Замеч. фиксируем k — поле (или какое-то кольцо); все кат. будут k-линейны

Причины изучать:

1) Естест. обобщ.: $\begin{matrix} k\text{-алг.} & \subset & DG\text{-алгебры} \\ \cap & & \cap \\ k\text{-лин. категории} & \subset & DG\text{-категории} \end{matrix}$

2) Хороший инструмент гомол. алгебры

Опр. DG-алгебра — это алгебра в тензорной категории комплексов.

Тензорная категория (= моноидальная кат.)

$(\mathcal{T}, I, \otimes, \alpha, \lambda, \rho)$

$\alpha_{A,B,C}: ((A\otimes B)\otimes C) \xrightarrow{\sim} (A\otimes(B\otimes C))$

$\lambda_A: I\otimes A \xrightarrow{\sim} A$

$\rho_A: A\otimes I \xrightarrow{\sim} A$

+ диагр. 5-ка

+ диагр. 3-ка

Прим. 1) k-mod, R-mod
2) k-grmod
3) k-dgmod (супер-Лейбниц ~ свёртка бикомплекса)

Опр. Алгебра в тензорной категории $\mathcal{T}$ — это такая тройка (A, μ, ε), где

- $A \in \mathcal{T}$
- $\mu: A\otimes A \to A$
- $\varepsilon: I \to A$

+ ассоциативность
+ аксиома единицы

$k\text{-mod} \hookrightarrow k\text{-grmod} \hookrightarrow k\text{-dgmod}$

Прим. 1) A — алг. $\rightsquigarrow$ dg-алг.

2) X — гл. мн-зие, $\Omega^\bullet X$ — дифф. формы — dg-алгебра

3) X — т.пр., $C^\bullet(X)$ — синг. коцепи

4) A — комм. кольцо
$s_1, \ldots, s_n \in A$
Комплекс Кошуля: $\bigotimes_{i=1}^{n} \left(\overset{-1}{A} \xrightarrow{s_i} \overset{0}{A} \right)$

A — k-алгебра $\rightsquigarrow$ это $= A \otimes_k (\Lambda^\bullet k^n)$

$da = 0$
$de_i = s_i$
$(k^n = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle)$

Есть естеств. пример неогранич. в обе стороны dg-алгебры

DG-категория

└ обогащённая над k-dgmod.

($\forall x \in Ob\,\mathcal{A}: 1_x \in Hom^0_{\mathcal{A}}(x,x)$ и $d(1_x)=0$) в частности

Категории, обогащённые над чем-то, в общем случае не явл-ся категориями в обычном смысле.

<u>Прим.</u> 1) k-лин. кат. $\rightsquigarrow$ DG-категория

2) A-DG-алгебра $\rightsquigarrow$ $\underline{A}$ – такая DG-кат.

$Ob(\underline{A}) = \{*\}$

$Hom_{\underline{A}}(*,*) = A$

Верно и обратное: всякая DG-кат. с одним объектом "явл-ся" DG-алгеброй.

3) $\mathcal{A}$ – категория комплексов

$Hom_{\mathcal{A}}(V^\bullet, W^\bullet)^p = \prod_{i\in\mathbb{Z}} Hom(V^i, W^{i+p}) \ni (f^i_i)$

$d(f^i) = d_W \circ (f^i) - (-1)^p (f^{i+1}) \circ d_V$

$d(f^i)=0$ при $p=0$? $d(f^i) = df - fd$, т.е. набор (f^i) комм-ет с дифф-лом

$f = dg$ для $\deg g = -1$?

$Z^0\mathcal{A}$ = тенз. кат. комплексов

Конструкция:

DG-кат. $\mathcal{A}$ $\rightsquigarrow$ k-лин. кат. $Z^0\mathcal{A}$

$Ob(Z^0\mathcal{A}) = Ob(\mathcal{A})$

$Hom_{Z^0\mathcal{A}}(X,Y) = \ker d^{-1}$

d^{-1} в $Hom_{\mathcal{A}}(X,Y)^{-1}$

V <u>Упр.</u> Произведение двух замкн. морфизмов степени 0 есть замкн. морфизм.

4) A – DG-алгебра

$e_1,\dots,e_n \in A^0$

$de_i = 0$, $\sum e_i = 1_A$

$e_i e_j = \begin{cases} e_i, & i=j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

По этим данным построим DG-кат. $\mathcal{A}$ с n объектами $x_1,\dots,x_n$

$Hom_{\mathcal{A}}(x_i, x_j) = e_j A e_i$

$Hom_{\mathcal{A}}(x_j,x_k) \otimes Hom_{\mathcal{A}}(x_i,x_j) \to$

$\to Hom_{\mathcal{A}}(x_i,x_k)$

$(e_k A e_j) \otimes (e_j A e_i) \subset e_k A \otimes A e_i \to e_k A e_i$

Обратная процедура:

$\mathcal{A}$ — DG-категория с n объектами $x_1, \dots, x_n$

$\rightsquigarrow$ DG-алгебра $A := \bigoplus_{i,j=1}^{n} \mathrm{Hom}(x_i, x_j)$,

$1_{x_i} = e_i$

$\{e_i\}$ — замк. попарно ортог. идемпотенты

Можно сделать что-то похожее с кат. с беск. множеством объектов; единицы в полученном образовании не будет. (будут локальные единицы)

$\Rightarrow$ DG-кат. — это почти DG-алг.

