12.11.13 **Фактор Дринфельда — продолжение.**

Л8

<u>Напоминание</u>

„Я вас в прошлый раз, наверное, немного запутал. Сейчас продолжу".

приятного чтения :P

Расшир. бар-рез-та:

$$\overline{\mathbb{B}}_{\mathcal N}(h^{a'}) = \mathrm{Tot}^{\oplus}\Big(\ldots \to \bigoplus_{x_1,x_2\in\mathcal N} h^{a'}(x_2)\otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal A}(x_1,x_2)\otimes h^{x_1} \to$$

$$\to \bigoplus_{x\in \mathcal N} h^{a'}(x)\otimes h^{x} \to h^{a'}\Big)$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal A/\mathcal N}(a,a') = \overline{\mathbb B}_{\mathcal N}(h^{a'})(a) =$$

$$= \mathrm{Hom}_{\text{dgmod-}\mathcal A}(h^{a}, \overline{\mathbb B}_{\mathcal N}(h^{a'}))$$

<u>Проверим:</u>

⓪ $\mathcal N \xrightarrow{I} \mathcal A \xrightarrow{Q} \mathcal A/\mathcal N$

$Q(I(x))$ стягиваемый

① $D\mathcal A = \langle \underset{\mathrm{Res}_Q}{D(\mathcal A/\mathcal N)}, \underset{\mathbb{L}\mathrm{Ind}_I}{D\mathcal N}\rangle$

② $\mathcal A \xrightarrow{F} \mathcal A'$, $\mathcal A \supset \mathcal N$, $\mathcal A' \supset \mathcal N'$, $F(\mathcal N)\subset \mathcal N'$ $\Rightarrow \exists \overline F$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal A/\mathcal N & \xrightarrow{\overline F} & \mathcal A'/\mathcal N' \\ Q\uparrow & & \uparrow Q' \\ \mathcal A & \xrightarrow{F} & \mathcal A' \end{array}$$

и единств. в том смысле, что если $\overline F'$ — др. такой, то $[\overline F] = [\overline F']$ равны.

<u>Утв.</u> Пусть $F: \mathcal A \to \mathcal B$, т.ч. $\forall x\in\mathcal N$ $F(x)$ стяг. ($\mathcal A \supset \mathcal N$)

Тогда $\exists!\, \overline F: \mathcal A/\mathcal N \to \mathcal B$, т.ч. — в том же смысле, что и в ②

$$\begin{array}{ccc} \mathcal A & \xrightarrow{Q} & \mathcal A/\mathcal N \\ & F\searrow & \swarrow \overline F \\ & \mathcal B & \end{array}$$ комм.

<u>Д-во</u> $\overline F(a) = F(a)$

$\overline F$ однозн. опр-ся значениями

$\overline F(\varepsilon_x) \in \mathrm{Hom}^{-1}_{\mathcal B}(F(x), F(x))$

$\parallel$

β_x, $d\beta_x = d(\overline F(\varepsilon_x)) = \overline F(d\varepsilon_x) = \overline F(1_x) = 1_{Fx}$

Из стяг-ти $F(x) \Rightarrow$ такие β_x сущ-ют.

$\overline F'(\varepsilon_x) =: \beta'_x$

$d(\beta_x\beta'_x) = d(\beta_x)\beta'_x - \beta_x d(\beta'_x) =$

$= \beta'_x - \beta_x \Rightarrow$ они совп. в $[\mathcal B]$.

...

