01.10.13 Триангулированная стр-ра на гомотопич. категории dg-модулей.

Λ_3

dgmod-$\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$-dgmod, $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}^\circ$-dgmod

Характеризация конуса

$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{i} C(f) \xrightarrow{p} M[1]$

i, p — замк. м-мы степени 0

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] & N \arrow[r, shift left, "i"] & C(f) \arrow[l, shift left, "q"] \arrow[r, shift left, "p"] & M[1] \arrow[l, shift left, "j"] \end{tikzcd}$$

$(dq)(n,m) = -f(m) = -f(p(n,m))$

Упр. $di=0$, $dp=0$; → проверить ✓

$dq=-fp$, $dj=if$

$iq+jp=1_{C(f)}$

$pi=0$, $qj=0$

$qi=1_N$, $pj=1_{M[1]}$

• если всё это выполнено для какого-то K:
$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, shift left, "i"] & K \arrow[l, shift left, "q"] \arrow[r, shift left, "p"] & M[1] \arrow[l, shift left, "j"] \end{tikzcd},$$ то $\exists f\colon K \simeq C(f)$

$Ob[\mathcal{A}] = Ob\,\mathcal{A}$, $Hom_{[\mathcal{A}]}(x,y) = H^0(Hom_{\mathcal{A}}(x,y))$

Теор. Если $\mathcal{A}$ — малая DG-категория, то $[dgmod\text{-}\mathcal{A}]$ триангулирована.

(TR1) (a) $\{0 \to X \xrightarrow{id} X \to 0\} \in \Delta(\mathcal{T})$

(b) $\Delta(\mathcal{T})$ замк. отн. изом-ма

(c) $\forall\, X \xrightarrow{u} Y$ прод-ся до выд. Δ-ка

(TR2) $\{X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]\} \in \Delta(\mathcal{T}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \xrightarrow{u[1]} Y[1]\} \in \Delta(\mathcal{T})$

(TR3)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed] & X[1] \arrow[d] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & X'[1] \end{tikzcd}$$

(TR4)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "f"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "g"] & X[1] \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r, "fu"] & Y' \arrow[r, dashed, "v'"] \arrow[d, "f'"] & Z' \arrow[r, dashed, "w'"] \arrow[d, dashed, "g'"] & X[1] \\ & W \arrow[r, equal] \arrow[d, "f''"] & W \arrow[d, dashed, "g''"] & \\ & Y[1] \arrow[r, "v[1]"] & Z[1] & \end{tikzcd}$$

Δ-во $(M[1])(x) = M(x)[1]$

$\Delta =$ тр-ки, изом-ные $\{M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{i} C(f) \xrightarrow{p} M[1]\}$

(0) Аддитивность:

нулевой объект $0(x)=0$

$M\oplus N$ — произв. и копроизв.

(TR1) $C(0 \to M) = M$

Лемма Пусть $M \underset{r}{\overset{u}{\rightleftarrows}} N \underset{s}{\overset{v}{\rightleftarrows}} K \overset{w}{\dashrightarrow} M[1]$
$du=0,\ dv=0$; r и s не $\overset{\text{обяз.}}{\text{замк.}}$; выполнены св-ва ☆.

Положим $w := -r \circ d_N \circ s$. Тогда Δ-к $\{M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} K \xrightarrow{w} M[1]\}$ выделенный.

Д-во

"ТАКУЮ ШТУКУ ВЫ МОЖЕТЕ ДОКАЗЫВАТЬ, ПУТЕШЕСТВУЯ ПО РАЗВЕСИСТОЙ КОММУТАТИВНОЙ ДИАГРАММЕ"

$u[1]w = -u[1]rd_Ns = -urd_Ns = (sv-1)d_Ns =$?
$= svd_Ns - d_Ns = sd_K\underbrace{vs}_{=1} - d_Ns = -d(s)$

$wv = -rd_N\underline{sv} = rd_N(ur-1) = r\underline{d_Nu}r - rd_N =$
$= rud_Mr - rd_N = d_Mr - rd_N = d(r)$

$uw = -d(s) \Rightarrow d(uw) = 0$
$\qquad\qquad\qquad\quad \| $
$\qquad\qquad du \circ w + u \circ dw = u\,dw$
$\qquad \Rightarrow ru\,dw = 0 \Rightarrow dw = 0 \rightsquigarrow$ получили треуг-к

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[d, equal] & N \arrow[l, shift left, "r"] \arrow[r, shift left, "v"] \arrow[d, equal] & K \arrow[l, shift left, "s"] \arrow[r, "w"] \arrow[d, shift right, "f"'] & M[1] \arrow[d, equal] \\
M \arrow[r, "u"] & N \arrow[r, shift left, "i"] & C(u) \arrow[l, shift left, "q"] \arrow[u, shift right, "g"'] \arrow[r, shift left, "p"] & M[1] \arrow[l, shift left, "j"]
\end{tikzcd}$$

Хотим опр-ть f и g, т.ч. получился iso с точн. до гомотопии.

