29.10.13 Функторы $-\otimes-$ и $\mathrm{Hom}(-,-)$ и их производные.

Λ6

Напоминание:

- $\forall M\in dgmod\text{-}\mathcal{A}\ \exists F_M\to M$: $F_M\in hflat\text{-}\mathcal{A}$ и $\mathrm{Cone}(F_M\to M)\in acycl\text{-}\mathcal{A}$
- $-\underset{\mathcal{A}}{\otimes}-$ не инд-ет (так просто) ф-р на произв. кат.

Опр. (Левый) произв. ф-р тензорного произведения:

$$M\overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{A}}{\otimes}}N := \begin{cases} F_M\underset{\mathcal{A}}{\otimes}N \\ M\underset{\mathcal{A}}{\otimes}F_N \\ F_M\underset{\mathcal{A}}{\otimes}F_N \end{cases} \qquad \begin{matrix} M\in dgmod\text{-}\mathcal{A} \\ N\in\mathcal{A}\text{-}dgmod \end{matrix}$$

Лемма $F_M\underset{\mathcal{A}}{\otimes}N \cong F_M\underset{\mathcal{A}}{\otimes}F_N\cong M\otimes F_N$ в $\mathcal{D}(k)$

Д-во $F_N\xrightarrow{f_N}N$

$$\mathrm{Cone}\left(F_M\underset{\mathcal{A}}{\otimes}F_N\xrightarrow{1_{F_M}\otimes f_N}F_M\underset{\mathcal{A}}{\otimes}N\right)=$$

$$=\underbrace{F_M}_{h\text{-}flat}\underset{\mathcal{A}}{\otimes}\underbrace{\mathrm{Cone}(F_N\xrightarrow{f_N}N)}_{acycl}\in acycl$$

$\Rightarrow 1_{F_M}\otimes f_N$ – iso в $\mathcal{D}(k)$

Второй изом-м – аналогично.

Опр. Для $M\in dgmod\text{-}\mathcal{A}$, $K\in dgmod\text{-}\mathcal{A}^{op}\otimes\mathcal{B}$:

$$M\overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{A}}{\otimes}}K := \begin{cases} F_M\underset{\mathcal{A}}{\otimes}K \\ M\underset{\mathcal{A}}{\otimes}F_K \\ F_M\underset{\mathcal{A}}{\otimes}F_K \end{cases}$$

F_K – плоский по 1-му аргументу модуль

Пример

- $h^z\overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{A}}{\otimes}}N = h^z\underset{\mathcal{A}}{\otimes}N = N(z)$, т.к. h^z h-плоский

  такое обоснование – «физический подход»
- $M\overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{A}}{\otimes}}h_z = M\underset{\mathcal{A}}{\otimes}h_z = M(z)$
- $M\overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{A}}{\otimes}}\mathcal{A} = M\underset{\mathcal{A}}{\otimes}\mathcal{A} = M$

(Упр.: $\mathbb{B}(M)\underset{\mathcal{A}}{\otimes}\mathcal{A}=\mathbb{B}(M)$)

Явно:

$$M\overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{A}}{\otimes}}N = \mathbb{B}(M)\underset{\mathcal{A}}{\otimes}N =$$

$$=\mathrm{Tot}^{\oplus}\Big(\ldots\to\bigoplus_{x_1,x_2}M(x_2)\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x_1,x_2)\otimes h^{x_1}\otimes N\to \to\bigoplus_{x}M(x)\otimes h^x\otimes N\Big)=$$

$$=\mathrm{Tot}^{\oplus}\Big(\ldots\to\bigoplus_{x_1,x_2}M(x_2)\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x_1,x_2)\otimes N(x_1)\to \to\bigoplus_{x}M(x)\otimes N(x)\Big)$$

Лемма $-\overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{A}}{\otimes}} K$ коммутирует с любыми $\oplus$.

Д-во $M = \bigoplus_i M_i$, $M \underset{\mathcal{A}}{\otimes} N = \bigoplus_i M_i \underset{\mathcal{A}}{\otimes} N$

$-\overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{A}}{\otimes}} K = - \underset{\mathcal{A}}{\otimes} F_K$ – комм. с $\oplus$.

Замеч. $-\overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{A}}{\otimes}} K$ не комм-ет, вообще говоря, с Π.
(более-менее, из-за того, что $\bigoplus_x \prod_i \neq \prod_i \bigoplus_x$)

Например: $|\mathrm{Ob}\,\mathcal{A}| = \infty$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x,y) = \begin{cases} \Bbbk, & x=y \\ 0, & x \neq y \end{cases}$;

$M := \prod_{y \in \mathcal{A}} h^y$

Упр.: для такого M: $M \underset{\mathcal{A}}{\otimes} N = \bigoplus_{y \in \mathcal{A}} N(y)$.

