Лекция n+1.

Пусть X — схема (отделимая, конечного типа)

$\mathcal{A}_X$ — малая DG-категория, т.е.

- $[\mathcal{A}_X] \cong D^{perf}(X)$
- $D(\mathcal{A}_X) \cong \widehat{D(X)}$

<u>Теорема</u> (Лунц, Орлов)

Пусть на X достаточно много локально свободных пучков (то есть $\forall \mathcal{E} \in \mathrm{coh}\, X$ $\exists \mathcal{F}$ лок. св., $\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{E} \to 0$),

$\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — два оснащения.

Тогда $\exists F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — квазиэквивалентность, т.е.

(1) $F: \mathrm{Hom}^{\cdot}_{\mathcal{A}}(a_1, a_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}^{\cdot}_{\mathcal{B}}(Fa_1, Fa_2)$ — квазиизоморфизм

(2) $[F]: [\mathcal{A}] \longrightarrow [\mathcal{B}]$ существенно сюръективен

(В частности, $[F]: [\mathcal{A}] \xrightarrow{\cong} [\mathcal{B}]$, $L\mathrm{Ind}_F: D(\mathcal{A}) \xrightarrow{\cong} D(\mathcal{B})$)

Это всё так, например, для квазипроективных многообразий.

Это доказывает единственность оснащения.

По каждой схеме X мы можем построить $\mathcal{A}_X$.

Из хороших схем мы попадаем в $DGcat[Qeq^{-1}]$ —

DG-категории с точностью до квазиэквивалентности

Объекты $DGcat[Qeq^{-1}]$ мы будем называть некоммутативными схемами. Соответственно, там можно определить многое, что возникает из геометрической интуиции.

<u>Теорема</u> $\mathrm{Hom}_{DGcat[Qeq^{-1}]}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = T(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \subset D(\mathcal{A}^{op} \otimes \mathcal{B})$

Геометрическим аналогом квазифункторов здесь являются функторы Фурье-Мукаи

$$\begin{array}{ccc} & X \times Y & \\ {}^{p_1}\swarrow & & \searrow^{p_2} \\ X & & Y \end{array}$$

Для объекта $\mathcal{K} \in D(X \times Y)$ можно задать

$$\Phi_{\mathcal{K}} : D(X) \longrightarrow D(Y)$$

$$\mathcal{F} \longmapsto \Phi_{\mathcal{K}}(\mathcal{F}) := Rp_{2*}(\mathcal{K} \overset{L}{\otimes} Lp_1^* \mathcal{F})$$

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — оснащения для X, Y.

Тогда $\mathcal{A}^{op} \otimes \mathcal{B}$ — оснащение для $X \times Y$; $D(\mathcal{A}^{op} \otimes \mathcal{B}) \cong D(X \times Y)$

$$\begin{array}{ccc} D(X) & \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{K}}} & D(Y) \\ \wr\!\!\| & & \wr\!\!\| \\ D(\mathcal{A}) & \xrightarrow{- \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{K}} & D(\mathcal{B}) \end{array}$$

В основе этой теоремы лежит наличие модельной структуры на $DGcat[Qeq^{-1}]$. Там есть достаточно развитая техника, позволяющая описывать многие вещи. Про модельные категории знать надо, но в этом курсе это не поместится.

<u>Собственность</u>

$\mathcal{A}$ собственна, если $\forall a_1, a_2$ $\mathrm{Hom}^{\cdot}_{\mathcal{A}}(a_1, a_2) \in D^{perf}(k)$, т.е. этот комплекс имеет конечное число когомологий, и они все конечномерны.

<u>Лемма</u> Пусть X собственна, $\mathcal{A}_X$ — оснащение. Тогда $\mathcal{A}_X$ собственна.

