15.10.13 Совершенные DG-модули.

Л5

Напом. $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = [\text{dgmod-}\mathcal{A}] / [\text{acycl-}\mathcal{A}] \cong [\text{hproj-}\mathcal{A}] \cong$
$\cong [\text{hinj-}\mathcal{A}]$

$\mathcal{D}(\mathcal{A})$ кополная (cocomplete) (т.е. в ней есть все прямые суммы)

Опр. $X \in \mathcal{T}$ компактный, если (ф-р h_X комм-ет с прямыми сумм.)
$\text{Hom}(X, \oplus T_i) \xleftarrow{\cong} \oplus \text{Hom}(X, T_i)$ – изом-м.

$\mathcal{T}^c$ – поджат. комп. объектов.

Лемма $\mathcal{T}^c \subset \mathcal{T}$ – триангл. кат., замкнута отн. взятия прямых слагаемых.

Д-во 1) пусть $X \in \mathcal{T}^c$. $X[1] \overset{?}{\in} \mathcal{T}^c$

$\text{Hom}(X[1], \oplus T_i) \cong \text{Hom}(X, (\oplus T_i)[-1]) \cong$
$\cong \text{Hom}(X, \oplus(T_i[-1])) \cong \oplus \text{Hom}(X, T_i[-1]) \cong$
$\cong \oplus \text{Hom}(X[1], T_i)$

$V = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \Bbbk \in \Bbbk\text{-vect}$
Верно ли, что $\oplus \text{Hom}(V, -)$ представим?

2) пусть $X, Y \in \mathcal{T}^c$, $f : X \to Y$. $C(f) \overset{?}{\in} \mathcal{T}^c$

$X \xrightarrow{f} Y \to C(f) \to X[1] \to Y[1]$

+5-лемма

3) $X \oplus Y \in \mathcal{T}^c$. $X \overset{?}{\in} \mathcal{T}^c$

$$\begin{tikzcd}
\text{Hom}(X\oplus Y, \oplus T_i) \arrow[d, phantom, "\cong"] & & \oplus \text{Hom}(X \oplus Y, T_i) \arrow[ll, "\varphi_{X\oplus Y}"', "\sim"] \arrow[d] \\
\text{Hom}(X, \oplus T_i) \oplus \text{Hom}(Y, \oplus T_i) & & (\oplus \text{Hom}(X, T_i)) \oplus (\oplus \text{Hom}(Y, T_i)) \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

Что из себя представляет $\mathcal{D}(\mathcal{A})^c$?

Примеры компактных объектов в $\mathcal{D}(\mathcal{A})^c$

0) 0

1) представимый модуль h^z, $z \in \mathcal{A}$

$\text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(h^z, M) = ?$

пусть есть $M, N \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$;

$P_N \to N \to A_N$

$P_M \to M \to A_M$

$\text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(N, M) \cong \text{Hom}_{[\text{hproj-}\mathcal{A}]}(P_N, P_M) =$
$= H^0(\text{Hom}^{\bullet}_{\text{dgmod-}\mathcal{A}}(P_N, P_M))$

$\underset{\text{ацикл.}}{\text{Hom}(P_N, A_M[-1])} \to \text{Hom}(P_N, P_M) \xrightarrow{\sim}$
$\xrightarrow[\text{iso}]{\sim} \text{Hom}(P_N, M) \to \underset{\text{ацикл.}}{\text{Hom}(P_N, A_M)}$

$$\Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(N,M) \cong \mathrm{Hom}_{[dgmod\text{-}A]}(P_N, M)$$

Применяем новые сведения (заметим при этом, что h^z ~~пр~~ h-проективен):

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(h^z, \oplus M_i) \arrow[d, phantom, "\wr\wr"] & \oplus \mathrm{Hom}(h^z, M_i) \arrow[l] \arrow[d, phantom, "\wr\wr"] \\
H^0(\oplus M_i(z)) \arrow[d, phantom, "\wr\wr"] & \oplus H^0(M_i(z)) \\
\oplus H^0(M_i(z)) \arrow[ur, equal] &
\end{tikzcd}$$

Теор. (Ниман / Neeman)

чёрный ящик

Пусть $\mathcal{T}$ — копольная триан. категория. $S \subset \mathcal{T}^c$, S — мн-во. Пусть $S^\perp = 0$.

