирует функтор $H(f)\colon H(\mathscr{A})\to H(\mathscr{B})$. Будем называть DG-функтор f квазиизоморфизмом (квазиэквивалентностью), если $H(f)$ — изоморфизм (эквивалентность) категорий.

В частности, если $\mathscr{A}$ — DG-категория с одним объектом, отвечающая DG-алгебре A, а $\mathscr{B} = \mathrm{C}(\mathscr{A}b)$, то DG-функтор из $\mathscr{A}$ в $\mathscr{B}$ есть не что иное как левый DG-модуль над $\mathscr{A}$. Категорию DG-категорий (с DG-функторами в качестве морфизмов) будем обозначать DG-Cat.

Если $\mathscr{A}$ и $\mathscr{A}'$ — две DG-категории, то множество ковариантных DG-функторов $\mathscr{A}\to\mathscr{A}'$ само есть множество объектов некой DG-категории, которую обозначим $DG\text{-}\mathrm{Fun}(\mathscr{A}, \mathscr{A}')$. Именно, пусть φ и ψ — два DG-функтора. Положим $\mathrm{Hom}^k(\varphi, \psi)$ равным множеству естественных преобразований градуированных функторов $t\colon \varphi^{\natural} \to \psi^{\natural}[k]$ из $\mathscr{A}^{\natural}$ в $\mathscr{B}^{\natural}$ (т. е. для каждого объекта $E\in\mathrm{Ob}\mathscr{A}$ $t(E)\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}^k(\varphi(E), \psi(E))$).

Дифференциал преобразования t на каждом E равен $dt(E)$. Таким образом, замкнутые морфизмы степени 0 — это DG-преобразования DG-функторов. Аналогично определяется DG-категория $DG\text{-}\mathrm{Fun}^0(\mathscr{A}, \mathscr{A}')$, состоящая из контравариантных DG-функторов.

Определение 1([6]). Пусть $\mathscr{A}$ — DG-категория. Скрученным комплексом над $\mathscr{A}$ называется набор $\{(E_i)_{i\in\mathbf{Z}}, q_{ij}\colon E_i\to E_j\}$, где E_i — объекты $\mathscr{A}$, равные 0 для почти всех i, q_{ij} — морфизмы в $\mathscr{A}$ степени $i-j+1$, удовлетворяющие условию $dq_{ij} + \sum\limits_k q_{kj}q_{ik} = 0$.

Пример. Если $\mathscr{A} = C(\mathscr{B})$ есть категория комплексов над аддитивной категорией $\mathscr{B}$, то скрученный комплекс над $\mathscr{A}$ есть просто комплекс над $\mathscr{B}$, каждый член которого снабжен дополнительной градуировкой. Это понятие обобщает понятие скрученного комплекса над $\mathscr{B}$ в смысле О'Брайена, Толедо и Тонга [7].

Скрученные комплексы над DG-категорий $\mathscr{A}$ сами образуют DG-категорию следующим образом. Пусть $C = \{E_i, q_{ij}\}$, $C' = \{E_i', q_{ij}'\}$ — два скрученных комплекса. Положим

$$\mathrm{Hom}^k(C, C') = \coprod_{l+j-i=k} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}^l(E_i, E_j')$$

и для $f\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}^l(E_i, E_j')$ положим

$$df = d_{\mathscr{A}}f + \sum_m (q_{jm}f + (-1)^{l(i-m+1)}fq_{mi}),$$

где $d_{\mathscr{A}}$ — дифференциал на морфизмах DG-категории $\mathscr{A}$.

Замкнутые морфизмы степени 0 между скрученными комплексами будем называть скрученными морфизмами.

Пусть $\mathscr{A}^{\oplus}$ — DG-категория, получаемая из $\mathscr{A}$ присоединением конечных формальных прямых сумм объектов. (Если в $\mathscr{A}$ уже имеются прямые суммы, то $\mathscr{A}^{\oplus}$ эквивалентна $\mathscr{A}$ как DG-категория.) DG-категорию скрученных комплексов над $\mathscr{A}^{\oplus}$ обозначим $\text{Pre-Tr}(\mathscr{A})$, а ее категорию нулевых когомологий — через $\text{Tr}(\mathscr{A})$.

Если $\mathscr{A}'$ — другая DG-категория, и $f\colon \mathscr{A}\to\mathscr{A}'$ — DG-функктор, то возникает DG-функктор

$$\text{Pre-Te}(F)\colon \text{Pre-Tr}(\mathscr{A})\to\text{Per-Tr}(\mathscr{A}')$$

и функктор

$$\text{Tr}(F)\colon \text{Tr}(\mathscr{A})\to\text{Tr}(\mathscr{A}').$$

Если $\mathscr{A}$ — предаддитивная категория с тривиальной DG-структурой, то $\text{Tr}(\mathscr{A})=\text{Hot}(\mathscr{A}^{\oplus})$.

Определение 2. Пусть $\mathscr{A}$ — DG-категория, $C=\{E_i, q_{ij}\}$, $C'=\{E_i', q_{ij}'\}$ — два объекта $\text{Pre-Tr}(\mathscr{A})$, $f=\{f_{ij}\colon E_i\to E_j'\}$ — скрученный морфизм из C в C'. Его конусом называется объект $\text{Cone} f=\{E_i'', q_{ij}''\}$, имеющий

$$E_i''=E_i\oplus E_{i-1}',\ q_{ij}''=\begin{pmatrix} q_{ij} & f_{ij}\\ 0 & q_{ij}'\end{pmatrix}.$$

Имеются естественные замкнутые морфизмы в $\text{Pre-Tr}(\mathscr{A})$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "f"] & & C' \arrow[dl] \\ & \text{Cone} f \arrow[ul, "+1"] & \end{tikzcd}, \tag{1.1}$$

которые индуцируют морфизмы в $\text{Tr}(\mathscr{A})$.

Будем называть отмеченными треугольниками в $\text{Tr}(\mathscr{A})$ треугольники, изоморфные треугольникам вида (1.1).

Предложение 1. *Категория* $\text{Tr}(\mathscr{A})$ *с указанным набором отмеченных треугольников является триангулированной категорией.*

Прежде чем доказывать это предложение, приведем конструкцию еще одной триангулированной категории, связанной с DG-категорией. Эта конструкция является обобщением схемы: алгебра→гомотопическая категория модулей, на случай DG-структур (см. [6]).