<u>Д-во</u> $H^i(\mathrm{Hom}^{\cdot}_{\mathcal{A}}(a_1, a_2)) = \mathrm{Hom}_{[\mathcal{A}]}(a_1, a_2[i]) = \mathrm{Hom}_{D^{perf}(X)}(a_1, a_2[i])$

$\| \quad H^0(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a_1, a_2[i])) \quad \| \quad \mathrm{Hom}_{D(X)}(a_1, a_2[i]) \quad \| \quad \mathrm{Ext}^i(\underline{a_1}, \underline{a_2})$

Можем найти конечное покрытие $X = \bigcup U_\alpha$, где на U_α

$a_1 = \{0 \to F_m \to \ldots \to F_n \to 0\}$

$a_2 = \{0 \to G_p \to \ldots \to G_q \to 0\}$

Можно m, n, p, q считать общими для всех U_α.
Кроме того, $a_1^\vee = \{ F_{-n}^\vee \to \dots \to F_{-m}^\vee \}$
Тогда

$$\mathrm{Ext}^{i+j}(a_1, a_2) = \mathbb{H}^{i+j}(X, \underbrace{a_1^\vee \otimes a_2}_{[p-n, q-m]}) \Leftarrow H^j(X, \mathcal{H}^i(a_1^\vee \otimes a_2))$$

Эти Ext конечномерны, $i+j \in [p-n, q-m+\dim X]$
их конечное число.
Раз так в спектралке, то так и в том, к чему она сходится. В другую сторону потруднее.

Пусть X не собственна. Собственно, идея такая:
$\overline{X} \supset X$; $x_0 \in \overline{X} - X$; пусть $\overline{C} \subset \overline{X}$ — кривая,

$C = \overline{C} \cap X$, $\overline{C} \ni x_0$; C — аффинная кривая

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_C) = H^0(C, \mathcal{O}_C) \qquad \overset{\Downarrow}{\dim H^0(C, \mathcal{O}_C) = \infty}$$

Проблема: $\mathcal{O}_C$ не обязательно лежит в $D^{perf}(X)$.
Есть разные способы борьбы с проблемой.
Пусть на X достаточно много локально свободных пучков.
Построим локально свободную резольвенту:

$$\dots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to \mathcal{O}_C \to 0$$

Вообще говоря, она бесконечна. Сделаем $\sigma_{\geq N}$,
то есть где-то далеко обрежем эту.
Есть выделенный треугольник: $\mathcal{H}^{-N}[N] \to \underset{\substack{\cap \\ D^{perf}(X)}}{\sigma_{\geq N} P_\bullet} \to \mathcal{O}_C$

$$\mathrm{Hom}^{i+j}(\mathcal{O}_X, \sigma_{\geq -N} P_\bullet) =$$

$$= \mathbb{H}^{i+j}(\sigma_{\geq -N} P_\bullet) \Leftarrow H^j(X, \underbrace{\mathcal{H}^i(\sigma_{\geq -N} P_\bullet)}_{= \begin{cases} \mathcal{O}_C, & i=0 \\ \mathcal{H}^{-N}, & i=-N \end{cases}})$$

Если $N \geq \dim X$, то $H^0(X, \mathcal{O}_C)$
в спектралке ни с чем не
сократится, так что выживет в пределе, так что
мы получили бесконечномерный Hom между совершенными объектами

Есть и другие способы борьбы с этой проблемой.
Вывод в том, что собственность DG-категории — это правильное свойство.
Если DG-категории не над полем, а над кольцом, то определения останутся, а свойства станут намного менее тривиальными.

Гладкость

DG-категория $\mathcal{A}$ гладкая, если $\mathcal{A} \in D^{perf}(\mathcal{A}^{op} \otimes \mathcal{A})$, то есть диагональный бимодуль является совершенным, т.е. $\mathcal{A}$ — гомотопическое прямое слагаемое $\langle h_{a_1} \otimes h^{a_2} \rangle \subset D(\mathcal{A}^{op} \otimes \mathcal{A})$

Лемма. Пусть X гладкая. Тогда $\mathcal{A}_X$ гладкая.