$f = is + jw \qquad g = vq$

Пользуемся ☆:
$dq = -up,\ dj = iu$

"ВЕСЕЛО СОКРАЩАЕТСЯ"

$df = id(s) + d(j)w = -iuw + iuw = 0$
$dg = vd(q) = -vup = 0$
$\Rightarrow f$ и g – морфизмы в гомотопич. категории.

Теперь проверяем коммутативность (аж 4х!) квадратов:

→ $gi = vqi = v$
→ $pf = \underbrace{pis}_{=0} + \underbrace{pj}w = w$
→ $fv - i \underset{\text{homot}}{\sim} 0$, т.к. это дифф-л от чего-то
$\quad \|$
$isv + jwv - i = i(1-ur) + jwv - i =$
$= -iur + jwv = -d(j)r + jd(r) = -d(jr)$
→ $wg - p = wvq - \underbrace{p}_{1=}\underline{ru}p = d(r)q + rd(q) = d(rq)$

Проверяем, что композиции fg и gf гомотопны тожд. морфизмам.

$gf = vqis + vqjw = vs + 0 = 1$
$fg \overset{-1}{=} isvq + jw\overset{-1}{vq} = i(1-ur)q + jwvq - 1_{C(u)} =$
$= \cancel{iq} - iurq + jwvq - \cancel{iq} - jp =$
$= -d(j)rq + jd(r)q - \underbrace{jrup}_{=jrd(q)} =$
$= -d(jrq)$

QED

(TR2) почему $\{N \underset{q}{\overset{i}{\rightleftarrows}} C(f) \underset{}{\overset{p}{\rightleftarrows}} M[1] \xrightarrow{f[1]} N[1]\} \in \Delta$?
Нужно проверить, почему $f[1] = -qd_{C(f)}j$.
$d(j) = d \circ j + j \circ d \Rightarrow -qd_{C(f)}j = qjd - qd(j) =$
$= -qif = -f$

"Вращение" в обр. сторону = сдвиг на -1 и два "вращ." вперёд $\Rightarrow$ всё ОК.

(TR3) М.сч., что Δ-ки стандартные:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & N \arrow[r, shift left, "i"] \arrow[d, "g"] & C(u) \arrow[l, shift left, "q"] \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[d, dashed, "h"] & M[1] \arrow[l, shift left, "j"] \arrow[d, "f[1]"] \\
M' \arrow[r, "u'"] & N' \arrow[r, shift left, "i'"] & C(u') \arrow[l, shift left, "q'"] \arrow[r, shift left, "p'"] & M'[1] \arrow[l, shift left, "j'"]
\end{tikzcd}$$

Квадратик комм. в гомот. категории:

$gu - u'f = d(a)$

$h := i'gq + j'fp + i'ap$

Упр. Проверить $dh=0$ и гомот-кую комм-ть двух квадратов. V

(TR4) "Доказывается неинтересно" — тоже упр. + указание: использовать лемму. V

QED

Опр. $\mathcal{A}$ — малая DG-категория

$$\mathcal{A} \xrightarrow{h^{\bullet}} \text{dgmod-}\mathcal{A}$$
$$x \longmapsto h^x$$

$[\mathcal{A}] \longrightarrow [\text{dgmod-}\mathcal{A}]$ строго полный

$\mathcal{A}$ наз-ся предтриангулированной, если образ $[\mathcal{A}]$ в $[\text{dgmod-}\mathcal{A}]$ явл-ся триангулированной подкатегорией.

Иначе говоря:

(1) $\forall x, y \in \mathcal{A}\ \exists z \in \mathcal{A}:\ h^x \oplus h^y \underset{homot}{\cong} h^z$

Будем тогда обозначать $z = x \oplus y$ для объектов категории $[\mathcal{A}]$

(2) $\forall x \in \mathcal{A}\ \exists x', x'' \in \mathcal{A}:\ h^x[1] \cong h^{x'},\ h^x[-1] \cong h^{x''}$.

Будем писать так: $x' = x[1]$, $x'' = x[-1]$.

(3) $\forall x, y \in \mathcal{A}\ \forall f \in Z^0 \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x,y)\ \exists z \in \mathcal{A}:$

$C(h^f : h^x \longrightarrow h^y) \cong h^z$

Можно заметить, что (1) явл-ся частным случаем (2) и (3).

