3.12.13

Пусть $\mathcal{A}$ — предтриангулир. малая DG-категория,
Когда $[\mathcal{A}]$ имеет функтор Серра?

Опр Пусть $\mathcal{T}$ — собств. триант. кат. над $\mathbb{k}$ ($\mathbb{k}$-поле или коммут. кольцо) (т.е. $\forall F_1, F_2 \in \mathcal{T}$ $\bigoplus_{t\in\mathbb{Z}} Hom(F_1, F_2[t]) \in \mathbb{D}^{perf}(\mathbb{k})$

Тогда функтор Серра — это автоэкв-ть $S: \mathcal{T} \to \mathcal{T}$, т.ч. $\exists$ $Hom(F_1, SF_2) \cong Hom(F_2, F_1)^\vee$ — естеств. изоморфизм.

Теорема Если $\mathcal{A}$ — гладкая и собств. DG-категория, то $[Perf(\mathcal{A})]$ имеет функтор Серра.

В частности, если $\mathcal{A}$ — предтрианг. и замк. отн. прямых слагаемых, то $[\mathcal{A}]$ имеет функтор Серра.

Пример $\mathcal{T} = D^b(coh(X))$, где X — гладкое проект.
Тогда $S(F) = F \otimes \omega_X[\dim X]$ — функтор Серра.

Теор Если S_1 и S_2 — функторы Серра, то $S_1 \simeq S_2$

$\triangleleft$ $\underset{\varphi_F}{\underset{\Downarrow}{Hom(S_1F, S_2F)}} = Hom(F, S_1F)^\vee = Hom(F,F)^{\vee\vee} = \underset{id_F}{\underset{\Downarrow}{Hom(F,F)}}$
Аналогично, $\exists \psi_F \in Hom(S_2F, S_1F)$; их композиция — тожд. $\triangleright$

Теорема (Тоэн) Пусть $\mathcal{A}$ — гладкая и собств. DG-категория. $M \in dgmod(\mathcal{A})$. Тогда $M \in Perf(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{A}$ $M(x) \in \mathbb{D}^{perf}(k)$

$\triangleleft$ $\Rightarrow$ $M \in Perf(\mathcal{A})$. Заметим, что если $M = h^a$, то
$\forall x \in \mathcal{A}$ $\underset{Hom_{\mathcal{A}}(x,a)}{\underset{\|}{M(x)}} \in \mathbb{D}^{perf}(k)$ — соверш. компл., т.к. $\mathcal{A}$ — собств.

Св-во быть соверш. компл. замкнуто отн-но взятия конус. Трианг. подкат. порожд. h^a обладает нужным св-вом, и её карубиева оболочка — тоже

$\Leftarrow$ Пусть $\forall x \in \mathcal{A}$ $M(x) \in \mathbb{D}^{perf}(k)$

$$M = M \overset{L}{\underset{\mathcal{A}}{\otimes}} \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A} \oplus \ldots = Tot(h_{x_1} \otimes h^{y_1} \to h_{x_2} \otimes h^{y_2} \to \ldots \to h_{x_n} \otimes h^{y_n})$$

$$M \overset{L}{\underset{\mathcal{A}}{\otimes}} h_x \otimes h^y = M(x) \underset{k}{\otimes} h^y \in Perf(\mathcal{A})$$

$$\underbrace{(M \overset{L}{\underset{\mathcal{A}}{\otimes}} \mathcal{A}) \oplus \ldots}_{\text{прямое слагаемое в соверш. модуле} \Rightarrow \text{соверш.}} = Tot(M(x_1) \otimes h^{y_1} \to \ldots \to M(x_n) \otimes h^{y_n}) \in Perf(\mathcal{A})$$

$\triangleright$

Док-во теоремы про функтор Серра:

$$\mathrm{Hom}(F_1, SF_2) = \mathrm{Hom}(F_2, F_1)^\vee$$

$$\mathrm{Hom}(-, SF_2) = \underbrace{\mathrm{Hom}(F_2, -)^\vee}$$

является ли это представимым ф-ром?