Д-во. Опять предположим, что на X достаточно много локально свободных пучков. (Отсюда на $X \times X$ тоже)
$\Rightarrow$ для любого $\mathcal{F} \in coh(X \times X)$ $\exists$

$$\mathcal{E}_1 \boxtimes \mathcal{E}_2 \twoheadrightarrow \mathcal{F} \to 0$$

$$\| $$

$$p_1^* \mathcal{E}_1 \otimes p_2^* \mathcal{E}_2 \in coh(X \times X),$$

$$\begin{tikzcd} & X \times X \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ X & & X \end{tikzcd}$$

Тогда мы можем для $\Delta_* \mathcal{O}_X$ построить

$$\ldots \to \mathcal{E}_2' \boxtimes \mathcal{E}_2'' \to \mathcal{E}_1' \boxtimes \mathcal{E}_1'' \to \mathcal{E}_0' \boxtimes \mathcal{E}_0'' \to \Delta_* \mathcal{O}_X \to 0$$

$$\mathcal{H}^{-N}[N] \to \sigma_{\geq -N} \mathcal{E}_\bullet \to \Delta_* \mathcal{O}_X \to \mathcal{H}^N[N+1]$$

$$Hom(\Delta_* \mathcal{O}_X, \mathcal{H}^{-N}[N+1]) = Ext^{N+1}(\Delta_* \mathcal{O}_X, \mathcal{H}^{-N}) = 0 \text{ для } N \gg 0,$$

т.к. X гладко.

Значит, $\sigma_{\geq -N} \mathcal{E}_\bullet = \Delta_* \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{H}^{-N}[N]$.
Это и есть ключевое наблюдение.

$$\mathbb{D}(X \times X) \cong D(\mathcal{A}^{op} \otimes \mathcal{A})$$

$$\mathcal{E}'^{\vee} \boxtimes \mathcal{E}'' \leftrightarrow h_{a_1} \otimes h^{a_2}$$

$$\sigma_{\geq -N} \mathcal{E}_\bullet \in \langle h_{a_1} \otimes h^{a_2} \mid a_1, a_2 \in \mathcal{A} \rangle$$

$$Hom^\bullet(\mathcal{E}'^* \boxtimes \mathcal{E}'', \mathcal{F}'^* \boxtimes \mathcal{F}'') = Hom^\bullet(\mathcal{E}'^*, \mathcal{F}'^*) \otimes Hom^\bullet(\mathcal{E}'', \mathcal{F}'')$$

$Hom^\bullet(\mathcal{F}', \mathcal{E}')$

Объекты $\mathcal{E}' \boxtimes \mathcal{E}''$ соответствуют представимым бимодулям

Таким образом, $\Delta_*\mathcal{O}_X$ оказывается совершенным объектом.
Ещё нам надо убедиться, что $\Delta_*\mathcal{O}_X$ соответствует $\mathcal{A}$.

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{E}'^\vee\boxtimes\mathcal{E}'', \Delta_*(\mathcal{O}_X)) = \mathrm{Hom}(L\Delta^*(\underbrace{\mathcal{E}'^\vee\boxtimes\mathcal{E}''}_{p_1^*\mathcal{E}'^\vee\otimes p_2^*\mathcal{E}''}), \mathcal{O}_X) =$$

$$= \mathrm{Hom}(L\Delta^* p_1^*\mathcal{E}_1^\vee\otimes L\Delta^* p_2^*\mathcal{E}'', \mathcal{O}_X) = \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1^\vee\otimes\mathcal{E}_2, \mathcal{O}_X) = \mathrm{Hom}(\mathcal{E}'', \mathcal{E}')$$

Пусть теперь X не гладкая
Придём к противоречию утверждение, что $\mathcal{A}\in\mathrm{Perf}(\mathcal{A}^{op}\otimes\mathcal{A})$

$$\mathcal{A}\oplus\ldots\in\langle h_{a_1}\otimes h^{a_2}\rangle$$

$$\Delta_*\mathcal{O}_X\oplus\ldots\in\langle\mathcal{E}_1^\vee\boxtimes\mathcal{E}_2\rangle$$

(1) $\forall\,\mathcal{F}\in coh(X)\quad\exists\, m, n:$

$$\mathcal{F}\oplus\ldots = \{\mathcal{F}_m\to\ldots\to\mathcal{F}_n\},$$ где все $\mathcal{F}_i$ локально свободные, возможно бесконечного ранга.