"Половина разумных произв. ф-ров – это тензорное произведение".

$M, N \in \text{dgmod-}\mathcal{A} \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,N) \in \text{dgmod-}\Bbbk$.

Если $M \in \text{dgmod-}\mathcal{A}$, $N \in \text{dgmod-}\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$

$\Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,N) \in \text{dgmod-}\mathcal{B}$

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,N)(b) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N(-,b))$.

Если $M \in \text{dgmod-}\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, $N \in \text{dgmod-}\mathcal{A}$

$\Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,N) \in \text{dgmod-}\mathcal{B}^{op}$

Опр. Функтор $\mathbb{R}\mathrm{Hom}$:

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,N) := \begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P_M, N) \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, I_N) \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(P_M, I_N) \end{cases}$$

где-то в упр-ях была констр. h-inj рез-ты.

Лемма Все три изом-ны в $\mathbb{D}(\Bbbk)$ / $\mathbb{D}(\mathcal{B})$ / $\mathbb{D}(\mathcal{B}^{op})$.

$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(K, -) : \mathbb{D}(\mathcal{A}) \to \mathbb{D}(\mathcal{B})$

Примеры
- $\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(h^z, N) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(h^z, N) = N(z)$
- $\check{h}_y(x) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(y,x)^*$

(**Упр.**: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, \check{h}_y) = M(y)^*$
и это $\in$ acycl, $\check{h}_y \in$ h-inj)

$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, \check{h}_y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, \check{h}_y) = M(y)^*$

- $\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}, M) = M$ (упр.)

Утв. $\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\bigoplus_i M_i, N) = \prod_i \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M_i, N)$

$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, \prod_i N_i) = \prod_i \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N_i)$

Упр. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\prod_i M_i, N)$ и $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, \bigoplus_i N_i)$ – ничего хорошего.

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,N)=\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathbb{B}(M),N)=$$
$$=\mathrm{Tot}^{\Pi}\Big(\mathrm{Hom}\big(\bigoplus_x M(x)\otimes h^x, N\big)\to\dots\Big)=$$
$$\mathrm{Hom}\big(\bigoplus_x M(x)\otimes h^x, N\big) = \prod_x \mathrm{Hom}(M(x)\otimes h^x, N)=\prod_x \mathrm{Hom}(M(x), \underbrace{\mathrm{Hom}(h^x,N)}_{N(x)})$$
$$=\mathrm{Tot}^{\Pi}\Big(\prod_x \mathrm{Hom}(M(x),N(x))\to$$
$$\to\prod_{x_1,x_2}\mathrm{Hom}(M(x_2)\otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x_1,x_2), N(x_1))\to\dots\Big)$$

Утв. $M\in$ dgmod-$\mathcal{A}$, $K\in$ dgmod-$\mathcal{A}^{op}\otimes\mathcal{B}$,

$N\in$ dgmod-$\mathcal{B}$

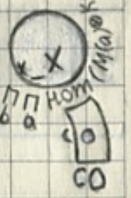
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(M\otimes_{\mathcal{A}} K, N)\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(K,N))$$

Д-во

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(M\otimes_{\mathcal{A}} K, N) = \ker\Big(\prod_b \mathrm{Hom}(M\otimes_{\mathcal{A}} K(-,b), N(b))$$
$$\downarrow$$
$$\prod_{b_1,b_2}\mathrm{Hom}(M\otimes_{\mathcal{A}} K(-,b_2)\otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(b_1,b_2), N(b_1))\Big)$$

$$\prod_b\prod_a \mathrm{Hom}(M(a)\otimes K(a,b), N(b)) \to \prod_{b_1,b_2}\prod_a \dots$$

применить опр-е $\otimes$ + "Hom из копредела равен ядру отобр-я Homов"



След.
$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(M\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{A}} K, N)\cong$$
$$\cong\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(K,N))$$

получили сопряж-ть функторов.

У Нимана есть хорошая статья про теор. Брауна о представимости.

$$H^0(\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,N))=\mathrm{Hom}_{\mathbb{D}(\mathcal{A})}(M,N)$$
$$H^i(\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,N))=\mathrm{Hom}_{\mathbb{D}(\mathcal{A})}(M,N[i])$$

След.
$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{D}\mathcal{B}}(M\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{A}} K, N)=$$
$$=\mathrm{Hom}_{\mathbb{D}\mathcal{A}}(M, \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(K,N)),$$

т.е. $-\overset{\mathbb{L}}{\otimes} K$ сопряжён слева к $\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(K,-)$

Утв. $\mathcal{T}_1 \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{T}_2$ и F сопр. слева к G.