③ Если $\mathcal A$ и $\mathcal N$ предтриаг., то

$Q: [\mathcal A]/[\mathcal N] \xrightarrow{\sim} [\mathcal A/\mathcal N]$

$$\mathrm{Hom}_{[\mathcal{A}/\mathcal{N}]}(a,a') = H^0(\mathrm{Hom}_{\text{dgmod-}\mathcal{A}}(h^a, \overline{\mathbb{B}}_{\mathcal{N}}(h^{a'}))) =$$

$$= \mathrm{Hom}_{[\text{dgmod-}\mathcal{A}]}(h^a, \overline{\mathbb{B}}_{\mathcal{N}}(h^{a'}))$$

$$\begin{array}{ccc} a & & a' \\ & f\searrow \quad \swarrow s & \\ & \overline{a}' & \end{array}$$

$x \xrightarrow{\varphi} a' \to \overline{a}'$ $\quad \overline{a}' \cong \mathrm{Cone}(x \to a')$

$h^{\overline{a}'} \cong \mathrm{Cone}(h^x \to h^{a'})$

$f \in \mathrm{Hom}(h^a, h^{\overline{a}'}) =$

$= \mathrm{Hom}(h^a, h^x[1]) \oplus \mathrm{Hom}(h^a, h^{a'}) =$

$= \mathrm{Hom}(a, x)[-1] \oplus \mathrm{Hom}(a, a')$

$\qquad\quad \Psi \qquad\qquad\qquad \Psi$

$\qquad\quad f_1 \qquad\qquad\qquad f_0$

$d(f_0 \oplus \varphi \otimes f_1) = 0$

$h^{a'}(x) = \mathrm{Hom}(x, a') \ni \varphi$

$\mathrm{Cone}(h^x \to h^{a'}) \hookrightarrow \overline{\mathbb{B}}_{\mathcal{N}}(h^{a'})$

<u>Утв.</u> $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}, \mathcal{B};\ \mathcal{N} \otimes \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$

$\Rightarrow [(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) / (\mathcal{N} \otimes \mathcal{B})]_{①} \cong [(\mathcal{A}/\mathcal{N}) \otimes \mathcal{B}]_{②}$

<u>Д-во</u> Объекты совпадают.

$\mathrm{Hom}_{①}((a,b), (a',b')) =$

$= \bigoplus_{p=0}^{\infty} \bigoplus_{\substack{x_1,\dots,x_p \in \mathcal{N} \\ b_1,\dots,b_p \in \mathcal{B}}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x_p, a') \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(b_p, b') \otimes \dots$

$\dots \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a, x_1) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(b, b_1)[p]$

$\uparrow \ \downarrow$

$\mathrm{Hom}_{②}((a,b), (a',b')) =$

$= \left[\bigoplus_{p=0}^{\infty} \bigoplus_{x_1,\dots,x_p \in \mathcal{N}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(x_p, a') \otimes \dots \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a, x_1)[p] \right] \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(b, b')$

$(\uparrow)$ $(f_p \otimes \dots \otimes f_0) \otimes g \mapsto (f_p \otimes 1_{b'}) \otimes \dots \otimes (f_1 \otimes 1_{b'}) \otimes (f_0 \otimes g)$

$(\downarrow)$ $(f_p \otimes g_p) \otimes \dots \otimes (f_0 \otimes g_0) \mapsto \pm f_p \otimes \dots \otimes f_0 \otimes (g_p \cdots g_1 g_0)$

<u>Упр.</u> (i) это отобр. к-сов: согл. с d и с умн-ем
(ii) проверить композиции $\uparrow\downarrow$ и $\downarrow\uparrow$

$\rightsquigarrow$ это quiso

$\uparrow\downarrow = \mathrm{id}$ очев.

Для ↻ построить цепочку гомотопий.