Пусть $\mathscr{A}$ — DG-категория. Мы будем изучать контравариантные DG-функторы из $\mathscr{A}$ в DG-категорию $C(\mathscr{A}b)$ комплексов абелевых групп. Если $\varphi\colon \mathscr{A}\to C(\mathscr{A}b)$ — некий DG-функктор, то через φ^{δ} будем обозначать функтор из $\mathscr{A}$ в градуированные абелевы группы, получаемый из φ забыванием дифференциала, а через $H(\varphi)$ — функктор со значениями там же, получаемый из φ взятием когомологий комплексов. Категорию 0-х когомологий DG-категории $DG\text{-Fun}^0(\mathscr{A}, C(\mathscr{A}b))$ обозначим $\text{Hot}(\mathscr{A})$. Если $\mathscr{A}$ имеет один объект и тривиальную DG-структуру, т. е. отвечает некому кольцу, то $\text{Hot}(\mathscr{A})$ его гомотопическая категория комплексов модулей над этим кольцом.

Пусть $t\colon \varphi\to\psi$ — DG-преобразование контравариантных DG-функкторов $\mathscr{A}\to C(\mathscr{A}b)$. Определим новый DG-функктор, $\text{Cone}(t)\colon \mathscr{A}\to C(\mathscr{A}b)$, сопоставляющий объекту $E\in\text{Ob}\mathscr{A}$ комплекс $\text{Cone}\{t_E\colon \varphi(E)\to\psi(E)\}$.

Имеется треугольник в $DG\text{-Fun}^0(\mathcal{A}, C(\mathcal{A}b))$

$$\begin{tikzcd} \varphi \arrow[rr, "t"] & & \psi \arrow[dl] \\ & \mathrm{Cone}(t), \arrow[ul, "+1"] & \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

который дает также треугольник в $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$.

Назовем отмеченными треугольниками в $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$ треугольники, изоморфные получающимся из треугольников вида (1.2).

Предложение 2. *Категория* $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$ *с указанным набором отмеченных треугольников и покомпонентным функтором сдвига является триангулированной категорией.*

Доказательство. Проверка аксиом Вердье TR1 — TR4 для случая обычной гомотопической категории комплексов, приведенная, например, в [2], дословно переносится на наш случай, который есть по существу, случай комплексов с системой операторов (образующих DG-категорию).

Приведем определение представимого функтора в нашей ситуации. Пусть E — объект DG-категории $\mathcal{A}$. Ему отвечает контравариантный DG-функтор h_E: $\mathcal{A}\to C(\mathcal{A}b)$, который переводит $F\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ в комплекс $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}^{\cdot}(F, E)$. Сопоставление $E\mapsto h_E$ задает ковариантный DG-функтор

$$h\colon \mathcal{A}\to DG\text{-Fun}^0(\mathcal{A}, C(\mathcal{A}b)).$$

Аналогично «классическому» случаю (см. [18]) проверяется, что функтор h является вполне строгим, т. е. имеются изоморфизмы комплексов

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}^{\cdot}(E, E')\simeq \mathrm{Hom}_{DG\text{-Fun}^0(\mathcal{A},C(\mathcal{A}b))}^{\cdot}(h_E, h_{E'}). \tag{1.3}$$

Произвольный контравариантный DG-функтор h: $\mathcal{A}\to C(\mathcal{A}b)$ будем называть представимым, если он изоморфен (как DG-функтор) функтору вида h_E для некоторого $E\in\mathrm{Ob}\mathcal{A}$.

Определение 3. Пусть $\mathcal{A}$ — DG-категория. Определим вложение DG-категорий

$$\alpha\colon \text{Pre-Tr}(\mathcal{A})\to DG\text{-Fun}^0(\mathcal{A}, C(\mathcal{A}b)).$$

Это вложение сопоставляет объекту $K=\{E_i, q_{ij}\}\in\mathrm{Ob}\ \text{Pre-Tr}(\mathcal{A})$ следующий DG-функтор $\alpha(K)$: $\mathcal{A}\to C(\mathcal{A}b)$. Для каждого $E\in\mathrm{Ob}\mathcal{A}$ значение $\alpha(K)(E)$ есть градуированная абелева группа $\oplus\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}^{\cdot}(E, E_i)\ [i]$, снабженная дифференциалом $d+Q$, где $Q=\|q_{ij}\|$, а d — дифференциал в $\oplus\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}^{\cdot}(E, E_i)\ [i]$.

Предложение 3. *Построенный функтор* α *является вложением* $\text{Pre-Tr}(\mathcal{A})$ *в* $DG\text{-Fun}^0(\mathcal{A}, C(\mathcal{A}b))$ *как полной DG-подкатегории. При этом* α *переводит конус замкнутого морфизма* f *в* $\text{Pre-Tr}(\mathcal{A})$ *в конус морфизма* $\alpha(f)$ *в* $DG\text{-Fun}^0(\mathcal{A}, C(\mathcal{A}b))$.

б) *Функтор когомологий* $H(\alpha)$ *задает вложение* $\mathrm{Tr}(\mathcal{A})$ *в* $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$ *как полной триангулированной подкатегории.*

Доказательство состоит в проверке определений. Из пункта а) вытекает предложение 1, что дает возможность сформулировать пункт б).

§ 2. Монада, связанная с функтором Pre-Tr

Функтор Pre-Tr, построенный в предыдущем параграфе, позволяет определить монаду над категорией DG-Cat. Это дает нам возможность определить предтриангулированную категорию как алгебру над этой монадой.

Напомним, что монадой в категории $\mathscr{B}$ (см. [3]) называется функтор $C\colon \mathscr{B}\to\mathscr{B}$ вместе с естественными преобразованиями $\mu\colon C\circ C\to C$ и $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathscr{B}}\to C$ такими, что для каждого $B\in\mathrm{Ob}\,\mathscr{B}$ сквозные морфизмы

$$C(B)\xrightarrow{\eta_{C(B)}} C(C(B))\xrightarrow{\mu_B} C(B)$$

и

$$C(B)\xrightarrow{C(\eta_B)} C(C(B))\xrightarrow{\mu_B} C(B)$$

суть тождественные, и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} C(C(C(B))) & \xrightarrow{\mu_{C(B)}} & C(C(B)) \\ {\scriptstyle C(\mu_B)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu_B} \\ C(C(B)) & \xrightarrow{\mu_B} & C(B) \end{array}$$

коммутативна.

Пусть $\mathscr{B}=DG\text{-Cat}$ — категория DG-категорий и $\mathscr{A}\in\mathrm{Ob}\,\mathscr{B}$ — некоторая DG-категория.