Тогда $\mathcal{T}^c = \langle S \rangle^\oplus$ — мин. триан. кат. в $\mathcal{T}$, содержащая S и замк. отн. взятия пр. слаг.

След. $\mathcal{D}(A)^c = \langle h^z \rangle^\oplus$

Д-во $\{h^z[k]\}^\perp \ni M$

Считаем когом. M: $\forall z \in A\ \forall k$

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(A)}(h^z[k], M) = H^0(M(z)[-k]) =$
$= H^{-k}(M(z)) = 0 \Rightarrow M$ ацикл. + теор.

Д-во (попытка доказать теор. Нимана в нашем случае $(\mathcal{D}(A), \{h^z\} \subset \mathcal{D}(A)^c)$.)

Пусть $P \in \mathcal{D}(A)^c \cong [hproj\text{-}A]$,

т.е. м. сч., что P h-проективен.

$$\underbrace{\mathrm{Tot}^\oplus \left(\begin{array}{c} \cdots \\ \downarrow \\ \bigoplus_{x_1, x_2} P(x_2) \otimes \mathrm{Hom}_A(x_1, x_2) \otimes h^{x_1} \\ \downarrow \\ \bigoplus_x P(x) \otimes h^x \end{array} \right)}_{H}
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "\mathcal{L}"] & P \arrow[r] & A_P \\
& P \arrow[u, "id"] \arrow[ur, "0"'] \arrow[ul, dashed, "s"] &
\end{tikzcd}$$

как-то так... $\Rightarrow H = P \oplus P'$, а $H \in \langle h^z \rangle^\oplus$

Опр. P — совершенный DG-модуль, если он получается из представимых:

1) сдвигами;

"главная неприятность конструкции" $\to$ 2) итерированным добавлением конусов;

3) взятием прямых слагаемых (в $[dgmod\text{-}A]$).

$$\begin{array}{ccc} Perf(A) \subset dgmod\text{-}A & & \\ \cup & & \\ hproj\text{-}A & \rightsquigarrow [Perf(A)] \subset & \mathcal{D}(A) \\ & \shortparallel & \cup \\ & & \mathcal{D}(A)^c \end{array}$$

триан., замк. отн. пр. слаг-х

Скрученные комплексы (twisted).

$\mathcal{A}$ – адд. малая DG-категория.

адд.: имеются все малые прямые суммы

Опр. Скрученный комплекс над $\mathcal{A}$ — это $(E_i, q_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}}$.

- $E_i\in\mathcal{A}$, почти все нулевые
- $q_{ij}\in \mathrm{Hom}^{i+1-j}_{\mathcal{A}}(E_i,E_j)$
- $dq_{ij}+\sum_{k\in\mathbb{Z}} q_{kj}\,q_{ik}=0$

Прим. 0) Единств. ненул. E, $q\in \mathrm{Hom}^1_{\mathcal{A}}(E,E)$

ассоциации: морфизмы CDG-алгебр

$dq+q^2=0$ (ур-е Маурера-Картана)

1) $\ldots\to E_{i-1}\xrightarrow{q_{i-1,i}} E_i \xrightarrow{q_{i,i+1}} E_{i+1}\xrightarrow{q_{i+1,i+2}}\ldots$

$q_{ij}\neq 0$ только при $j=i+1$, $dq_{i,i+1}=0$

$\Rightarrow \deg q_{i,i+1}=0$

$\rightsquigarrow (E_i, q_{i,i+1})$ – комплекс

Хочется ввести стр-ру DG-категории на скрученных комплексах $Tw(\mathcal{A})$.

