24.09.13

Λ_2

Пример $\mathcal{A} = \underline{A}$, A — алгебра; $\mathrm{Ob}\,\mathcal{A} = \{*\}$

$\mathcal{B} = \Bbbk\text{-dgmod}$

$\mathrm{DGFun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$

$\ni F: * \longmapsto M^{\bullet}$ компл. вект. пр-в

$\mathrm{Hom}_{\underline{A}}(*,*) \xrightarrow{F} \mathrm{Hom}_{\Bbbk\text{-dgmod}}(M^{\bullet}, M^{\bullet})$

$\|$

$A \longrightarrow Z^0 \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(M^{\bullet}, M^{\bullet})$

$d(A) = 0$

$A \longrightarrow \mathrm{Hom}(M^i, M^i)$, т.е.

M^i — A-модуль, а

$d: M^i \to M^{i+1}$ — гом-м A-модулей

$\Rightarrow M^{\bullet}$ — комплекс A-модулей

$\mathrm{DGFun}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) =$ комплексы A-модулей

$\|$

$\mathrm{DGFun}(\underline{A}, \Bbbk\text{-dgmod})$ с морфизмами $\mathrm{Hom}^p(M^{\bullet}, N^{\bullet}) = \prod_i \mathrm{Hom}_A(M^i, M^{i+p})$

Опр. Левый DG-модуль над DG-кат. $\mathcal{A}$ — это DG-функтор $\mathcal{A} \to \Bbbk\text{-dgmod}$.

Правый DG-модуль над DG-кат. $\mathcal{A}$ — это DG-функтор $\mathcal{A}^{op} \to \Bbbk\text{-dgmod}$.

$\mathcal{A}\text{-dgmod} := \mathrm{DGFun}(\mathcal{A}, \Bbbk\text{-dgmod})$

$\text{dgmod-}\mathcal{A} := \mathrm{DGFun}(\mathcal{A}^{op}, \Bbbk\text{-dgmod})$

Явно опишем левый DG-модуль:

$M: \mathcal{A} \longrightarrow \Bbbk\text{-dgmod}$

$\ni x \longmapsto M(x)$

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x,y) \xrightarrow{M} \mathrm{Hom}(M(x), M(y))$

Разл. обозначения:

1) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x,y) \longmapsto M(f) \in \mathrm{Hom}(M(x), M(y))$

2) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x,y) \otimes M(x) \xrightarrow{m_M} M(y)$

Композиция (усл-е соглас-ти с комп.):

1) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x,y)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(y,z)$

$M(g) \circ M(f) = M(g \circ f)$

$\mathcal{A} \xrightarrow{M} \Bbbk\text{-dgm}$

$\mathcal{A}^{op} \xrightarrow{N} \Bbbk\text{-dgm}$

$N \otimes M = ?$

2)
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(y,z)\otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x,y)\otimes M(x) \arrow[d, "\mu_{\mathcal{A}}"] \arrow[dr, "\mu_M"] & \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x,z)\otimes M(x) \arrow[dr, "\mu_M"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(y,z)\otimes M(y) \arrow[d, "\mu_M"] \\
& M(z)
\end{tikzcd}$$

Единица переходит в единицу:

1) $M(1)=1$

2) ...

Условие согласования с дифф-лом:

$d\,Mf = M\,df$

Правый dg-модуль описывается аналогично, только $M(g\circ f) = (-1)^{\deg g\cdot \deg f} M(f)\circ M(g)$

Пример 1) $a\in\mathcal{A}$. Зададим $h_a \in \mathcal{A}\text{-dgmod}$:

$x \mapsto h_a(x) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a,x)$

$f\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x,y) \mapsto (\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a,x) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a,y))$

$\xi \longmapsto f\circ\xi$

Идейно: $h_a(f) = f\circ -$

Нужно проверить: $dh_a(f) \overset{?}{=} h_a(df)$

диффер-л в комплексе м-мов

$h_a(df) = \xi \mapsto df\circ\xi$

$dh_a(f) = \xi \mapsto d(f\circ\xi) - (-1)^r f\circ d\xi = \xi \mapsto df\circ\xi$

Такие DG-модули (т.е. вида h_a) наз-ся представимыми левыми $\mathcal{A}$-DG-модулями.

2) Аналогично опр-ся правые представимые $\mathcal{A}$-DG-модули.

$h^a \in \mathrm{dgmod}\text{-}\mathcal{A}$

$x \longmapsto h^a(x) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x,a)$

$f\in \mathrm{Hom}^i_{\mathcal{A}}(y,x) \mapsto (\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x,a) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(y,a))$

$\mathrm{Hom}^i_{\mathcal{A}}(y,x) = \mathrm{Hom}^i_{\mathcal{A}^{op}}(x,y)$ $\quad h^a(f)(\xi^j) = (-1)^{ij}\xi\circ f$

Пример $\mathcal{A}=\underline{A}$

$h_*(*)=\mathrm{Hom}_{\underline{A}}(*,*)=A$

"свободный модуль ранга 1"
Ещё хорошая аналогия для проект. DG-модулей — "проективные модули над алгеброй".