$K\in D(X\times X)$; $\Phi_K: D(X)\longrightarrow D(X)$

$$\Phi_{\mathcal{E}_1^\vee\boxtimes\mathcal{E}_2}(F) = Rp_{2*}(Lp_1^*(\mathcal{F})\overset{L}{\otimes}(\mathcal{E}_1^\vee\boxtimes\mathcal{E}_2)) =$$

$$= Rp_{2*}(p_1^*(\mathcal{F}\otimes\mathcal{E}_1^\vee)\overset{L}{\otimes}p_2^*\mathcal{E}_2) =$$

$$= Rp_{2*}(p_1^*(\mathcal{F}\otimes\mathcal{E}_1^\vee))\otimes\mathcal{E}_2 =$$

$$\begin{tikzcd} X\times X \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & X \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "p"'] & \mathrm{Spec}\,k \end{tikzcd}$$

$$= p^*(Rp_*(\mathcal{F}\otimes\mathcal{E}_1^\vee))\otimes\mathcal{E}_2 =$$

$$= \mathbb{H}(X, \mathcal{F}\otimes\mathcal{E}_1^\vee)\otimes\mathcal{E}_2$$

Если объект получается из ограниченного числа $\mathcal{E}'\boxtimes\mathcal{E}''$ конусами, то опять будет объект такого вида.

Просто видеть, что $\Phi_{\Delta_*\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.

Для нашего $\mathcal{K}$ всегда равномерно можно фиксировать m и n.

Для каждого из $\mathcal{F}_i$ Ext бывают только в конечном числе степеней $\Rightarrow$ и в $\{\mathcal{F}_m \to \dots \to \mathcal{F}_n\}$ тоже.

Тогда и для $\mathcal{F}$, т.к. это там прямое слагаемое.

<u>Замечание.</u> Если X особо, $x_0 \in X$ — особая точка, то
$\{i \mid \mathrm{Ext}^i(\mathcal{O}_{x_0}, \mathcal{O}_{x_0}) \neq 0\}$ бесконечно.

Мы видим, что гладкость и собственность в каком-то смысле двойственны.
$\mathcal{A}$ лучше всего всё и гладкое, и собственное.

Далее естественно попытаться восстановить какие-то инварианты многообразия по оснащению.

Пусть X гладкое проективное $/\mathbb{C}$

$$H^n(X, \mathbb{C}) = \underbrace{\bigoplus_{p+q=n} H^q(X, \Omega^p_X)}$$

это есть всегда, считаем, что $\mathrm{char}\, k = 0$.

$$L\Delta^*\Delta_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X \oplus \Omega_X[1] \oplus \Omega^2_X[2] \oplus \dots$$

$Z \xhookrightarrow{i} X \Rightarrow \mathcal{H}^{-t}(Li^* i_* \mathcal{O}_Z) = \Lambda^t \mathcal{N}_{Z/X}$, если $Z \subset X$ — локально полное пересечение; диагональ для гладкого X, в частности.

$$H^\bullet(X, L\Delta^*\Delta_*\mathcal{O}_X) =$$
$$= H^\bullet(X \times X, \Delta_*(L\Delta^*(\Delta_*\mathcal{O}_X))) =$$
$$= H^\bullet(X \times X, \underbrace{\Delta_*\mathcal{O}_X}_{\substack{\mathcal{A} \\ \cap \\ \mathrm{dgmod}(\mathcal{A}^{op}\otimes\mathcal{A}) \\ \text{правый над} \\ \mathcal{A}^{op}\otimes\mathcal{A}}} \overset{L}{\otimes} \underbrace{\Delta_*(\mathcal{O}_X)}_{\substack{\mathcal{A} \\ \cap \\ \mathrm{dgmod}(\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}^{op}) \\ \text{левый над} \\ \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}^{op}}}) =$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dr] & X \times X \arrow[d] \\ & \mathrm{Spec}\, k \end{tikzcd}$$

Умножим, и получим комплекс векторных пространств.