$Tw(\mathcal{A})\supset Tw^+(\mathcal{A})=\{(E_\bullet,q_{\bullet\bullet}) \mid q_{ij}\neq 0 \text{ только при } i<j\}$

односторонние скр. к-сы

Опишем комплекс морфизмов:

$$\mathrm{Hom}^k_{Tw(\mathcal{A})}\big((E_\bullet,q_{\bullet\bullet}),(E'_\bullet,q'_{\bullet\bullet})\big) := \bigoplus_{i,j\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}^{i+k-j}_{\mathcal{A}}(E_i,E'_j) \ni (f_{ij})_{i,j\in\mathbb{Z}},\quad f_{ij}$$

$$(df)_{ij} = d_{\mathcal{A}}(f_{ij}) + \sum_{l\in\mathbb{Z}}\big(q'_{lj}\,f_{il} + (-1)^{\cdots} f_{lj}\,q_{il}\big)$$

Упр.. написать прав. знак

Пример 1) $E_{(0)}$ – к-с, у кот. E на 0-м месте

$E'_{(m)}$ – к-с, у кот. E' на m-м месте

$$\mathrm{Hom}^k_{Tw(\mathcal{A})}(E_{(0)},E'_{(m)}) = \mathrm{Hom}^{k-m}_{\mathcal{A}}(E,E')$$

2) Рассм. скр. к-сы $E_{(0)}\xrightarrow{q}E_{(1)}$

$E'_{(0)}\xrightarrow{q'}E'_{(1)}$

$$\mathrm{Hom}^k\left(E_{(0)} \xrightarrow{q} E_{(1)},\ E'_{(0)} \xrightarrow{q'} E'_{(1)}\right)$$
$$\|$$
$$\mathrm{Hom}^{k-1}(E_{(0)}, E'_{(1)}) \oplus \mathrm{Hom}^k(E_{(0)}, E'_{(0)}) \oplus$$
$$\oplus\, \mathrm{Hom}^k(E_{(1)}, E'_{(1)}) \oplus \mathrm{Hom}^{k+1}(E_{(1)}, E'_{(0)})$$
$$\wr\|$$
$$\mathrm{Hom}^k(C(q), C(q'))$$

Свёртка $Tw(\mathcal{A}) \to dgmod\text{-}\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{A}\text{-}dgmod \\
Tw(\mathcal{A}) \arrow[ur] \arrow[r, "T"'] & dgmod\text{-}\mathcal{A}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Hom}_{Tw(\mathcal{A})}(Z_{(0)}, (E_\cdot, q_{\cdot\cdot})) \\
(E_\cdot, q_{\cdot\cdot}) \arrow[ur, mapsto] \arrow[r, mapsto] & \mathrm{Hom}_{Tw(\mathcal{A})}((E_\cdot, q_{\cdot\cdot}), Z_{(0)})
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{A} \hookrightarrow Tw(\mathcal{A})$ строго полн.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \hookrightarrow & Tw(\mathcal{A}) \\ \Psi & & \Psi \\ E & \longmapsto & E_{(0)} \end{array}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, hook] & Tw(\mathcal{A}) \arrow[r, "\text{Ф. Йонеды}"] \arrow[rr, bend right, "T"'] & dgmod\text{-}Tw(\mathcal{A}) \arrow[r, "Res"] & dgmod\text{-}\mathcal{A}
\end{tikzcd}$$

свёртка

Тензорные произведения DG-модулей.

Упр. $\langle h^Z \rangle = T(Tw^+(\mathcal{A}))$ ← "это на самом деле несложно"

Изменим обозначения. $\mathcal{D}(\mathcal{A})$
$\cup$
теперь это → $Perf(\mathcal{A})$
будет обозн. гомот. категорию

$M \underset{\mathcal{A}}{\otimes} N = ?$ $\quad M \in dgmod\text{-}\mathcal{A}$
$\quad N \in$ ~~[illegible]~~ $\mathcal{A}\text{-}dgmod$