Построим DG-функтор

$$\mathrm{Tot}_{\mathscr{A}}\colon \text{Pre-Tr}(\text{Pre-Tr}(\mathscr{A}))\to\text{Pre-Tr}(\mathscr{A}).$$

Именно, объект Pre-Tr(Pre-Tr($\mathscr{A}$)) можно представлять себе как набор $C=\{(C_{ij})_{i,j\in\mathbf{Z}},\ q_{ij,kl}\colon C_{ij}\to C_{kl}\}$ с надлежащими дифференциальными условиями на $q_{ij,kl}$. Положим

$$\mathrm{Tot}_{\mathscr{A}}(C)=\{(D_k)_{k\in\mathbf{Z}},\ r_{kl}\colon D_k\to D_l\},$$

где

$$D_k=\bigoplus_{i+j=k} C_{ij};\quad r_{kl}=\|q_{ij,mn}\|,\quad i+j=k,\ m+n=l.$$

Будем называть $\mathrm{Tot}_{\mathscr{A}}(C)$ сверткой скрученного комплекса C над Pre-Tr($\mathscr{A}$).

Ясно, что соответствие $\mathscr{A}\mapsto\mathrm{Tot}_{\mathscr{A}}$ продолжается до естественного преобразования функторов

$$\mathrm{Tot}\colon \text{Pre-Tr}\circ\text{Pre-Tr}\to\text{Pre-Tr}$$

на категории DG-Cat.

Обозначим через $\varepsilon_{\mathscr{A}}$ естественное вложение $\mathscr{A}$ в Pre-Tr($\mathscr{A}$) как полной DG-подкатегории: $\varepsilon_{\mathscr{A}}(E)$ есть набор, состоящий из одного E на нулевом месте. Таким образом, ε есть естественное преобразование функторов $\mathrm{id}\to\text{Pre-Tr}$ на категории DG-Cat.

Предложение 1. *Функтор*

$$\text{Pre-Tr}\colon DG\text{-Cat}\to DG\text{-Cat}$$

и естественные преобразования

$$\varepsilon\colon \mathrm{id}\to\text{Pre-Tr},\quad \mathrm{Tot}\colon \text{Pre-Tr}(\text{Pre-Tr})\to\text{Pre-Tr}$$

определяют монаду над категорией DG-Cat.

Доказательство получается непосредственной проверкой.

Предложение 2. *Функтор* $\mathrm{Tot}_{\mathscr{A}}$ *есть эквивалентность DG-категорий, а функтор когомологий*

$$H^0(\mathrm{Tot}_{\mathscr{A}})\colon \mathrm{Tr}(\text{Pre-Tr}(\mathscr{A}))\to\mathrm{Tr}(\mathscr{A})$$

есть эквивалентность триангулированных категорий.

Доказательство. Если C и C' — два объекта $(\text{Pre-Tr})^2(\mathscr{A})$, то комплексы

$$\mathrm{Hom}_{(\text{Pre-Tr})^2(\mathscr{A})}(C, C') \text{ и } \mathrm{Hom}_{\text{Pre-Tr}(\mathscr{A})}(\mathrm{Tot}\, C, \mathrm{Tot}\, C')$$

одинаковы. Иначе говоря, $\mathrm{Tot}_{\mathscr{A}}$ есть эквивалентность DG-категорий. Из предложения 1 вытекает, что он сохраняет свертки скрученных комплексов. Поэтому $H^0(\mathrm{Tot}_{\mathscr{A}})$ — эквивалентность триангулированных категорий.

В дальнейшем нам понадобится еще одно свойство функтора

$$\mathrm{Tot}_{\mathscr{A}}\colon (\text{Pre-Tr})^2(\mathscr{A}) \to \text{Pre-Tr}(\mathscr{A}).$$

Именно, пусть $\mathscr{A}$ — DG-категория, $C = \{E_i, q_{ij}\}$ — скрученный комплекс над $\text{Pre-Tr}(\mathscr{A})$, т. е. объект $(\text{Pre-Tr})^2(\mathscr{A})$, X — объект $\text{Pre-Tr}(\mathscr{A})$. Тогда возникают скрученные комплексы $\mathrm{Hom}(X, C)$ и $\mathrm{Hom}(C, X)$ над DG-категорией $C(\mathscr{A}b)$. Например,

$$\mathrm{Hom}(C, X) = \{\mathrm{Hom}^{\bullet}_{\text{Pre-Tr}(\mathscr{A})}(E_i, X),\ \tilde{q}_{ij}\},$$

где $\tilde{q}_{ij}$ — отображения групп Hom, индуцированные q_{ij}. Как объяснялось выше (пример после определения 1), скрученный комплекс над $C(\mathscr{A}b)$ есть обычный комплекс абелевых групп (свертка) с дополнительной градуировкой в членах. Обозначим через $\mathrm{THom}(X, C)$ и $\mathrm{THom}(C, X)$ свертки скрученных комплексов $\mathrm{Hom}(X, C)$ и $\mathrm{Hom}(C, X)$ над $C(\mathscr{A}b)$. Пусть также $T = \mathrm{Tot}(C) \in \text{Pre-Tr}(\mathscr{A})$.

Предложение 3. *В описанной ситуации имеются естественные изоморфизмы комплексов*

$$\mathrm{THom}(X, C) \simeq \mathrm{Hom}_{\text{Pre-Tr}(\mathscr{A})}(X, T),\quad \mathrm{THom}(C, X) \simeq \mathrm{Hom}_{\text{Pre-Tr}(\mathscr{A})}(T, X). \quad \blacksquare$$

§ 3. Предтриангулированные категории

Определение 1. DG-категория $\mathscr{E}$ называется предтриангулированной, если для всякого скрученного комплекса $K \in \text{Pre-Tr}(\mathscr{E})$ соответствующий контравариантный DG-функтор $\alpha(K)\colon \mathscr{E} \to C(\mathscr{A}b)$ (см. § 1, определение 3) является представимым.