Тогда $F(\oplus X_i)\xleftarrow{\cong}\oplus F(X_i)$ и

$G(\Pi Y_i)\xrightarrow{\cong}\Pi G(Y_i)$

Д-во
$$\mathrm{Hom}(F(\oplus X_i),Y)\cong \mathrm{Hom}(\oplus X_i, GY)\cong$$
$$\cong\Pi\,\mathrm{Hom}(X_i,GY)\cong \Pi\,\mathrm{Hom}(FX_i,Y)\cong$$
$$\cong\mathrm{Hom}(\oplus FX_i, Y)$$
$$\Rightarrow \oplus FX_i\cong F(\oplus X_i)$$

<u>Утешительная задачка</u>: $G\Pi\cdot\cong\Pi G\cdot$

Функторы ограничения и индукции.

$\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ dg-функтор

$K_F = {}_F\mathcal{B}(a,b) := \mathcal{B}(F(a),b) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(b,F(a))$

$$\left[\begin{tikzcd} \mathcal{D}(\mathcal{A}) \arrow[r, shift left, "- \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{A}}{\otimes}} {}_F\mathcal{B}"] & \mathcal{D}(\mathcal{B}) \arrow[l, shift left, "\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}({}_F\mathcal{B},-)"] \end{tikzcd}\right]$$

ЧТО ИЗ СЕБЯ ПРЕДСТАВЛЯЮТ ЭТИ ФУНКТОРЫ?

$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}({}_F\mathcal{B}, N)(a) =$ ← на представимых функторах не даёт ничего хорошего

$= \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}({}_F\mathcal{B}(a,-), N) =$

$= \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(-,F(a)), N) =$

$= \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(h^{F(a)}, N) = N(F(a))$

Т.е. его можно воспринимать как "<u>функтор ограничения</u>":

$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}({}_F\mathcal{B}, -) = \mathrm{Res}_F : \mathcal{D}(\mathcal{B}) \to \mathcal{D}(\mathcal{A})$

$N \longmapsto N \circ F$

Кажется, фраза "ничего хорошего" теперь у меня будет ассоциироваться с этой лекцией. Всем добра °O°"

$(M \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{A}}{\otimes}} {}_F\mathcal{B})(b) = M \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{A}}{\otimes}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(b, F(-))$

$\parallel$

$\mathbb{L}\mathrm{Ind}_F(M)$

Производный <u>функтор индукции</u>, или ф-р расширения скаляров.

$\mathbb{L}\mathrm{Ind}_F(h^z)(b) = h^z \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{A}}{\otimes}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(b, F(-)) =$

$= \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(b, F(z)) = h^{F(z)}(b)$

Итог: $\mathbb{L}\mathrm{Ind}_F(h^z) = h^{F(z)}$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}(\mathcal{A}) \arrow[r, shift left, "- \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{A}}{\otimes}} K"] & \mathcal{D}(\mathcal{B}) \arrow[l, shift left, "\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(K,-)"] \\ \mathrm{Perf}(\mathcal{A}) \arrow[u, phantom, "\cup"] & \mathrm{Perf}(\mathcal{B}) \arrow[u, phantom, "\cup"] \\ {[\mathcal{A}]} \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r, "- \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{A}}{\otimes}} K"] & {[\mathcal{B}]} \arrow[u, phantom, "\cup"] \end{tikzcd}$$

← если K квазипредставим

$h^a \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{A}}{\otimes}} K = K(a,-)$

<u>Опр.</u> Бимод. K наз-ся <u>квазипредставимым</u>, если $\forall a \in \mathcal{A}\ \exists b \in \mathcal{B}$: $K(a,-) \cong h^b$ в $\mathcal{D}(\mathcal{B})$.

(Ещё говорят, что K — <u>квазифунктор</u>.)

<u>Утв.</u> $(- \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{A}}{\otimes}} K)([\mathcal{A}]) \subset [\mathcal{B}] \Leftrightarrow K$ — квазипредст.

<u>Утв.</u> $(- \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{A}}{\otimes}} K)(\mathrm{Perf}\,\mathcal{A}) \subset \mathrm{Perf}\,\mathcal{B} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall a \in \mathcal{A}: K(a,-) \in \mathrm{Perf}\,\mathcal{B}$.

<u>Упр.</u> $(E_\bullet, q_{\bullet\bullet}) \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{A}}{\otimes}} K = (F_\bullet, q_{\bullet\bullet})$ (скруч. к-сы перех. в скруч. к-сы)

На заметку: выключайте будильники перед лекцией ©.

Анонс: Фактор Дринфельда