Утв $\mathcal{A}$, $M \in \mathrm{Perf}(\mathcal{A})$; тогда

$\hat{M} := \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(M, -)^\vee$ – соверш. dg-модуль

$\triangle$ $\hat{M}(x) = \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(M, h^x)^\vee \overset{?}{\in} D^{perf}(k)$ $\forall x$

1) Если $M = h^a$, то это верно. $\mathrm{Hom}(h^a, h^x)^\vee = \underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a, x)^\vee}_{\in D^{perf}(k)} \in D^{perf}(k)$

2) Это св-во сохраняется при взятии конусов и прямых слагаемых.

Значит $\hat{M} \in \mathrm{Perf}(\mathcal{A})$, по теореме Тоэна $\triangleright$

Замечание: $\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(-, M)^\vee$ – соверш. левый dg-модуль

Следствие: В $[\mathrm{Perf}(\mathcal{A})]$ функторы $\mathrm{Hom}(F_2, -)^\vee$ и $\mathrm{Hom}(-, F_1)^\vee$ представимы.

Упр Это позволяет определить функтор Серра и проверить, что это эквивалентность

Склейка триангул. категорий

$\mathcal{T} = \langle \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \rangle$ – полуорт. разлож.

Как восстановить $\mathcal{T}$ по $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$?

Нужно знать $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(F_1, F_2)$ при $F_1 \in \mathcal{T}_1$, $F_2 \in \mathcal{T}_2$

Опр Склеивающий бимодуль $\Phi(F_1, F_2) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(F_1, F_2[1])$

Склеивающие функторы: $\varphi: \mathcal{T}_2 \longrightarrow \mathcal{T}_1$ $\quad \Phi(F_1, F_2) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_1}(F_1, \varphi(F_2))$

$\varphi^*: \mathcal{T}_1 \longrightarrow \mathcal{T}_2$ $\quad \Phi(F_1, F_2) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_2}(\varphi^*(F_1), F_2)$

Такие функторы есть не всегда (только в хороших случаях)

Пример $D(\mathbb{P}^n) = \langle \underbrace{\mathcal{O}}_{\mathcal{T}_1 \cong D(k)}, \underbrace{\mathcal{O}(1)}_{\mathcal{T}_2 \cong D(k)}, \ldots, \mathcal{O}(n) \rangle$ $\qquad \mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$

$$\Phi(M, N) = \mathrm{Hom}_{D(\mathbb{P}^n)}(M \otimes \mathcal{O}, N \otimes \mathcal{O}(1)[1]) = \mathrm{Hom}(M, N \otimes V^*[1])$$

$$\varphi(N) = N \otimes V^*[1]$$

$$\varphi^*(M) = M \otimes V[-1]$$

Пусть даны $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ и $\Phi \in \mathcal{T}_2^{op}\otimes \mathcal{T}_1$-mod

$\forall F \in \mathcal{T}$ нужен треугольник

$$F_2 \to F \to F_1 \xrightarrow{\mu} F_2[1]$$

$$\mathrm{Ob}\,\mathcal{T} = \{(F_1, F_2, \mu) \mid F_i \in \mathcal{T}_i,\ \mu \in \Phi(F_1, F_2)\}$$

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}((F_1, F_2, \mu), (G_1, G_2, \nu))$ — ?

$$F \to F_1 \xrightarrow{\mu} F_2[1]$$

$$G \to G_1 \xrightarrow{\nu} G_2[1]$$

$$\underset{0}{\cancel{\mathrm{Hom}(F_2[1], G_1)}} \to \begin{matrix}\mathrm{Hom}^i(F_1, G_1) \\ \oplus \\ \mathrm{Hom}^i(F_2, G_2)\end{matrix} \to \mathrm{Hom}^i(F_1, G_2[1])$$

— это бикомплекс.

$$\begin{tikzcd}
\begin{matrix}\mathrm{Hom}(F_1,G_1[-1]) \\ \oplus \\ \mathrm{Hom}(F_2,G_2[-1])\end{matrix} \arrow[r] & \Phi(F_1, G_2[-1]) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(F, G) \arrow[r, "f\mapsto(f_1,f_2)"] \arrow[d] & \begin{matrix}\mathrm{Hom}(F_1,G_1) \\ \oplus \\ \mathrm{Hom}(F_2,G_2)\end{matrix} \arrow[r] & \Phi(F_1, G_2) \arrow[r] & \dots \\
 & \mathrm{Coker} \arrow[ur] & \mathrm{Ker} \arrow[ur] \arrow[d] & & & \\
 & 0 \arrow[u] & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F_2 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "f_2"] & F \arrow[r] \arrow[d, "f"] & F_1 \arrow[d, dashed, "f_1"] \\
G_2 \arrow[r] & G \arrow[r] & G_1
\end{tikzcd}$$