Предложение 1. *Каждая предтриангулированная категория снабжается структурой алгебры* $(\mathscr{E}, T)$ *над монадой (см.* [3]) (Pre-Tr, Tot, ε) *в категории* DG-Cat *такой, что функторы*

$$T\colon \text{Pre-Tr}(\mathscr{E}) \to \mathscr{E},\quad \varepsilon_{\mathscr{E}}\colon \mathscr{E} \to \text{Pre-Tr}(\mathscr{E})$$

являются квазиобратными друг другу эквивалентностями DG-*категорий.*

Доказательство. Для $K \in \text{Pre-Tr}(\mathscr{E})$ пусть $T(K)$ — некоторый представляющий объект для функтора $\alpha(K)$. Из формулы (1.3) вытекает, что соответствие $K \mapsto T(K)$ продолжается до DG-функтора T: Pre-Tr $(\mathscr{E}) \mapsto \mathscr{E}$ такого, что $T \circ \varepsilon_{\mathscr{E}} = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$, T и $\varepsilon_{\mathscr{E}}$ — квазиобратны и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} (\text{Pre-Tr})^2(\mathscr{E}) & \xrightarrow{\mathrm{Tot}} & \text{Pre-Tr}(\mathscr{E}) \\ {\scriptstyle \text{Pre-Tr}(T)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T} \\ \text{Pre-Tr}(\mathscr{E}) & \xrightarrow{T} & \mathscr{E} \end{array} \tag{3.1}$$

коммутативна. $\blacksquare$

Функтор T будем называть сверткой (скрученных комплексов). Его определение зависит от произвола в выборе представляющих объектов. Другой выбор приведет к функтору T', который связан с T каноническим изоморфизмом DG-функторов, поэтому произвол в выборе несущественен. В дальнейшем мы будем предполагать функтор T заданным.

Предтриангулированная категория снабжена функтором сдвига:

$$E[i]=T(\varepsilon(E)[i]).$$

Простейший нетривиальный пример скрученного комплекса над DG-категорией $\mathscr{E}$ получается из замкнутого морфизма f: $E\to F$ степени 0. Точнее, морфизму f отвечает $C_f=\{E_i,\ q_{ij}\}$, где $E_0=E$, $E_1=F$, $E_j=0$, при $j\neq\neq 0,1$, $q_{01}=f$, *остальные* q_{ij} равны 0. Если $\mathscr{E}$ — предтриангулированная категория, то свертку C_f будем называть конусом замкнутого морфизма f и обозначать $\mathrm{Cone}(f)\in\mathrm{Ob}(\mathscr{E})$.

Диаграмме замкнутых морфизмов

$$\varepsilon(E)\xrightarrow{f}\varepsilon(F)\to C_f\to\varepsilon(E)[1]$$

в категории $\text{Pre-Tr}(\mathscr{E})$ отвечает диаграмма замкнутых морфизмов

$$E\xrightarrow{f}F\to\mathrm{Cone}(f)\to E[1]$$

в $\mathscr{E}$ и, следовательно, диаграмма в категории $H^0(\mathscr{E})$. Будем называть отмеченными треугольниками в $H^0(\mathscr{E})$ диаграммы, изоморфные диаграммам такого вида.

Предложение 2. *Пусть $\mathscr{E}$ — предтриангулированная категория. Тогда категория $H^0(\mathscr{E})$ с определенными выше функтором сдвига и семейством отмеченных треугольников является триангулированной. Функтор $H^0(T)$:* $\mathrm{Tr}(\mathscr{E})\to H^0(\mathscr{E})$ *является эквивалентностью триангулированных категорий.*

Доказательство. Проверка аксиом Вердье для гомотопической категории комплексов [2] сводится к построению некоторых стандартных диаграмм замкнутых морфизмов комплексов. Эти конструкции дословно переносятся на случай скрученных комплексов. Поэтому требуемые стандартные диаграммы могут быть построены в категории $\text{Pre-Tr}(\mathscr{E})$. Применяя к ним функтор T, получим стандартные диаграммы в $\mathscr{E}$, существование которых устанавливает справедливость аксиом Вердье в $H^0(\mathscr{E})$. По определению функтор T является эквивалентностью категорий. То обстоятельство, что он является точным, вытекает из коммутативности диаграммы (3.1).

Если задана триангулированная категория $\mathscr{D}$, то оснащением $\mathscr{D}$ будем называть предтриангулированную категорию $\mathscr{E}$ вместе с эквивалентностью $H^0(\mathscr{E})\to\mathscr{D}$ триангулированных категорий. Саму категорию $\mathscr{D}$ будем тогда называть оснащенной.

Примеры. 1. Пусть $\mathscr{A}$ — аддитивная категория. Гомотопическая категория $\mathrm{Hot}(\mathscr{A})$ является оснащенной триангулированной категорией. Соответствующая предтриангулированная категория есть $C(\mathscr{A})$.

2. Более общо, для любой DG-категории $\mathscr{A}$ категория $\text{Pre-Tr}(\mathscr{A})$ является предтриангулированной.

3. Пусть $\mathscr{A}$ — абелева категория с достаточным числом инъективных объектов. Триангулированная категория $D^b(\mathscr{A})$ эквивалентна полной подкатегории в гомотопической категории $\mathrm{Hot}^+(\mathscr{A})$, состоящей из комплексов, все члены которых инъективны и которые имеют только конечное число гомологий. Рассматривая соответствующую полную подкатегорию в $C^+(\mathscr{A})$, получим оснащение категории $D^b(\mathscr{A})$, которое обозначим $\text{Pre-}D^b(\mathscr{A})$.

Аналогичные рассмотрения применимы к случаю достаточного числа проективных объектов.

4. Пусть $\mathscr{A}$ и $\mathscr{E}$ — две DG-категории, причем $\mathscr{E}$ предтриангулирована. Введем на DG-категории $DG\text{-}\mathrm{Fun}(\mathscr{A}, \mathscr{E})$ предтриангулированную структуру, определяя свертку скрученных комплексов DG-функторов пообъектно. В частности, категория DG-модулей над DG-алгеброй A (морфизмы суть морфизмы, сохраняющие градуировку и коммутирующие с умножением на элементы A, но не обязательно с дифференциалами) есть предтриангулированная категория. Соответствующая оснащенная триангулированная категория есть $\mathrm{Hot}(A)$.

Замечание. Конструкции типа примера 4 невозможны в рамках триангулированных категорий.

Определение 2. Пусть $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}'$ — предтриангулированные категории.

а) Мы говорим, что $\mathscr{E}$ есть полная предтриангулированная подкатегория в $\mathscr{E}'$, если $\mathscr{E}$ есть полная DG-подкатегория в $\mathscr{E}'$, а функтор $T_{\mathscr{E}'}$ переводит $\mathrm{Pre\text{-}Tr}(\mathscr{E})$ в $\mathscr{E}$ и совпадает с $T_{\mathscr{E}}$ (напомним, что функтор $T_{\mathscr{E}}$ здесь предполагается фиксированным).

б) Предточным (ковариантным) функтором из $\mathscr{E}$ в $\mathscr{E}'$ называется морфизм соответствующих алгебр над монадой ($\mathrm{Pre\text{-}Tr}$, Tot, ε), т. е. DG-функтор $f\colon \mathscr{E}\to\mathscr{E}'$, коммутирующий с операцией взятия свертки скрученных комплексов. Аналогично для контравариантных функторов.