обыч. т. пр. тенз пр-е с E

$$(f_p\otimes g_p)\otimes\ldots\otimes(f_0\otimes g_0)$$

$$\downarrow h_i$$

$$\ldots\otimes(f_i\otimes 1)\otimes(1\otimes g_i)\otimes(f_{i-1}\otimes g_{i-1})\otimes\ldots$$

$$dh_i+h_id=?$$

Утв. $\mathcal{N}\subset\mathcal{A}$; $\mathcal{N}^{op}\subset\mathcal{A}^{op}$

$$\Rightarrow \mathcal{A}^{op}/\mathcal{N}^{op}=(\mathcal{A}/\mathcal{N})^{op}$$

"В общем, видно." И правда.

$$K\in D(\mathcal{A}^{op}\otimes\mathcal{B})\Rightarrow -\overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{A}}{\otimes}}K:\quad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, mapsto] & h^a \arrow[r, mapsto] & K(a,-) \\
& D(\mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[u, phantom, "\cap"] & D(\mathcal{B}) \\
& \cup & \cup \\
a\in[\mathcal{A}] & & [\mathcal{B}]
\end{tikzcd}$$

$T(\mathcal{A},\mathcal{B})\subset D(\mathcal{A}^{op}\otimes\mathcal{B})$

полная подкатегория квазипредст. бимодулей — см. Λ_6

$$T(\mathcal{A}/\mathcal{N},\mathcal{B})\subset D((\mathcal{A}/\mathcal{N})^{op}\otimes\mathcal{B})=D\left({}^{(\mathcal{A}^{op}\otimes\mathcal{B})}/_{(\mathcal{N}^{op}\otimes\mathcal{B})}\right)$$

$$D(\mathcal{A}^{op}\otimes\mathcal{B})=\left\langle D\left({}^{(\mathcal{A}^{op}\otimes\mathcal{B})}/_{(\mathcal{N}^{op}\otimes\mathcal{B})}\right),\ D(\mathcal{N}^{op}\otimes\mathcal{B})\right\rangle$$

$$\begin{tikzcd}
D((\mathcal{A}/\mathcal{N})^{op}\otimes\mathcal{B}) \arrow[d, equal] & \supset T(\mathcal{A}/\mathcal{N},\mathcal{B}) \arrow[dd, dashed] \\
D\left({}^{(\mathcal{A}^{op}\otimes\mathcal{B})}/_{(\mathcal{N}^{op}\otimes\mathcal{B})}\right) \arrow[d, "Res_Q"] & \\
D(\mathcal{A}^{op}\otimes\mathcal{B}) \arrow[d, "Res_I"] & \supset T(\mathcal{A},\mathcal{B}) \arrow[d, dashed] \\
D(\mathcal{N}^{op}\otimes\mathcal{B}) & \supset T(\mathcal{N},\mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

Теор. $\mathcal{A}_1\xrightarrow{F}\mathcal{A}_2$, $Res_F: D(\mathcal{A}_2^{op}\otimes\mathcal{B})\to D(\mathcal{A}_1^{op}\otimes\mathcal{B})$

1) Res_F сохр-ет квазипредставимость.

2) Если F гомотопически сущ. сюръ., то

$Res_F(K)$ квазипр. $\Leftrightarrow$ K квазипр.

3) $T(\mathcal{A}/\mathcal{N},\mathcal{B})\xhookrightarrow{\text{стр.п.}}T(\mathcal{A},\mathcal{B})$

$$\parallel$$

$$\{K \mid Res_I(K)\cong 0 \text{ в } T(\mathcal{N},\mathcal{B})\}$$

Д-во 1) $K\in T(\mathcal{A}_2,\mathcal{B})$

$Res_F\, K(a_1,-)=K(Fa_1,-)=h^b$

2) аналогично

3) строгая полнота проверялась в прош. раз; рав-во тоже понятно.

То, что мы сейчас проверили – ещё одно унив. св-во для фактора Дринфельда.

$$K\in T(\mathcal{A},\mathcal{B}) \rightsquigarrow [\mathcal{A}] \xrightarrow{-\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{A}} K} [\mathcal{B}]$$

$$-\overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}_F = [F]$$

$$\begin{tikzcd}
{[\mathcal{N}]} \arrow[d, "I"'] \arrow[dr] & \\
{[\mathcal{A}]} \arrow[r] \arrow[d, "Q"'] & {[\mathcal{B}]} \\
{[\mathcal{A}/\mathcal{N}]} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$T(\underline{k},\mathcal{A}) = [\mathcal{A}]$$

Опр. $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ квазиэквивалентность, если

1) $F: H^i Hom_{\mathcal{A}}(a,a') \xrightarrow{\sim} H^i Hom_{\mathcal{B}}(Fa,Fa')$

2) $[F]:[\mathcal{A}]\to[\mathcal{B}]$ сущ. сюр.