Лемма **Йонеды**

1) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\text{-dgmod}}(h_a, M) = M(a)$

2) $\mathrm{Hom}_{\text{dgmod-}\mathcal{A}}(h^a, M) = M(a)$

В частности, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\text{-dgmod}}(h_a, h_b) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(b,a)$

$$\mathrm{Hom}_{\text{dgmod-}\mathcal{A}}(h^a, h^b) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a,b)$$

Д-во $\alpha\in \mathrm{Hom}^p(h_a, M)$

$x\in\mathcal{A}$, $x\xrightarrow{f} y$

$$\begin{tikzcd} h_a(x) \arrow[r, "\alpha_x"] \arrow[d, "h_a(f)"'] & M(x) \arrow[d, "M(f)"] & (-1)^{ip} \\ h_a(y) \arrow[r, "\alpha_y"] & M(y) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \alpha_a : h_a(a) \arrow[r] & M(a) \\ 1 \arrow[r, mapsto] \arrow[u, phantom, "\in"] & m_\alpha \arrow[u, phantom, "\in"] \end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow$ $\alpha \mapsto m_\alpha = \alpha_a(1_a)$

α — набор стрелок для ест. пр-я
α восстанавливается по m_α,
а именно:

$\alpha_y(h_a(f)(\xi)) = (-1)^{ip} M(f)(\alpha_x(\xi))$ ☆

подставим $x=a$, $\xi = 1_a$

$\alpha_y(f) = (-1)^{ip} M(f)(m_\alpha)$

$(f\in \mathrm{Hom}^i(a,y) = h_a(y)^i)$

Упр. проверить, что эта ф-ла корректно задаёт м-м DG-модулей, т.е. верно ☆

Второе проверяется аналогично. $\langle\dots\rangle$
QED

След. 1) построили ф-р
$\mathcal{A}^{op} \xrightarrow{h_\cdot} \mathcal{A}\text{-dgmod}$ строго полный
$a \mapsto h_a$

2) $\mathcal{A} \xrightarrow{h^\cdot} \text{dgmod-}\mathcal{A}$ строго полный
$a \mapsto h^a$

Операции над DG-модулями.

- $M, N \rightsquigarrow M\oplus N$

поточечно: $(M\oplus N)(x) = M(x)\oplus N(x)$

Просуммируем "художественно":

I - мн-во индексов

$M_i \in \mathcal{A}\text{-dgmod}, \ i\in I$

$\left(\bigoplus_{i\in I} M_i\right)(x) = \bigoplus_{i\in I} M_i(x)$ финитные наборы эл-тов

$\left(\prod_{i\in I} M_i\right)(x) = \prod_{i\in I} M_i(x)$ произв. наборы эл-тов

Все малые $\varinjlim$ и $\varprojlim$ сущ-ют.

- Сдвиг градуировки, <u>функтор сдвига</u>

$(M[1](x))^i = (M(x)[1])^i = M(x)^{i+1}$

$d^i_{M[1]} = -d^{i+1}_M$

- <u>Конус</u> (опр-н для замк. м-ма степени 0)

$M \xrightarrow{\alpha} N$

$\alpha \in \mathrm{Hom}^{\bullet}_{\mathcal{A}\text{-dgmod}}(M,N), \ d\alpha = 0, \ \deg\alpha = 0$ V

зачем нужны эти условия?

$f = \alpha$

$x\in\mathcal{A} \quad M(x) \xrightarrow{\alpha_x} N(x)$

$\mathrm{Cone}(\alpha)(x) = \mathrm{Cone}(\alpha_x)$

V <u>Упр.</u> Построить $\mathrm{Cone}(\alpha)(f)$

DG-бимодули.

Модули над алгебрами:

$A\otimes A^{op}\text{-mod} = A\text{-bimod}$

$\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}^{op}\text{-mod}^{dg} = \underline{\mathcal{A}\text{-DGbimod}}$

$K \in \mathcal{A}\text{-DGbimod}$

$x, y \in \mathcal{A} \mapsto K(x,y) \in \Bbbk\text{-dgmod}$

$\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}^{\bullet}\text{-dgmod} = \mathcal{A}\text{-}\mathcal{B}\text{-dgbimod}$

Пусть $M\in\mathcal{A}\text{-dgmod}$

$N\in\mathcal{B}\text{-dgmod}$

$(M\otimes_{\Bbbk} N)(a,b) = M(a)\otimes_{\Bbbk} N(b)$

$\rightsquigarrow M\otimes_{\Bbbk} N$ — <u>модуль над $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$</u>, или <u>$\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-бимодуль</u>

"ВСЯ ПУТАНИЦА НАЧИНАЕТСЯ ЕЩЁ В 8М КЛАССЕ ШКОЛЫ, КОГДА НАС УЧАТ, ЧТО КОМПОЗИЦИЯ МОРФИЗМОВ..."

Пусть $\mathcal{A}$ – DG-категория.

Определим $\mathcal{A} \in \mathcal{A}$-dgbimod:

$\mathcal{A}(x,y) := Hom_{\mathcal{A}}(y,x)$ – диагональный бимодуль

$K \in \mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-dgbimod

$a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$

$\rightsquigarrow K(a,-) \in \mathcal{B}$-dgbimod

$\rightsquigarrow K(-,b) \in \mathcal{A}$-dgbimod

$\mathcal{A}(a,-) = h^a$

$\mathcal{A}(-,a) = h_a$

Гомотопическая категория.

$\mathcal{A}$ – DG-кат. $\rightsquigarrow [\mathcal{A}] = H^0(\mathcal{A}) = Hot(\mathcal{A}) =$
$= K(\mathcal{A}) = \ldots$

$Ob([\mathcal{A}]) = Ob\,\mathcal{A}$

$Hom_{[\mathcal{A}]}(x,y) = H^0(Hom_{\mathcal{A}}(x,y))$

V Упр. $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ dg-функтор

$[\mathcal{A}] \xrightarrow{[F]} [\mathcal{B}]$ функтор

+ согласование с композицией

$F \circ G \rightsquigarrow [F] \circ [G] = [F \circ G]$