Ясно, что для предточного функтора f функтор

$$H^0(f)\colon H^0(\mathscr{E})\to H^0(\mathscr{E}')$$

есть точный функтор. Обозначим через $\mathrm{Prex}(\mathscr{E}, \mathscr{E}')$ полную DG-подкатегорию в $DG\text{-}\mathrm{Fun}(\mathscr{E}, \mathscr{E}')$, объекты которой суть предточные функторы. Пусть $\mathrm{Prex}^0(\mathscr{E}, \mathscr{E}')$ — аналогичная категория, в которой фигурируют контравариантные функторы.

Предложение 3. *Пусть $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}'$ — две предтриангулированные категории. Тогда $\mathrm{Prex}(\mathscr{E}, \mathscr{E}')$ есть полная предтриангулированная подкатегория в $DG\text{-}\mathrm{Fun}(\mathscr{E}, \mathscr{E}')$.* $\square$

Предложение 4. *Пусть $\mathscr{E}$ — предтриангулированная категория.*

а) *Для всякого $E\in\mathrm{Ob}\mathscr{E}$ DG-функторы*

$$h_E\colon F\mapsto \mathrm{Hom}^{\cdot}_{\mathscr{E}}(F, E),\ k^E\colon F\mapsto \mathrm{Hom}^{\cdot}_{\mathscr{E}}(E, F)$$

из $\mathscr{E}$ в $C(\mathscr{A}b)$ являются предточными (и, соответственно, контравариантными и ковариантными).

б) *Сопоставления $E\mapsto h_E$, $E\mapsto k^E$ продолжаются до предточных функторов*

$$h\colon \mathscr{E}\to\mathrm{Prex}^0(\mathscr{E}, C(\mathscr{A}b)),\ k\colon \mathscr{E}\to\mathrm{Prex}(\mathscr{E}, C(\mathscr{A}b)),$$

соответственно, ковариантных и контравариантных.

Доказательство. а) Если рассмотреть E как объект $\mathrm{Pre\text{-}Tr}(\mathscr{E})$, то DG-функторы h_E *и* k^E из $\mathrm{Pre\text{-}Tr}(\mathscr{E})$ в $C(\mathscr{A}b)$ будут предточными в силу предложения 3 § 2. Так как функтор свертки T есть эквивалентность DG-категорий, то h_E и k^E будут предточными функторами на $\mathscr{E}$.

б) Доказательство предоставляется читателю.

Замечание. Практически все известные точные функторы между триангулированными категориями, встречающиеся в гомологической алгебре, происходят из предточных функторов между соответствующими оснащениями. В частности, «шесть функториальностей» Гротендика на пучках модулей над окольцованными пространствами (функторы Rf_*,

Lf^*, $Rf_!$, $f^!$, $\overset{L}{\otimes}$, RHom) происходят из подходящих предточных функторов. Эти предточные функторы получаются применением соответствующих операций к резольвентам. (В случае бесконечной гомологической размерности пространства или пучка колец возможность использования резольвент обоснована в [8].)

Пусть $\{E_i | i \in I\}$ — семейство объектов предтриангулированной категории $\mathscr{E}$. Наименьшую строго полную предтриангулированную подкатегорию в $\mathscr{E}$, содержащую все E_i, будем называть их предтриангулированной оболочкой и обозначать $P_{\mathscr{E}}(\{E_i | i \in I\})$.

Таким образом, $P_{\mathscr{E}}(\{E_i\})$ состоит из сверток в $\mathscr{E}$ всевозможных скрученных комплексов, состоящих из прямых сумм E_i. Пусть $\mathscr{A}$ — полная DG-подкатегория в $\mathscr{E}$ на объектах E_i.

Предложение 5. *Сквозной функтор*

$$\text{Pre-Tr}(\mathscr{A}) \to \text{Pre-Tr}(\mathscr{E}) \xrightarrow{T} \mathscr{E}$$

осуществляет эквивалентность Pre-Tr$(\mathscr{A})$ *и* $P_{\mathscr{E}}(\{E_i | i \in I\})$ *как предтриангулированных категорий.*

Доказательство. Так как T является эквивалентностью DG-категорий, сквозной функтор осуществляет эквивалентность Pre-Tr$(\mathscr{A})$ со *своим образом.* □

Доказанное предложение позволяет отождествить предтриангулированные категории с категориями некоторых DG-модулей над подходящими DG-алгебрами. Действительно, выбирая достаточно много объектов в категории $\mathscr{E}$, мы представим ее в виде Pre-Tr $(\mathscr{A})$, которая согласно предложению 3 § 1 вложена как полная DG-подкатегория в гомотопическую категорию DG-функторов $\mathscr{A} \to C(\mathscr{A}b)$ (т. е. фактически, DG-модулей над DG-алгеброй $\bigoplus_{E,F \in \mathrm{Ob}\mathscr{A}} \mathrm{Hom}^{\cdot}_{\mathscr{A}}(E, F)$).

§ 4. Односторонние скрученные комплексы

В этом параграфе мы рассматриваем следующую задачу. Дан набор объектов $E_1, \ldots, E_n$ триангулированной категории $\mathscr{D}$. Обозначим через $\langle E_1, \ldots, E_n \rangle_{\mathscr{D}}$ триангулированную подкатегорию в $\mathscr{D}$, порожденную E_i, т. е. наименьшую строго полную триангулированную подкатегорию в $\mathscr{D}$, содержащую E_i. Мы хотим описать категорию $\langle E_1, \ldots, E_n \rangle_{\mathscr{D}}$. Без наличия оснащения в $\mathscr{D}$ такая задача кажется очень трудной. Так, например, если $(E_1, \ldots, E_n)$ — сильный исключительный набор в C-линейной триангулированной категории $\mathscr{D}$ (т. е. $\mathrm{Ext}^p_{\mathscr{D}}(E_i, E_j) = 0$ при $p \neq 0$ или $i > j$, а $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(E_i, E_i) = \mathbf{C}$, см. [9]), то не видно никакого способа отождествить $\langle E_1, \ldots, E_n \rangle_{\mathscr{D}}$ с производной категорией модулей над алгеброй

$$A = \bigoplus \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(E_i, E_j).$$

Мы будем предполагать поэтому, что $\mathscr{D}$ оснащена: $\mathscr{D} \sim H^0(\mathscr{E})$ для некоторой предтриангулированной категории $\mathscr{E}$. В конце предыдущего параграфа была описана предтриангулированная оболочка $P(E_1, \ldots, E_n)$ объектов E_i, а именно

$$P(E_1, \ldots, E_n) \sim \text{Pre-Tr}(\mathscr{A}),$$

где $\mathscr{A} \subset \mathscr{E}$ — полная DG-подкатегория на объектах E_i. Категория когомологий $H^0P(\mathscr{E}_1, \ldots, \mathscr{E}_n)$ является триангулированной, но, возможно, не порождается объектами E_i как триангулированная категория. Например, свертку скрученного комплекса

$$E_0 \xleftarrow{q_{00}} E_0 \underset{q_{10}}{\overset{q_{01}}{\rightleftarrows}} E_1 \xrightarrow{q_{11}} E_1$$

нельзя получить, вообще говоря, с помощью операции взятия конуса замкнутых морфизмов из объектов E_0 и E_1. Чтобы преодолеть эту трудность, мы вводим следующее определение.