Для алгебр: $\mathrm{Coker}(M \otimes_k A \otimes_k N \to M \otimes_k N) = M \otimes_A N$
$m \otimes a \otimes n \mapsto m \otimes an - ma \otimes n$

Опр. $$M \underset{\mathcal{A}}{\otimes} N := \mathrm{Coker}\begin{pmatrix} \bigoplus_{x_1, x_2} M(x_2) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x_1, x_2) \otimes N(x_1) \\ \downarrow \\ \bigoplus_{x \in \mathcal{A}} M(x) \otimes N(x) \end{pmatrix}$$
$m \otimes f \otimes n \mapsto -m \otimes fn + mf \otimes n$

$M \underset{\mathcal{A}}{\otimes} N$ будет ф-ром. $\varphi \in \mathrm{Hom}^k_{\mathcal{A}}(M, M')$

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{x_1,x_2} M(x_2) \otimes \mathrm{Hom}(x_1,x_2) \otimes N(x_1) \arrow[r] \arrow[d, "\oplus\, \varphi_{x_2} \otimes id \otimes id"] & \bigoplus_x M(x) \otimes N(x) \arrow[d] \\
\bigoplus_{x_1,x_2} M'(x_2) \otimes \mathrm{Hom}(x_1,x_2) \otimes N(x_1) \arrow[r] & \bigoplus_x M'(x) \otimes N(x)
\end{tikzcd}$$

Можно пров-ть, что эта диагр. комм-на.

Пример $h^z \otimes_{\mathcal{A}} N = \mathrm{Coker}\left(\oplus h^z(x_2)\otimes \mathrm{Hom}(x_1,x_2)\otimes N(x_1) \to \oplus h^z(x)\otimes N(x)\right)$

$$\begin{tikzcd}
\oplus \mathrm{Hom}(x_2,z)\otimes \mathrm{Hom}(x_1,x_2)\otimes N(x_1) \arrow[d] & & & 1\otimes f\otimes n \\
\oplus \mathrm{Hom}(x,z)\otimes N(x) \arrow[d] \arrow[u, bend right] & f\otimes n \arrow[d] & 1\otimes n & f\otimes n \arrow[u] \\
N(z) \arrow[d] \arrow[u, bend right] & fn & n \arrow[u] & \\
0 & & &
\end{tikzcd}$$

"это кусочек нашей любимой бар-резольвенты"

Опр. $M \in \mathrm{dgmod}\text{-}\mathcal{A}$

$N \in \mathcal{A}\text{-}\mathrm{dgmod}\text{-}\mathcal{B}$

"строим тензорное произведение модулей и получаем какой-то жалкий комплекс"

$(M \otimes_{\mathcal{A}} N)(b) := M \otimes_{\mathcal{A}} \underbrace{N(-,b)}_{\in \mathcal{A}\text{-}\mathrm{dgmod}}$

$\rightsquigarrow M \otimes_{\mathcal{A}} N \in \mathrm{dgmod}\text{-}\mathcal{B}$

(Аналогично, если M был бимодулем.)

Если $M \in \mathcal{A}\text{-}\mathrm{dgmod}\text{-}\mathcal{B}$, $N \in \mathcal{B}\text{-}\mathrm{dgmod}\text{-}\mathcal{C}$, то $(M \otimes_{\mathcal{A}} N)(a,c) := M(a,-) \otimes_{\mathcal{A}} N(-,c)$

Пример $\mathcal{A} \in \mathcal{A}\text{-}\mathrm{dgmod}\text{-}\mathcal{A}$

$\mathcal{A}(x,y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(y,x)$

$M \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A} = M$: $(M \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A})(x) = M \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}(-,x) =$

$= M \otimes_{\mathcal{A}} \mathrm{Hom}(x,-) =$

$= M \otimes_{\mathcal{A}} h_x = M$

$\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}} N = N$

$\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A} = \mathcal{A}$

Упр. $M \otimes_{\mathcal{A}} (N \otimes_{k} L) = ?$ $\quad M \in \mathrm{dgmod}\text{-}\mathcal{A}$, $N \in \mathcal{A}\text{-}\mathrm{dgmod}$, $L \in \mathrm{dgmod}\text{-}\mathcal{B}$