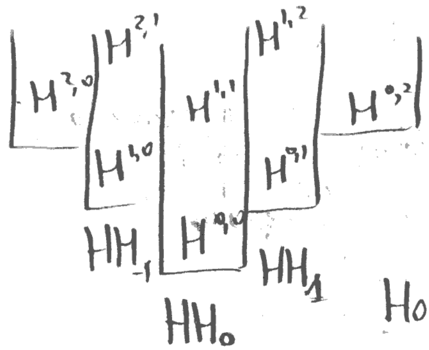
$$= \mathcal{A} \overset{L}{\underset{\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}^{op}}{\otimes}} \mathcal{A}$$

Опр. <u>Гомологии</u> <u>Хохшильда</u>

$$HH_\bullet(\mathcal{A}) = H^\bullet\left(\mathcal{A} \overset{L}{\underset{\mathcal{A}^{op}\otimes\mathcal{A}}{\otimes}} \mathcal{A}\right)$$

Теорема (Хохшильд-Костант-Розенберг)

$$HH_n(\mathcal{A}_X) = \bigoplus_p H^{p+n}(X, \Omega^p_X).$$



суммам по диагоналям мы придали категорный смысл.

Но отдельным $H^{p,q}$ — нет.

Вопрос. Существуют ли X, Y: $D(X) \cong D(Y)$, но $H^{p,q}(X) \neq H^{p,q}(Y)$.

Примеров пока нет.

Доказано, что для $\dim X \leq 3$ из эквивалентности производных категорий следует равенство $H^{p,q}$.

Поверхности.

из симметрии.

Из интерпретации небольшого числа эл-тов всё получается.

одни

$HH^0(X) = H^0(\mathcal{O}_X)$

Пусть $\mathcal{T} = \langle \mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_n \rangle$ — полуортогональное разложение оснащённых триангулированных категорий. Тогда

$$HH_\bullet(\mathcal{T}) = HH_\bullet(\mathcal{T}_1) \oplus \ldots \oplus HH_\bullet(\mathcal{T}_n).$$

Это разложение жёстко и функториально.

Допустим, $D(X) = \langle D(Y_1), \ldots, D(Y_n) \rangle$

При этом дополнительные градуировки портятся.

Скорее всего вторая градуировка не имеет категорного смысла.

Когомологии Хохшильда:

$$HH^\bullet(\mathcal{A}) = \mathrm{Ext}^\bullet_{D(\mathcal{A}^{op}\otimes\mathcal{A})}(\mathcal{A}, \mathcal{A}).$$

Теорема (Хохшильд–Костант–Розенберг).

$$HH^n(\mathcal{O}_X) = \bigoplus_{p+q=n} H^q(X, \Lambda^p T_X).$$

В терминах $HH^\bullet$ формулируются деформации. $H^1(T_X)\oplus H^0(\Lambda^2 T_X)\oplus H^2(\mathcal{O}_X) \parallel$

Деформации многообразия X — $H^1(T_X) \subset HH^2(X)$.

$H^0(\Lambda^2 T_X)$ — некоммутативные деформации структурного пучка.

$H^2(\mathcal{O}_X)$ тоже имеет не очень геометрический смысл.

$HH^\bullet$ не аддитивны отн. $=\langle\cdot,\dots,\cdot\rangle$, не настолько функториальны.

Размерность можно восстанавливать смотря на $\mathrm{Hom}(F, S^n G)$; функтор Серра часто есть. Например, в геометрическом случае.