Определение 1. Скрученный комплекс $C=\{E_i, q_{ij}\}$ над DG-категорией $\mathscr{A}$ называется односторонним, если $q_{ij}=0$ при $i \geqslant j$.

Пример. Если $\mathscr{A}=C(\mathscr{B})$ — категория комплексов над аддитивной категорией $\mathscr{B}$, то односторонний скрученный комплекс над $\mathscr{A}$ — в точности скрученный комплекс над $\mathscr{B}$ в смысле О'Брайена, Толедо, Тонга [7].

Односторонние скрученные комплексы позволяют определить на категории DG-Cat еще одну монаду.

Пусть $\mathscr{A}$ — DG-категория. Обозначим через $\widetilde{\mathscr{A}}$ DG-категорию, получаемую из $\mathscr{A}$ присоединением формальных сдвигов объектов. Ее объектами являются символы $E[i]$, где $E \in \mathrm{Ob}\mathscr{A}$, $i \in \mathbf{Z}$. Если $E, F \in \mathrm{Ob}\mathscr{A}$, то

$$\mathrm{Hom}^{\cdot}_{\widetilde{\mathscr{A}}}(E[i], F[j]) = \mathrm{Hom}^{\cdot}_{\mathscr{A}}(E, F)[j-i].$$

Обозначим через Pre-Tr$^+(\mathscr{A})$ полную DG-подкатегорию в Pre-Tr $(\widetilde{\mathscr{A}})$, объектами которой являются односторонние скрученные комплексы. Если $C=\{E_i, q_{ij}\}$ — скрученный комплекс над $\widetilde{\mathscr{A}}$ и $n=\{n_i, i \in \mathbf{Z}\}$ — набор целых чисел, то определим новый скрученный комплекс $C\{n\}=\{E_i', q_{ij}'\}$, где

$$E_i' = \bigoplus_{j+n_j=i} E_j[n_j], \quad q_{ij}' = \|\tilde{q}_{kl}\| \ (k+n_k=i, \ l+n_l=j),$$

$\tilde{q}_{kl}$ — образ $q_{kl} \in \mathrm{Hom}^{k-l+1}(E_k, E_l)$ при отождествлении последней группы с

$$\mathrm{Hom}^{i-j+1}(E_k[n_k], E_l[n_l]).$$

Скрученный комплекс $C\{n\}$ будем называть ассоциированным с C при помощи n. Переход к ассоциированным комплексам задает на Pre-Tr$(\widetilde{\mathscr{A}})$ действие свободной абелевой группы $\mathbf{Z}^\infty$ посредством автоэквивалентностей предтриангулированной категории. Более того, $C\{n\}$ канонически изоморфен C. Допуская вольность речи, мы будем отождествлять C с ассоциированными комплексами $C\{n\}$.

Кроме того, на скрученных комплексах над $\widetilde{\mathscr{A}}$ определены два коммутирующих функтора сдвига, совокупное действие которых будет обозначаться $C \mapsto C[m, n]$. Если $C=\{E_i, q_{ij}\}$, то

$$C[m, n] = \{(E_{i-m}[n])_{i \in \mathbf{Z}}, \ q_{i-m, j-m}\}.$$

Пусть теперь $U=\{V_i, r_{ij}\}$ — скрученный комплекс над Pre-Tr$(\widetilde{\mathscr{A}})$ и $n=\{n_i, i \in \mathbf{Z}\}$ — набор целых чисел, как выше. Определим ассоциированный комплекс $U\{\{n\}\}$, i-й член которого есть $V_i[-n_i, n_i]$ а отображения суть образы r_{ij} при отождествлении

$$\mathrm{Hom}^{i-j+1}_{\mathrm{Pre\text{-}Tr}(\widetilde{\mathscr{A}})}(V_i, V_j) \simeq \mathrm{Hom}^{i-j+1}_{\mathrm{Pre\text{-}Tr}(\widetilde{\mathscr{A}})}(V_i[-n_i, n_i], V_j[-n_j, n_j]).$$

Функтор свертки

$$\mathrm{Tot}\colon (\mathrm{Pre\text{-}Tr})^2(\widetilde{A}) \to \mathrm{Pre\text{-}Tr}(\widetilde{A})$$

переводит ассоциированные комплексы в ассоциированные:

$$\mathrm{Tot}(U\{\{n\}\})=(\mathrm{Tot}\,U)\{\{n\}\}.$$

Лемма 1. *Пусть* $U=\{V_i, r_{ij}\}$ *— односторонний скрученный комплекс над* $\text{Pre-Tr}^+(\mathscr{A})\subset\text{Pre-Tr}(\widetilde{\mathscr{A}})$. *Если числа* n_i, $i\in\mathbf{Z}$, *достаточно быстро возрастают, то* $\mathrm{Tot}(U\{\{n\}\})$ *является односторонним скрученным комплексом.*

Доказательство. Достаточно выбрать n_i так, чтобы n_i-n_{i-1} было больше, чем M_i-m_{i-1}, где m_i, M_i — минимальный и максимальный номера ненулевых членов скрученных комплексов V_i. □

Определение 2. Определим функтор

$$\mathrm{Tot}^+_{\mathscr{A}}\colon (\text{Pre-Tr}^+)^2(\mathscr{A})\to\text{Pre-Tr}^+(\mathscr{A}),$$

полагая для одностороннего скрученного комплекса U над $\text{Pre-Tr}^+(\mathscr{A})$

$$\mathrm{Tot}^+_{\mathscr{A}}(U)=\mathrm{Tot}_{\mathscr{A}}(U\{\{n\}\})$$

для достаточно быстро возрастающей последовательности целых чисел $n=(n_i)$.

