05.10.13 **Фактор Дринфельда.**

Л7

Вопрос: определение м-мов в [ ]: H^* и H^0. Есть ли разница?

$\mathcal{N} \subset \mathcal{A}$ — предтр. подкат. в предтриангл. категории

подразумевает строгую полноту

Цель — построить DG-категорию $\mathcal{A}/\mathcal{N}$, т.ч.

$$\underbrace{[\mathcal{A}/\mathcal{N}]}_{\text{Дринфельд}} \simeq \underbrace{[\mathcal{A}]/[\mathcal{N}]}_{\text{Вердье}}$$

Опр. $Ob\, \mathcal{A}/\mathcal{N} = Ob\, \mathcal{A}$

$$Hom_{\mathcal{A}/\mathcal{N}}(a,a') = Hom_{\mathcal{A}}(a,a') \oplus \Big[\bigoplus_{x\in\mathcal{N}} Hom_{\mathcal{A}}(x,a')\otimes\varepsilon_x\otimes Hom_{\mathcal{A}}(a,x)\Big] \oplus$$

$$\oplus \Big[\bigoplus_{x_1,x_2\in\mathcal{N}} Hom_{\mathcal{A}}(x_2,a')\otimes\varepsilon_{x_2}\otimes Hom_{\mathcal{A}}(x_1,x_2)\otimes\varepsilon_{x_1}\otimes Hom_{\mathcal{A}}(a,x_1)\Big]\oplus\ldots$$

ε_x — одномер. пр-во, пор. эл-том $\varepsilon_x \in Hom^{-1}(x,x)$, т.ч. $d\varepsilon_x = id_x$.

$d(f_p\otimes\varepsilon_{x_p}\otimes\ldots\otimes f_1\otimes\varepsilon_{x_1}\otimes f_0)$ = по прав. Лейбница

$(f_p\otimes\ldots\otimes f_0)\circ(g_q\otimes\ldots\otimes g_0) = f_p\otimes\ldots\otimes(f_0 g_q)\otimes\ldots\otimes g_0$

Полезно заметить, что $d(\varepsilon_x^n) = \begin{cases} 0, & n \text{ чёт.} \\ \varepsilon_x^{n-1}, & \text{иначе}\end{cases}$

Упр. Проверить, что такое опр-е корректно, т.е. что $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ — DG-категория.

Как опр-ть $Q: \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{N}$?

$Q(a) = a$, $Q: Hom_{\mathcal{A}}(a,a') \to Hom_{\mathcal{A}/\mathcal{N}}(a,a')$

$f \mapsto f$

Это DG-функтор.

Лемма

$$\begin{tikzcd} \mathcal{N} \arrow[r, hook] & \mathcal{A} \arrow[d, "F"] \\ \mathcal{N}' \arrow[r, hook] & \mathcal{A}' \end{tikzcd}$$

Пусть $F(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N}'$. Тогда $\exists \bar{F}: \mathcal{A}/\mathcal{N} \to \mathcal{A}'/\mathcal{N}'$, т.ч.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "Q"'] & \mathcal{A}' \arrow[d, "Q'"] \\ \mathcal{A}/\mathcal{N} \arrow[r, "\bar{F}"] & \mathcal{A}'/\mathcal{N}' \end{tikzcd}$$

комм.

Д-во $\bar{F}(a) := F(a)$

$\bar{F}: Hom_{\mathcal{A}/\mathcal{N}}(a,a') \to Hom_{\mathcal{A}'/\mathcal{N}'}(Fa, Fa')$

$f_p\otimes\varepsilon_{x_p}\otimes\ldots\otimes f_0 \mapsto Ff_p\otimes\varepsilon_{Fx_p}\otimes\ldots\otimes Ff_0$

Теор. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{N}$ предтр., $\mathcal{N}\subset\mathcal{A}$.

Тогда $[\mathcal{A}]/[\mathcal{N}] \simeq [\mathcal{A}/\mathcal{N}]$.

В частности, $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ предтриангл.

Д-во $[\mathcal{A}]/[\mathcal{N}] \xrightarrow{\Phi} [\mathcal{A}/\mathcal{N}]$

1) Построить Φ.
2) Пров., что Φ строго полон.
3) Пров., что Φ сущ. сюръективен.