Операции над DG-категориями

Опр. Противоположная DG-категория

$\mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{A}^{\circ} = \mathcal{A}^{op}$

$\mathrm{Ob}(\mathcal{A}^{\circ}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^{\circ}}(x,y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(y,x)$

$$\mathrm{Hom}^{p}_{\mathcal{A}^{\circ}}(y,z) \otimes \mathrm{Hom}^{q}_{\mathcal{A}^{\circ}}(x,y) = \star$$
$$\downarrow$$
$$\mathrm{Hom}^{p+q}_{\mathcal{A}^{\circ}}(x,z)$$

$$\begin{tikzcd}
\star = \mathrm{Hom}^{p}_{\mathcal{A}}(z,y) \otimes \mathrm{Hom}^{q}_{\mathcal{A}}(x,y) \arrow[d] \arrow[dr, "\tau \cdot (-1)^{pq}"] \arrow[d, bend left] & \\
\mathrm{Hom}^{p+q}_{\mathcal{A}^{\circ}}(x,z) \arrow[r, equal] & \mathrm{Hom}^{q}_{\mathcal{A}}(x,y) \otimes \mathrm{Hom}^{p}_{\mathcal{A}}(z,y) \arrow[d] \\
& \mathrm{Hom}^{p+q}_{\mathcal{A}}(z,x)
\end{tikzcd}$$

правило знаков Кошуля

Опр. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — DG-категории

пока не принцип., малые категории $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ или нет; однако для рассм. DG-бимод. над DG-катег-ми лучше брать малые.

$\rightsquigarrow$ декартово произведение $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$

$\mathrm{Ob}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) := \mathrm{Ob}(\mathcal{A}) \times \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}((a,b),(a',b')) :=$

$:= \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a,a') \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(b,b')$

Проверить, что это действительно задает DG-кат. $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$

DG-функторы

$\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — DG-кат.

Опр. $F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ DG-ф-р

1) $\mathrm{Ob}\,\mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$

2) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x,y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Fx, Fy)$ м-м комплексов

3) • $F(1_x) = 1_{Fx}$

• $$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(y,z)\otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x,y) \arrow[r, "\mu_{\mathcal{A}}"] \arrow[d, "F\otimes F"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x,z) \arrow[d, "F"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Fy,Fz)\otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Fx,Fy) \arrow[r, "\mu_{\mathcal{B}}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(Fx,Fz) \end{tikzcd}$$

$DGFun(\mathcal{A},\mathcal{B})$ явл-ся DG-кат., если $\mathcal{A}$ — малая категория

катег. всех DG-функторов

$F, G : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$

$\mathrm{Hom}(F,G) = ?$

$$\cancel{\mathrm{Hom}(F,G)} = \prod_{x\in\mathcal{A}} \mathrm{Hom}^p_{\mathcal{B}}(Fx,Gx)$$

$\downarrow \Phi$ $\quad$ Φ должен комм. с дифф-лом

$$\prod_{x,y\in\mathcal{A}} \mathrm{Hom}^p(\mathrm{Hom}^{\bullet}_{\mathcal{A}}(x,y), \mathrm{Hom}^{\bullet}_{\mathcal{B}}(Fx,Gy))$$

$$\begin{tikzcd} Fx \arrow[r, "\alpha_x"] \arrow[d, "Ff"'] & Gx \arrow[d, "Gf"] \\ Fy \arrow[r, "\alpha_y"] & Gy \end{tikzcd} \qquad \Phi(\alpha_x) = \left(\varphi^i_{x,y} : \begin{matrix} \mathrm{Hom}^i_{\mathcal{A}}(x,y) \\ \downarrow \\ \mathrm{Hom}^{i+p}_{\mathcal{B}}(Fx,Gy) \end{matrix}\right)$$

$f \mapsto \alpha_y \circ Ff - Gf \circ \alpha_x$ $\quad$?V

$\alpha_x \in \mathrm{Hom}^p(Fx,Gx)$

$\mathrm{Hom}^p(F,G) = \mathrm{Ker}\,\Phi$

$$(\alpha_x) \in \prod_{x\in\mathcal{A}} \mathrm{Hom}^p_{\mathcal{B}}(Fx,Gx)$$

$$(\beta_x) \in \prod_{x\in\mathcal{A}} \mathrm{Hom}^q_{\mathcal{B}}(Gx,Hx)$$

$$((\beta\circ\alpha)_x = \beta_x\circ\alpha_x) \in \prod_{x\in\mathcal{A}} \mathrm{Hom}^{p+q}(Fx,Hx)$$

↑ композиция морфизмов функторов

Прим. 1) $\mathcal{A} = \underline{k}$ $\quad *$, $\mathrm{Hom}(*,*) = k$

$DGFun(\underline{k}, \mathcal{B})$

$\Phi_x : \underline{k} \to \mathcal{B}$

$\quad * \mapsto F* =: x$

$\Phi_x : \mathrm{Hom}_{\underline{k}}(*,*) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(x,x)$

$\qquad \| $

$\qquad k \ni 1_* \mapsto 1_x$

порождается единицей (всё k-линейно)

$\rightsquigarrow \mathrm{Ob}\, DGFun(\underline{k},\mathcal{B}) = \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$

пытаемся опр-ть морфизмы:

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\Phi_x(*), \Phi_y(*)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(x,y)$

$\downarrow 0$

$\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(*,*), \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\Phi_x(*),\Phi_y(*)))$

$\| \ \mathrm{Hom}(k, \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(x,y)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(x,y)$