Это некоторое усиление понятия функтора, индуцирующего экв-ть гомот. категорий.

Упр. F – квазиэкв. $\Rightarrow \mathbb{L}Ind_F: D\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} D\mathcal{B}$

Примеры оснащённых триангулированных категорий.

$$\mathcal{A} \rightsquigarrow D(\mathcal{A}), \qquad \mathcal{A} \rightsquigarrow Perf(\mathcal{A}) = D(\mathcal{A})^c$$

Пример A – алгебра

$$D(Mod\text{-}A) = Com(Mod\text{-}A)[Qis^{-1}] = Hot(Mod\text{-}A)/Acycl(Mod\text{-}A)$$

$$\mathcal{A} = \underline{A} \rightsquigarrow D(\underline{A}) \cong D(A)$$

$$D(A)^c = D(\underline{A})^c = Perf(\underline{A}) =$$

= прямые слагаемые в кон. к-сах к.п. своб. A-модулей

$$D(\underline{A}) = D(A) = [hproj\text{-}\underline{A}] = [hinj\text{-}\underline{A}]$$

Пример X – схема, отделимая, кон. типа

$$D(QCoh(X)) = Com(QCoh(X))[Qis^{-1}] = Hot(QCoh(X))/Acycl$$

$com(X) := com(QCoh(X))$ как DG категория

$$(RHom(F^\bullet,G^\bullet))^k = \prod_i Hom(F^i, G^{i+k})$$

$[\mathrm{com}(X)] = \mathrm{Hot}(\mathrm{QCoh}(X))$

$\mathrm{acycl}(X) \subset \mathrm{com}(X)$

$\rightsquigarrow \mathrm{Hot}(\mathrm{QCoh}(X))/\mathrm{Acycl} = [\mathrm{com}(X)]/[\mathrm{acycl}(X)]$

<u>Опр.</u> $F \in \mathrm{com}(X)$ <u>h-проективен</u>, если $\forall A \in \mathrm{acycl}(X)$ $R\mathrm{Hom}(F, A)$ ацикл.;

<u>h-инъективен</u>, — " — $R\mathrm{Hom}(A, F)$ ацикл.

$[\mathrm{hproj}(X)] = [\mathrm{acycl}(X)]^{\perp}$

$[\mathrm{hinj}(X)] = {}^{\perp}[\mathrm{acycl}(X)]$

<u>Теор.</u> (Спальтенштейн)

h-инъект. комплексов достаточно много, т.е. $\forall F \in \mathrm{com}(X)$ $\exists F \to I_F$ с $I_F \in \mathrm{hinj}(X)$ и $\mathrm{Cone}(F \to I_F) \in \mathrm{acycl}(X)$.

В частности, $\mathbb{D}(X) \cong [\mathrm{hinj}(X)]$.

Получили оснащение. Оно не функториально отн. обратных образов, но иногда бывает полезно.

Экзамен: устный 17.12.

Анонс: другие оснащения $\mathbb{D}X$

$X \xrightarrow{f} Y$

$\mathbb{D}(X) \underset{Lf^*}{\overset{Rf_*}{\rightleftarrows}} \mathbb{D}(Y)$

$F, G \in \mathbb{D}(X)$

если это лок. св. пучки, $\mathrm{rk} F < \infty$

$$\mathrm{Ext}^i(F, G) = \mathrm{Hom}(F, G[i]) = H^i(F^* \otimes G)$$