Непонятно, как канонически определить $\mathrm{Hom}(F, G)$

Склейка на DG-уровне

$\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ — малые DG категории

$\varphi \in dgmod(\mathcal{A}_2^{op} \otimes \mathcal{A}_1)$

Опр $\mathcal{A}_1 \times_\varphi \mathcal{A}_2 =: \mathcal{A}$

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{A}) = \{(a_1, a_2, \alpha) \mid a_i \in \mathcal{A}_i,\ \alpha \in \varphi(a_2, a_1),\ \deg\alpha = 0,\ d\alpha = 0\}$
- $\mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{A}}((a_1, a_2, \alpha), (b_1, b_2, \beta)) = \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{A}_1}(a_1, b_1) \oplus \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{A}_2}(a_2, b_2) \oplus \varphi^\bullet(b_2, a_1)[-1]$
- $d(f_1, f_2, f_{21}) = (df_1, df_2, -df_{21} - f_2\alpha + \beta f_1)$
- $(f_1, f_2, f_{21}) \cdot (g_1, g_2, g_{21}) = (f_1 g_1, f_2 g_2, f_{21} g_1 \pm f_2 g_{21})$

Упр проверить, что это DG-категория

Замеч. Определим $\mathcal{A}_1 \coprod_\varphi \mathcal{A}_2$

- $\mathrm{Ob} = \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}_1 \sqcup \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}_2$
- $\mathrm{Hom}(a_i, b_i) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_i}(a_i, b_i)$ $i = 1, 2$

$\mathrm{Hom}(a_1, b_2) = \varphi(b_2, a_1)[-1]$; $\mathrm{Hom}(a_2, b_1) = 0$

Ув. Если $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ — предтриангул., тогда $\mathcal{A}_1 \times_\varphi \mathcal{A}_2$ — тоже

◁ Проверим конусы:

$f = (f_1, f_2, f_{21}) : (a_1, a_2, \alpha) \to (b_1, b_2, \beta)$

$\deg f = 0 \quad df = 0$

$df_1 = 0 \quad df_2 = 0 \quad \underbrace{df_{21} = \beta f_1 - f_2 \alpha}$

Пусть $c_i = \mathrm{Cone}(f_i)$

$$b_k \underset{q_k}{\overset{i_k}{\rightleftarrows}} c_k \underset{j^k}{\overset{p_k}{\rightleftarrows}} a_k[1]$$

$di_k = dp_k = 0; \quad dj_k = i_k f_k, \quad dq_k = -f_k p_k$

$\gamma \overset{?}{\in} \varphi(c_2, c_1)$

$\gamma = j_2 \alpha p_1 + i_2 \beta q_1 + i_2 f_{21} p_1$

$d\gamma = i_2 f_2 \alpha p_1 - i_2 \beta f_1 p_1 + i_2 df_{21} p_1 = 0$

Осталось написать диагр. и проверить все условия (упражнение):

$(b_1, b_2, \beta) \rightleftarrows (c_1, c_2, \gamma) \rightleftarrows (a_1, a_2, \alpha)[1]$ ▷

Пусть $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ — предтриангул. Тогда $[\mathcal{A}_1 \times_\varphi \mathcal{A}_2] = \langle [\mathcal{A}_1], [\mathcal{A}_2] \rangle$

$i_1 : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_1 \times_\varphi \mathcal{A}_2 \xleftarrow{i_2} \mathcal{A}_2$

$a_1 \longmapsto (a_1, 0, 0) \quad (0, a_2, 0) \longleftarrow a_2$

$i_1^*(a_1, a_2, \alpha) = a_1$

$i_2^!(b_1, b_2, \beta) = b_2$ } — сопряженные к i_1, i_2

Теорема $[\mathcal{A}_1 \times_\varphi \mathcal{A}_2] = \langle i_1([\mathcal{A}_1]), i_2([\mathcal{A}_2]) \rangle$

$\mathbb{D}(\mathcal{A}_1 \times_\varphi \mathcal{A}_2) = \langle \underset{\mathbb{L}\mathrm{Ind}_{i_1}}{\mathbb{D}(\mathcal{A}_1)}, \underset{\mathbb{L}\mathrm{Ind}_{i_2}}{\mathbb{D}(\mathcal{A}_2)} \rangle$