Св-ва
- тенз. пр-е индуцирует ф-р на гомотопических категориях:

  $M \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} M' \Rightarrow M \otimes_{\mathcal{A}} N \underset{g\otimes 1}{\overset{f\otimes 1}{\rightleftarrows}} M' \otimes_{\mathcal{A}} N$, $\quad M \sim M' \Rightarrow M \otimes_{\mathcal{A}} N \sim M' \otimes_{\mathcal{A}} N$
- но НЕ инд-ет ф-р на произв. категориях: чтобы индуц-ть ф-р на произв. кат., надо чтобы $\forall M \in \mathrm{acycl}\text{-}\mathcal{A}$ $M \otimes_{\mathcal{A}} N \in \mathrm{acycl}$.

Демотивирующий пример:

$\mathcal{A}=\underline{\Bbbk[x]}$ $\quad M=(\Bbbk[x]\xrightarrow{x}\Bbbk[x]\xrightarrow{ev_0}\Bbbk)$

$N=\Bbbk$

$M\otimes_{\mathcal{A}}N=(\Bbbk\xrightarrow{0}\Bbbk\xrightarrow{\simeq}\Bbbk)$

Опр. F — <u>h-плоский</u> (гомотопически плоский), если $\forall A\in$ acycl-$\mathcal{A}$: $A\otimes_{\mathcal{A}}F$ ацикл.

($\mathcal{A}$-acycl) $(F\otimes_{\mathcal{A}}A)$

$M\in\mathcal{A}$-dgmod-$\mathcal{B}$

- h-плоскость <u>по 1-му арг.</u>:
  $\forall b$: $M(-,b)$ h-плоск.
- h-плоскость <u>по 2-му арг.</u>:
  $\forall b$: $M(b,-)$ h-плоск.
- h-плоскость <u>по обоим арг-м</u> ($\forall b,b'$. $M(b,b')$)

Упр. hflat $(\mathcal{A}^{op}\otimes\mathcal{B})\subset$ hflat $(\mathcal{A}^{op})$

$\subset$ hflat $(\mathcal{B})$

Кто дочитал до конца, тот молодец, и тому дополнительное напоминание, что лекции 22.10 (след. раз) не будет.

Далее в программе: производные тенз. пр-я.

Прим. 0) 0

1) $h^{\mathbb{Z}}$, $h_{\mathbb{Z}}$

2) $\mathcal{A}$ — h-пл. по канд. арг., но не по обоим:

$\mathcal{A}=\underline{\Bbbk[x]}$ $\leftarrow$ кат.

$\mathcal{A}=\Bbbk[x,y]/(x-y)\Bbbk[x,y]$ $\leftarrow$ d-r

Утв. hflat $(\mathcal{A})$ замк. отн.:

0) гомот. экв-ти
1) прямых сумм (в т.ч. беск.)
2) прямых слаг-х
3) сдвигов
4) тенз. произв. с вект. пр-вами
5) конусов
6) исчерпывающих почленно расщепимых фильтраций

Упр.

- $(\oplus M_i)\otimes_{\mathcal{A}}N=$ $=\oplus(M_i\otimes_{\mathcal{A}}N)$
- $(M[k])\otimes_{\mathcal{A}}N=$ $=(M\otimes_{\mathcal{A}}N)[k]$
- $(V\otimes_{\Bbbk}M)\otimes_{\mathcal{A}}N=$ $=V\otimes(M\otimes_{\mathcal{A}}N)$ (ассоц-ть $\otimes$)

След. $\forall M\in$ dgmod-$\mathcal{A}$ $\exists$ плоская рез-та $F_M\in$ hflat$(\mathcal{A})$: $\quad F_M\to M\to A_M$

Например, $\mathbb{B}(M)=F_M$.

Утв. hproj-$\mathcal{A}\subset$ hflat-$\mathcal{A}$.