Различные выборы последовательности n приводят к канонически изоморфным ответам.

Обозначим также через $\varepsilon_{\mathscr{A}}{}^+$ каноническое вложение

$$A\hookrightarrow\text{Pre-Tr}^+(\mathscr{A}).$$

Предложение 1. *Естественные преобразования функторов*

$$\mathrm{Tot}^+\colon(\text{Pre-Tr}^+)^2\to\text{Pre-Tr}^+,\quad \varepsilon^+\colon \mathrm{id}\to\text{Pre-Tr}^+$$

на категории DG-Cat *задают монаду.* □

Обозначим через $\mathrm{Tr}^+(\mathscr{A})$ категорию нулевых когомологий DG-категории $\text{Pre-Tr}^+(\mathscr{A})$.

Предложение 2. *Категория* $\mathrm{Tr}^+(\mathscr{A})$ *является полной триангулированной подкатегорией в* $\mathrm{Tr}(\widetilde{\mathscr{A}})$. *Она порождена объектами* $\mathscr{A}$ *как триангулированная категория.*

Доказательство. Конус замкнутого морфизма в $\text{Pre-Tr}^+(\mathscr{A})$ получается сверткой (т. е. операцией Tot^+) от соответствующего одностороннего комплекса. Это доказывает, что $\mathrm{Tr}^+(\mathscr{A})$ триангулированна. Покажем, что она порождена $\mathrm{Ob}\,\mathscr{A}$. Пусть $\{E_i, q_{ij}, i<j\}$ — односторонний скрученный комплекс над $\widetilde{\mathscr{A}}$ и только объекты $E_1,\ldots,E_n$ отличны от нуля. Тогда

$$q_{n-1,n}\colon E_{n-1}\to E_n$$

— замкнутый морфизм; морфизмы $q_{n-2,n-1}$ и $q_{n-2,n}$ задают морфизм из E_{n-2} в конус $q_{n-1,n}$ (в категории $\text{Pre-Tr}^+(\mathscr{A})$) и т. д. Продолжая таким образом, представим C как итерированный конус (в $\text{Pre-Tr}^+(\mathscr{A})$) замкнутых морфизмов, начиная с объектов E_i. Переходя к гомологиям, получаем, что $\mathrm{Tr}^+(\mathscr{A})$ порождена $\mathrm{Ob}\,\mathscr{A}$.

Теорема 1. *Пусть* $\mathscr{E}$ *— предтриангулированная категория,* $E_1,\ldots$ $\ldots, E_n$ *— объекты* $\mathscr{E}$, $\mathscr{A}\subset\mathscr{E}$ *— полная* DG*-подкатегория на объектах* E_i. *Тогда* $\langle E_1,\ldots,E_n\rangle_{H^0\mathscr{E}}$ *эквивалентна* $\mathrm{Tr}^+(\mathscr{A})$ *как триангулированная категория.*

Доказательство. Рассмотрим функтор

$$\Phi\colon\text{Pre-Tr}^+(\mathscr{A})\to\mathscr{E},$$

переводящий скрученный комплекс над $\widetilde{\mathscr{A}}$ в его свертку в $\mathscr{E}$ (при этом формальные сдвиги объектов из $\mathcal{A}$ заменяются на их настоящие сдвиги в $\mathcal{E}$). Функтор Φ задает изоморфизмы на комплексах Hom. Следовательно, $H^0(\Phi)$ есть эквивалентность категории $\mathrm{Tr}^+(\mathcal{A})$ с ее существенным образом. Так как $\mathrm{Tr}^+(\mathcal{A})$ порождена $\mathcal{A}$ как триангулированная категория, существенный образ $\mathrm{Tr}^+(\mathcal{A})$ при Φ совпадает с $\langle E_1, \ldots, E_n\rangle$.

Из доказанной теоремы вытекает, что всякая оснащенная триангулированная категория может быть представлена как полная триангулированная подкатегория в гомотопической категории DG-модулей над подходящей DG-алгеброй. Утверждения такого рода (для случая алгебр с тривиальной DG-структурой) рассматривались в работах [9], [10].

Замечание. Можно было бы взять за основу монаду $(\text{Pre-Tr}^+, \text{Tot}^+, \varepsilon^+)$ и определять «+-предтриангулированные» категории как алгебры над этой монадой. С точки зрения понятия триангулированной категории это выглядело бы даже естественнее, ввиду теоремы 1. Однако все реально возникающие триангулированные категории допускают более богатую структуру: свертку произвольных, а не только односторонних скрученных комплексов. Поэтому мы аксиоматизируем именно эту структуру.

§ 5. Заключительные замечания

А. Композиции Масси. Если

$$C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} \ldots \xrightarrow{d^n} C^{n+1}$$

— цепочка компонируемых замкнутых морфизмов в DG-категории $\mathcal{A}$ и $\delta_i = \deg(d_i)$, то определено множество

$$\langle\!\langle d^n, \ldots, d^0\rangle\!\rangle \subset \mathrm{Hom}_{H^{\cdot}(\mathcal{A})}^{\delta_0+\cdots+\delta_n+1-n}(C^0, C^{n+1}),$$

называемое множеством значений многозначной композиции Масси морфизмов d^i (см., например, [11]). Известно, что это множество не пусто тогда и только тогда, когда множества значений всех частичных операций Масси

$$\langle\!\langle d^j, \ldots, d^i\rangle\!\rangle, \ |i-j| < n,$$

содержат 0; в частности, произведения соседних морфизмов являются кограницами, т. е. (C^i, d^i) задают комплекс над $H^{\cdot}(\mathcal{A})$.

С другой стороны, определение скобок Тоды в топологии [12], [13] легко переносится на случай произвольных триангулированных категорий, давая для цепочки компонируемых морфизмов

$$C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \to \ldots \xrightarrow{d^n} C^{n+1}$$

(скажем, степени 0) триангулированной категории $\mathcal{D}$ множество

$$\langle d^n, \ldots, d^0\rangle \subset \mathrm{Ext}_{\mathcal{D}}^{1-n}(C^0, C^{n+1}).$$

Можно проверить, что для оснащенной триангулированной категории композиции Масси совпадают со скобками Тоды. В работе [16] это доказано для гомотопической категории комплексов.

Б. K-теория. Вопрос об определении высших K-функторов Квиллена [14] абелевой категории $\mathcal{A}$ по триангулированной категории $D^b(\mathcal{A})$ является открытым. Некоторым продвижением является работа В. А. Хинича и В. В. Шехтмана [15], в которой $K_i\mathcal{A}$ определены в терминах категории $C^b(\mathcal{A})$ конечных комплексов над $\mathcal{A}$ и их квазиизоморфизмов.