◁ $i_1^* \circ i_1 = id, \quad i_2^! \circ i_2 = id \Rightarrow i_1, i_2$ — строго полные (даже на DG-уровне)

$h^{(0, a_2, 0)} \to h^{(a_1, a_2, \alpha)} \to h^{(a_1, 0, 0)}$ — выдел. треуг. ▷

Упр 1) $\varphi \overset{qis}{\cong} \psi \Rightarrow \mathcal{A}_1 \times_\varphi \mathcal{A}_2 \overset{qeq}{\cong} \mathcal{A}_1 \times_\psi \mathcal{A}_2$

2) $\tau_1 : \mathcal{A}_1 \to \tilde{\mathcal{A}}_1$

$\tau_2 : \mathcal{A}_2 \to \tilde{\mathcal{A}}_2 \qquad \mathrm{Res}_{\tau_1, \tau_2} \tilde{\varphi} \xleftarrow{t} \varphi$

$\varphi \qquad \tilde{\varphi}$

Тогда $\exists \tau : \mathcal{A}_1 \times_\varphi \mathcal{A}_2 \to \tilde{\mathcal{A}}_1 \times_{\tilde{\varphi}} \tilde{\mathcal{A}}_2$, т.ч. а) если τ_1, τ_2 — квази строго полн. и t — квазиизом., то τ — квазистрого полн.

b) если τ_1, τ_2 — квазиэквив. и t — квазиизо $\Rightarrow$ τ квазиэкв.

c) если τ_1, τ_2 — квазиэкв. и $\tilde{\varphi} := LInd_{\tau_1,\tau_2}(\varphi)$, то

$$Res_{\tau_1,\tau_2}(\tilde{\varphi}) \cong \varphi \Rightarrow \tilde{A}_1 \times_{\tilde{\varphi}} \tilde{A}_2 \overset{qeq}{\cong} A_1 \times_{\varphi} A_2$$

Упр $\mathcal{C} \otimes (A_1 \times_\varphi A_2) = (\mathcal{C} \otimes A_1) \times_\varphi (\mathcal{C} \otimes A_2)$; $(A_1 \times_\varphi A_2)^{op} = A_2^{op} \times_\varphi A_1^{op}$

Упр. Универс. св-ва:

1) Пусть A — предтрианг. гладкая DG-кат. и $[A] = \langle T_1, T_2 \rangle$ — п.о.р.; тогда $A \overset{qeq}{\cong} A_1 \times_\varphi A_2$, т.ч. $T_i \cong [A_i]$

2) $T(\mathcal{C}, A_1 \times_\varphi A_2) \subset \mathbb{D}(\mathcal{C}^{op} \otimes (A_1 \times_\varphi A_2)) = \mathbb{D}((\mathcal{C}^{op} \otimes A_1) \times_\varphi (\mathcal{C}^{op} \otimes A_2)) =$

$= \langle \mathbb{D}(\mathcal{C}^{op} \otimes A_1), \mathbb{D}(\mathcal{C}^{op} \otimes A_2) \rangle$

$T(\mathcal{C}, A_1 \times_\varphi A_2) = \langle T(\mathcal{C}, A_1), T(\mathcal{C}, A_2) \rangle$

3) $T(A_1 \times_\varphi A_2, \mathcal{C}) \subset \mathbb{D}((A_1 \times_\varphi A_2)^{op} \otimes \mathcal{C}) = \langle \mathbb{D}(A_2^{op} \otimes \mathcal{C}), \mathbb{D}(A_1^{op} \otimes \mathcal{C}) \rangle$

$T(A_1 \times_\varphi A_2, \mathcal{C}) = \langle T(A_1, \mathcal{C}), T(A_2, \mathcal{C}) \rangle$

Упр A_1 и A_2 гладкие и собств., то

$A_1 \times_\varphi A_2$ — гладк. и собств. $\Leftrightarrow \varphi \in \mathbb{D}^{perf}(A_2^{op} \otimes A_1)$

Категория орбит

$T \circlearrowleft G$ — конеч. группа

$$\begin{tikzcd} X \times G \arrow[r, "\text{действие}"] \arrow[d, "pr_1"'] & X \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "p"'] & X/G \end{tikzcd}$$

Например, $T = \mathbb{D}(X)$; $X \circlearrowleft G$

Хочется определить триан. категорию T/G, т.ч. $\mathbb{D}(X)/G = \mathbb{D}(X/G)$

$$\mathbb{D}^G(X) \;\; (\,=\mathbb{D}(X)/G\,)$$

$X \longrightarrow X/G$

$\mathbb{D}(X) \underset{p^*}{\overset{p_*}{\rightleftarrows}} \mathbb{D}(X/G)$. Если действие свободно, то p^*, p_* — бисопр.