$C(X \xrightarrow{0} Y) = Y \oplus X[1]$

Пример. 1) $\mathcal{A}_1 = \underline{k}$ $\quad$ $\text{dgmod-}\mathcal{A} = \text{dgmod-}k \supset \text{grmod-}k$

Функтор Йонеды: $\underline{k} \longrightarrow \text{dgmod-}k$
$$* \longmapsto k$$

$\mathcal{A}$ не предтриангул. категория.

2) $\mathcal{A}_2 = \{k, k[1], k[2], \dots\} \subset \text{dgmod-}k$

Сдвиг предст. объекта на 1 представим, а на -1 — не всегда.

Стабильная гомот. категория (? ≥ 0) была исторически первым примером триангул. категории.

3) $\mathcal{A}_3 = \{k[t] \mid t \in \mathbb{Z}\}$
С ф-рами сдвига всё хорошо,
а прямая сумма огорчает.

4) $\mathcal{A}_4$ = скелет grmod-k
(grmod-k не малая, но существенно малая, т.е. её скелет – малая категория)
$\mathcal{A}_4$ уже предтриангулирована.

$\text{dgmod-}\mathcal{A}_i \underset{\text{equiv}}{\cong} \text{dgmod-}k$
$i = 1, \ldots, 4$

Утв. (1) Если $z \cong x \oplus y$, то $\forall M \in \text{dgmod-}\mathcal{A}$
$M(z) \cong M(x) \oplus M(y)$.

Д-во
1 способ
$M(z) = \mathrm{Hom}(h^z, M) = \mathrm{Hom}(h^x \oplus h^y, M) =$
$= \mathrm{Hom}(h^x, M) \oplus \mathrm{Hom}(h^y, M) = M(x) \oplus M(y)$
(юзаем лемму Йонеды)

2 способ

$x \underset{q}{\overset{i}{\rightleftarrows}} z \underset{j}{\overset{p}{\rightleftarrows}} y \qquad qi = 1,\ pj = 1 \qquad iq + jp = 1$

это всё в гомот. категории

$M(x) \underset{M(q)}{\overset{M(i)}{\rightleftarrows}} M(z) \underset{M(j)}{\overset{M(p)}{\rightleftarrows}} M(y)$

QED

Утв. (2) Если $x' \cong x[1]$, $x'' \cong x[-1]$, то $\forall M \in \text{dgmod-}\mathcal{A}$
$M(x') \cong M(x)[-1]$, $M(x'') \cong M(x)[1]$.

(3) $z \cong C(f)$, то $\forall M \ldots$:

конус, сдвинутый на –1, в гом. алг. иногда наз-ют слоем.

$x \longrightarrow y \longrightarrow z \longrightarrow x[1]$
$M(x) \leftarrow M(y) \leftarrow M(z) \leftarrow M(x)[-1]$
$M(z) \cong C(M(f))[-1]$

"DG-кат. бывают разной степени предтриангулированности".

Оснащение.

Опр. DG-оснащение (оснащение) триангулированной категории $\mathcal{T}$ – это предтр. DG-категория $\mathcal{A}$ и её триангл. экв-ть $[\mathcal{A}] \cong \mathcal{T}$.

В дальнейшем мы увидим, что много естеств. примеров триангл. категорий обладают DG-оснащением, что делает жизнь с ними проще.
Однако стаб. гомотопич. категория оснащением не обладает.

[dgmod-$\mathcal{A}$]

Опр. dgmod-$\mathcal{A} \ni M$ <u>ацикличен</u>, если $\forall x \in \mathcal{A}$ комплекс $M(x)$ ацикличен.

$\mathrm{Acycl}(\mathcal{A}) \subset$ dgmod-$\mathcal{A}$.

Упр. $[\mathrm{Acycl}(\mathcal{A})] \subset [\text{dgmod-}\mathcal{A}]$ — триангулированная категория.

Пример dgmod-$k[x]$

$$\{0 \longrightarrow k[x] \xrightarrow{x} k[x] \longrightarrow k \longrightarrow 0\} =: M$$

M ацикл., но не изом. 0 в $[\text{dgmod-}\mathcal{A}]$.

Упр. проверить

$$\begin{tikzcd} \mathcal{N} \subset \mathcal{T} \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & \mathcal{T}/\mathcal{N} \arrow[r, dashed] & \mathcal{T}' \\ \{0\} \end{tikzcd}$$

$$D(\mathcal{A}) := {[\text{dgmod-}\mathcal{A}]}\big/{[\mathrm{Acycl}(\mathcal{A})]}$$

У $D(\mathcal{A})$ есть естеств. оснащение (далее 2).