Методом Хинича — Шехтмана можно определить для любой предтриангулированной категории $\mathcal{E}$ псевдосимплициальную категорию $U.(\mathcal{E})$, реализация которой может быть названа пространством алгебраической K-теории $\mathcal{E}$ (а ее гомотопические группы — K-функторами $\mathcal{E}$). Применение этой конструкции к естественному оснащению $D^b(\mathcal{A})$, построенному при помощи инъективных резольвент, дает K-функтор Квиллена для $\mathcal{A}$.

В. Перестройки исключительных наборов.

Определение 1. а) Исключительным объектом в $\mathbf{C}$-линейной предтриангулированной категории $\mathcal{E}$ называется объект E, для которого

$$H^0(\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E, E)) = \mathbf{C}$$

и

$$H^i(\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E, E)) = 0 \text{ при } i \neq 0.$$

б) Исключительным набором называется упорядоченный набор исключительных объектов $(E_0, \ldots, E_n)$, удовлетворяющий условиям:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E_i, E_j) \text{ — ациклический комплекс при } i > j.$$

Определение исключительного набора в триангулированной категории см. в [9].

Исключительный набор из двух объектов называется исключительной парой. Для исключительной пары (E, F) определяются правые и левые перестройки. Это пары (LF, E) и (F, RE), где LF и RE определяются как свертки комплексов:

$$LF = T(\underbrace{\mathrm{Hom}(E, F) \otimes E}_{0} \xrightarrow{l} \underset{1}{F}),$$

$$RE = T(\underset{-1}{E} \xrightarrow{r} \underbrace{\mathrm{Hom}(E, F)^* \otimes E}_{0}).$$

Объясним обозначения. T — функтор свертки; индексы под объектами фиксируют градуировку комплекса объектов из $\mathcal{E}$; если V — $\mathbf{C}$-векторное пространство, то $V \otimes E$ — прямая сумма $\dim V$ экземпляров объекта E; $\mathrm{Hom}(E, F) \otimes E$ — это комплекс объектов категории $\mathcal{E}$, так как $\mathrm{Hom}(E, F)$ — комплекс $\mathbf{C}$-векторных пространств. В комплексе $\mathrm{Hom}(E, F)^*$ при сопряжении градуировка меняет знак; l и r — канонические морфизмы.

Перестройка исключительного набора — это (правая или левая) перестройка какой-либо пары соседних элементов набора. Результат перестройки будет исключительным набором.

Предположим, что предтриангулированная категория $\mathcal{E}$ порождена исключительным набором $\sigma = (E_0, \ldots, E_n)$. Тогда категория $H^0(\mathcal{E})$ будет порождена этим набором как триангулированная категория. По теореме 1 § 4 $H^0(\mathcal{E})$ определяется DG-категорией $\mathcal{A}_\sigma$ — полной подкатегорией в $\mathcal{E}$ на объектах E_i набора σ. Перестроенный набор также будет порождать категорию $H^0(\mathcal{E})$ (см. [9]). Поэтому было бы естественно проследить за тем, как меняется категория $\mathcal{A}_\sigma$ при перестройках набора. Для этого нужно определить Hom-комплексы между элементами перестроенного набора $\tilde{\sigma}$, что легко сделать явно, пользуясь формулами для перестроек и предточностью представимых функторов (предложение 3 § 3). Переходя к гомологиям DG-категории $\mathcal{A}_\sigma$ получим Ext-группы между элементами набора $\tilde{\sigma}$. Вычислить же их, исходя из Ext-групп исходного набора, вообще говоря невозможно.

Если рассматривать алгебры $\mathscr{A}_\sigma$ как DG-алгебры с точностью до квазиизоморфизма, то перестройки этой алгебры образуют действие группы кос Артина. Это следует из соответствующего результата для триангулированных категорий [17], [9].

Список литературы

1. *Verdier J.-L.* Catêgories dérivées//Lect. Notes in Math. 1977. № 569. P. 262—311.
2. *Hartshorne R.* Residues and duality. Lect. Notes in Math. 1966. № 20.
3. *Мэй Дж.* Геометрия интегрированных пространств петель//Бордман Дж., Фогт Р. Гомотопически инвариантные алгебраические структуры на топологических пространствах. М.: Мир, 1977.
4. *Курош А. Г.* Лекции по общей алгебре. М.: Наука, 1973.
5. *Маклейн С.* Гомология. М.: Мир, 1966.
6. *Kapranov M. M.* On the derived categories of coherent sheaves on some homogeneous spaces//Invent Math. 1988. V. 92. P. 479—508.
7. *O'Brien N., Toledo D., Tong Y. I.* Trace and characterictic classes of coherent sheaves//Amer. J. Math. V. 103. P. 225—252.
8. *Spaltenstein N.* Resolutions of unbounded complexes//Composito Math. 1988. V. 65. P. 121—154.
9. *Бондал А. И.* Представления ассоциативных алгебр и когерентные пучки//Изв. АН СССР. 1989. Т. 53. № 1. С. 25—44.
10. *Baer D.* Tilting sheaves in representation theory of algebras//Manuscripta Math. 1988. V. 60. № 3. P. 323—347.
11. *Kraines D. A.* Higher Massey products//Trans. AMS. 1966. V. 124. № 3. P. 431—439.
12. *Уайтхад Дж. К. Г.* Новейшие достижения в теории гомотопий. М.: Мир, 1971.
13. *Cohen J. M.* The decomposition of stable homotopy//Ann. Math. 1968. V. 87. P. 305—320.
14. *Quillen D. G.* Higher algebraic K-theory//Lect. Notes in Math. 1973. № 341. P. 85—147.
15. *Hinich V. A., Schechtman V. V.* The geometry of a category of complexes and algebraic K-theory//Duke Math. J. 1985. V. 52. № 2. P. 399—430.
16. *Капранов М. М.* Производные категории когерентных пучков на однородных пространствах: Дис. ... канд. физ.-матем. наук. М., МИАН, 1988.
17. *Бондал А. И., Капранов М. М.* Представимые функторы, функторы Серра и перестройки//Изв. АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 53. № 6. С. 1183—1205.
18. *Гельфанд С. И., Манин Ю. И.* Введение в гомологическую алгебру. М.: Наука, 1989.

Математический институт им. В. А. Стеклова АН СССР
Москва

Поступила в редакцию
21.02.1989