$\mathbb{D}(X) \underset{p^*}{\overset{p_*}{\rightleftarrows}} \mathbb{D}^G(X)$ — тоже бисопр. пара

$F \longleftarrow (F, \text{эквивар. стр-ра})$

$F \longmapsto \bigoplus_{g \in G} gF$

$$Hom_{\mathbb{D}^G(X)}(p_* F_1, p_* F_2) = Hom_{\mathbb{D}(X)}(p^* p_* F_1, F_2) = Hom_{\mathbb{D}(X)}\Big(\bigoplus_{g\in G} gF_1, F_2\Big) =$$

$$= \bigoplus_{g \in G} Hom_{\mathbb{D}(X)}(gF_1, F_2)$$

<u>Опр</u> $\mathcal{T}/G$: $\quad Ob = Ob\, \mathcal{T}$ — категория орбит

$$Hom(F_1, F_2) = \bigoplus_{g \in G} Hom_{\mathcal{T}}(gF_1, F_2)$$

$\widehat{\mathcal{T}/G}$ = карубиево замыкание $\mathcal{T}/G$ (добавим образы проекторов)

проблема: не получается ввести триангул. ст-ру

Пусть $\mathcal{A}$ — малая DG-категория; $\mathcal{A} \circlearrowleft G$

<u>Опр</u> DG-категория орбит $\mathcal{A}/G$:

$$Ob\, \mathcal{A}/G = Ob\, \mathcal{A}$$

$$Hom^{\bullet}_{\mathcal{A}/G}(a_1, a_2) = \bigoplus_{g \in G} Hom^{\bullet}_{\mathcal{A}}(ga_1, a_2)$$

<u>Упр</u> Это DG-категория

1) $\mathcal{A} \xrightarrow{p} \mathcal{A}/G$

$a \longmapsto a$

$$Hom_{\mathcal{A}}(a_1, a_2) \hookrightarrow Hom_{\mathcal{A}/G}(a_1, a_2)$$

2) $\mathcal{A}/G \xrightarrow{q} \mathcal{A}$ (Пусть $\mathcal{A}$ — аддитивна)

$a \longmapsto \bigoplus_{g \in G} ga$

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathcal{A}/G}(a_1, a_2) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\parallel"] & Hom(qa_1, qa_2) \arrow[d, phantom, "\parallel"] \\
\bigoplus_{g \in G} Hom(ga_1, a_2) \arrow[r] \arrow[dr] & \bigoplus_{g_1, g_2 \in G} Hom_{\mathcal{A}}(g_1 a_1, g_2 a_2) \\
& Hom(hga_1, ha_2) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

<u>Утв</u> p и q бисопряжены как DG-функторы

$$Hom_{\mathcal{A}/G}(pa, b) = \bigoplus_{g \in G} Hom(ga, b) = \bigoplus_{g \in G} Hom(a, gb) = Hom_{\mathcal{A}}(a, qb)$$

<u>Теорема</u>

$$\begin{tikzcd}
& {[\mathcal{A}]} \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[dl, phantom, "\supset"] & {[\mathcal{A}/G]} \arrow[l, shift left, "q"] \arrow[dr, phantom, "\subset"] & \\
{[Perf(\mathcal{A})]} \arrow[rrr, shift left] \arrow[dr, phantom, "\subset"] & & & {[Perf(\mathcal{A}/G)]} \arrow[lll, shift left] \arrow[dl, phantom, "\supset"] \\
& \mathbb{D}(\mathcal{A}) \arrow[r, shift left, "LInd_p"] & \mathbb{D}(\mathcal{A}/G) \arrow[l, shift left, "LInd_q"] &
\end{tikzcd}$$

коммутативно

и более того: $[Perf(\mathcal{A})]/G \cong [Perf(\mathcal{A}/G)]$