здесь 2а,б могут быть записаны очень неаккуратно. (Кто бы объяснил :( )

1) по унив. св-ву:
$$\begin{tikzcd} {[A]} \arrow[r] \arrow[dr, "{[Q]}"'] & {[A]/[N]} \arrow[d, dashed, "\Phi"] \\ & {[A/N]} \end{tikzcd}$$

3) Сюръ. на объектах – очев.

2) а) Инъ. на м-мах

$$\begin{tikzcd} & \bar{a} \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ a \arrow[d, "\varphi"'] & & a' \\ \mathrm{Cone}\, s = x \in N & & \end{tikzcd}$$

$\bar{a} \cong (\mathrm{Cone}\,\varphi)[-1]$

$\mathrm{Hom}(\bar{a}, a') = \mathrm{Hom}(a,a') \oplus \mathrm{Hom}(x,a')[1]$ (f_0, f_1)

$(f_0, f_1 \otimes \varphi, 0, \ldots)$ $\pitchfork$

б) Сюръ. на м-мах; $\mathrm{Hom}_{A/N}(a,a') = \mathrm{Hom}_A(a,a') \oplus \bigoplus_{x \in N} \mathrm{Hom}_A(x,a') \otimes \mathrm{Hom}_A(a,x)[1] \oplus \ldots$

$f \in \mathrm{Hom}^0_{A/N}(a,a')$, $df = 0$

f есть сумма м-мов вида

$f = f_{i,p_i} \otimes \varepsilon_{x_{i,p_i}} \otimes \ldots \otimes f_{i,0}$

Лемма f можно интерпретировать как м-м из одност. скруч. к-са $(E_\cdot, q_{\cdot\cdot})$ в a', в кот. $E_1 = a$, $E_i \in N$ при $i > 1$. (Упр.) ∨

(будет обсуждаться в след. раз)

по лемме, $\exists\, (E_\cdot, q_{\cdot\cdot})$ $\exists\, \bar{f} \in \mathrm{Hom}(E, a')$, т.ч. $f = \bar{f}$

$$\begin{tikzcd} T(E', q') \arrow[r] & T(E,q) \arrow[r, "s"] \arrow[d, equal] & a \\ & \bar{a} \arrow[r, "\bar{f}"] & a' \end{tikzcd} \in \mathrm{Hom}_{[A]/[N]}(a,a')$$

$E' = (E_2, \ldots, q_{2\cdot}, \ldots)$

Что можно сказать про $D(A/N)$?

Оказывается, $D(A/N) \cong DA/DN$

Теор. $D(A) = \langle D(A/N), D(N) \rangle$

$M_N \to M \to M'$ выдел.

$M_N \in DN$, $M' \in D(A/N)$

Д-во $N \xrightarrow{I} A \xrightarrow{Q} A/N$

$DN \xrightarrow{LInd_I} DA \xleftarrow{Res_Q} D(A/N)$

План д-ва: 1) $LInd_I$ строго полон

2) Res_Q строго полон

3) $\mathrm{Hom}(DN, D(A/N)) = 0$

4) $\forall M\ \exists\ M_N \to M \to M' \in \Delta_A$

1) Факт (станд.): F сопр. к G; F строго полон $\Leftrightarrow G\circ F \cong \mathrm{id}$.

$\mathrm{Res}_I \circ \mathbb{L}\mathrm{Ind}_I \cong \mathrm{id}_{\mathbb{D}(\mathcal{N})}$?

$M \in \mathbb{D}\mathcal{N}$

$\mathbb{L}\mathrm{Ind}_I M = M \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{N}}{\otimes}} {}_I\mathcal{A}$

$\mathbb{B}_{\mathcal{N}}({}_I\mathcal{A}) = \mathrm{Tot}^{\oplus}\Big(\ldots \to \bigoplus_{x_2,x_1} h_{x_2} \otimes \mathrm{Hom}(x_2,x_1) \otimes \underset{h^{x_1}}{\underset{\parallel}{\mathcal{A}(x_1,-)}} \to$

$\to \bigoplus_{x\in\mathcal{N}} h_x \otimes \mathcal{A}(x,-)\Big)$ " $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,x) = h^x$

$\mathbb{L}\mathrm{Ind}_I M = M \underset{\mathcal{N}}{\otimes} \mathbb{B}_{\mathcal{N}}({}_I\mathcal{A}) =$

$= \mathrm{Tot}^{\oplus}\Big(\ldots \to \bigoplus_{x_2,x_1} M(x_2) \otimes \mathrm{Hom}(x_2,x_1) \otimes h^{x_1} \to$

$\to \bigoplus_{x\in\mathcal{N}} M(x) \otimes h^x\Big) = \mathbb{B}_{\mathcal{N}}(M) \cong M$

Упр. $F: \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Если F — квази[строго полон V (т.е. $H^i(\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(x,y)) \xrightarrow[\sim]{F} H^i(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Fx,Fy))$), то $\mathbb{L}\mathrm{Ind}_F : \mathbb{D}\mathcal{B} \to \mathbb{D}\mathcal{A}$ строго полон.

3) $\mathrm{Hom}(\mathbb{L}\mathrm{Ind}_I(N), \mathrm{Res}_Q(M)) = 0$?

$\forall N \in \mathbb{D}\mathcal{N}\ \forall M \in \mathbb{D}(\mathcal{A}/\mathcal{N})$ " ☆

☆ $= \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}\mathcal{N}}(N, \mathrm{Res}_I \mathrm{Res}_Q(M)) =$

$= \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}\mathcal{N}}(N, \mathrm{Res}_{Q\circ I} M) =$ $\in \mathrm{acycl}(\mathcal{N})$

V почему?

$= \mathrm{Hom}_{[\text{hproj-}\mathcal{N}]}(P_N, \mathrm{Res}_{Q\circ I} M) = 0$

Обозн. $\mathrm{acycl}_{\mathcal{N}}(\mathcal{A}) := \{M \in \mathbb{D}\mathcal{A} \mid \forall x \in \mathcal{N}: M(x) \in \mathrm{acycl}\}$

Утв. $M \in \mathrm{acycl}_{\mathcal{N}}(\mathcal{A}) \Rightarrow M \cong \mathrm{Res}_Q \mathbb{L}\mathrm{Ind}_Q M$

Д-во

$\mathbb{L}\mathrm{Ind}_Q M = M \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{A}}{\otimes}} {}_Q\mathcal{A}/\mathcal{N} =$

$= M \underset{\mathcal{A}}{\otimes} \mathrm{Tot}^{\oplus}\Big(\ldots \to \bigoplus_{x_1,x_2\in\mathcal{N}} h_{x_2} \otimes \mathrm{Hom}(x_1,x_2) \otimes h^{x_1} \to$

$\to \bigoplus_{x\in\mathcal{N}} h_x \otimes h^x \to \cancel{\ldots}\ h_-\Big) =$

$= \mathrm{Tot}^{\oplus}\Big(\ldots \to \bigoplus_{x_1,x_2\in\mathcal{N}} M(x_2) \otimes \mathrm{Hom}(x_1,x_2) \otimes h^{x_1} \to$

$\to \bigoplus_{x\in\mathcal{N}} M(x) \otimes h^x \to M\Big) = \overline{\mathbb{B}}_{\mathcal{N}}(M)$

$\mathrm{Cone}(M \to \mathrm{Res}_Q \mathbb{L}\mathrm{Ind}_Q M) = \mathbb{B}_{\mathcal{N}}(M) \in \mathrm{acycl}$

$\Rightarrow$ это iso в $\mathbb{D}$...

коединица сопр-ти

2) $\mathbb{L}\mathrm{Ind}_Q \mathrm{Res}_Q M \xrightarrow{\varepsilon_M} M \to M'$

$\underbrace{\mathrm{Res}_Q \mathbb{L}\mathrm{Ind}_Q \mathrm{Res}_Q M}_{} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Res}_Q M \to \mathrm{Res}_Q M'$

$\mathrm{Res}_Q \varepsilon_M \quad \Rightarrow \quad \to 0$

единица сопр-ти $\eta_{\mathrm{Res}_Q M} \uparrow s$

$\mathrm{Res}_Q M$ $\sim$

Анонс: оснащения на геометрических примерах.

$Res_Q M' \in acycl \Rightarrow \forall a \in A\ M'(Q(a)) \in acycl$,
но Q сюрь. на объектах $\Rightarrow M' \in acycl\text{-}A/_N$
$\Rightarrow Res_Q$ строго полный

4) $\mathbb{B}_N(M) = \coprod Ind_I Res_I M$

$\mathbb{B}_N(M) \to M \to Res_Q \coprod Ind_Q M$