19.11.13 Оснащения $\mathcal{D}(X)$.

Л9

h-инъективное оснащение.

Опр. Комплекс $I^\bullet \in com(Qcoh(X))$ – **h-инъективный**, если $\forall A^\bullet \in acycl(X)$: $Hom^\bullet(A^\bullet, I^\bullet) \in acycl(\Bbbk)$.

$Hom^k(A^\bullet, I^\bullet) = \prod_i Hom(A^i, I^{i+k})$

Утв. 0) I – инъективный пучок $\Rightarrow I \in hinj(X)$.

1) $hinj(X)$ замк. отн. Π.

2) $hinj(X)$ замк. отн. взятия прямых слаг-х.

3) $hinj(X)$ замк. отн. сдвигов.

4) $hinj(X)$ замк. отн. конусов.

5) Пусть дана обратная система $\ldots \to I_1 \to I_0 \to 0$, т.ч. $I_k \xrightarrow{\pi_k} I_{k-1}$, $Ker\, \pi_k \in hinj(X)$ и она почленно расщепима, т.е. $\exists s_{k-1}$: $I_{k-1} \to I_k$ и $\pi_k \circ s_{k-1} = id_{I_{k-1}}$.
Тогда $I = \varprojlim I_k \in hinj(X)$.

Д-во 5 $I \to \prod I_k \underset{s}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} \prod I_k$ holim?

$\pi(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (\pi_1 x_1 - x_0, \pi_2 x_2 - x_1, \ldots)$

$s(y_0, y_1, y_2, \ldots) = (0, s_0 y_0, s_1 s_0 y_0 + s_1 y_1, s_2 s_1 s_0 y_0 + s_2 s_1 y_1 + s_2 y_2, \ldots)$

1) по индукции получим: $I_k \in hinj(X)$

2) $\prod I_k \in hinj(X)$

3) $I \in hinj(X)$

Лемма $\forall F \in com(Qcoh(X))\ \exists F \xrightarrow{qis} I^\bullet$, т.ч. $I^\bullet \in hinj(X)$

Д-во 1) Если $I^k = 0$ при $k \ll 0$ и все I^k инъ., то $I^\bullet \in hinj(X)$; $I^\bullet = \varprojlim I^{\le n}$ (hinj в силу св-ва 5). $\ldots \to I^{\le n} \to I^{\le n-1} \to \ldots$

"σ – видимо, от греческого слова σtupid"

"глупое обрезание" комплекса $C^\bullet$

$C^\bullet \to \sigma^{\le k}(C^\bullet) = (\ldots \to C^{k-1} \to C^k \to 0 \to \ldots)$

$C^\bullet \leftarrow \sigma^{\ge k}(C^\bullet) = (\ldots \to 0 \to C^k \to C^{k+1} \to \ldots)$

"каноническое обрезание"

$C^\bullet \leftarrow \tau^{\le k}(C^\bullet) = (\ldots \to C^k \to Im\, d^k \to 0 \to \ldots)$

$C^\bullet \to \tau^{\ge k}(C^\bullet) = (\ldots \to 0 \to Im\, d^{k-1} \to C^k \to \ldots)$

σ не явл-ся ф-ром на произв. кат., а τ – явл-ся.

2) Пусть $F^\bullet \in com(Qcoh(X))$.
Определим $I^0 = I(\tau^{\ge 0} F)$
$I^k =$ спец. $I(\tau^{\ge -k} F)$

$$\begin{tikzcd} Ker \arrow[r] & \tau^{\ge -k-1}F \arrow[r] \arrow[d] & \tau^{\ge -k}F \arrow[d] \\ & I^{k+1} \arrow[r, dashed] & I^k \end{tikzcd}$$

След. $[\mathrm{com}(\mathrm{Qcoh}(X))] = \langle [\mathrm{hinj}(X)], [\mathrm{acycl}(X)] \rangle$
полуорт. разл-е

В частности, $\mathcal{D}(X) = [\mathrm{hinj}(X)]$.

Тем самым, $\mathrm{hinj}(X)$ яв-ся оснащением для $\mathcal{D}(X)$.

Это оснащение "не очень хорошее", т.к. $\mathrm{hinj}(X)$ не малая (в ней есть $\forall\ \Pi$).

А хочется, чтобы нашлась такая малая dg-категория $\mathcal{A}$, т.ч. $\mathcal{D}(X) \cong \mathcal{D}(\mathcal{A})$.

$\mathcal{D}(\mathcal{A})^c = \mathrm{Perf}(\mathcal{A})$, а если $\mathcal{A}$ ещё и предтриангулир. и замкн. отн. пр. слаг., то $\mathcal{D}(\mathcal{A})^c = [\mathcal{A}]$.

$\mathcal{D}(X)^c = \mathcal{D}^{perf}(X)$

Опр. $F \in \mathcal{D}^{perf}(X) \overset{ob}{\subset} \mathrm{com}(\mathrm{Qcoh}(X))$ — <u>совершенный комплекс</u> — локально квазиизом. огр-ному к-су (лок.) своб-ных пучков конеч. ранга, т.е. $\forall x \in X\ \exists U \overset{\ni x}{\subset} X$ и $\ldots \to 0 \to E^m \to E^{m+1} \to \ldots \to E^{n-1} \to E^n \to 0 \to \ldots$, $E^i \in VB(U)$ и $E^\bullet \underset{qiso}{\cong} F|_U$

$\underset{\text{малая}}{\mathcal{S}} \subset \mathcal{D}^{perf}(X) \subset \mathcal{D}(X)$

$[\mathcal{A}] = \mathcal{S}$

$\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mathcal{S} \subset \mathrm{hinj}(X) \leftarrow$ выбор hinj резольвенты для объектов

Утв. Если $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}(X)^c$ и пор-ет $\mathcal{D}(X)$ (т.е. $\mathcal{S}^\perp = 0$), то $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\mathcal{S}) \cong \mathcal{D}(X)$.

Д-во Построим ф-р $\Phi: \mathrm{com}(\mathrm{Qcoh}(X))^{op} \to \mathrm{dgmod}(\mathcal{A}_\mathcal{S}^{op})$
"$\mathcal{A}_\mathcal{S}$-dgmod"

$F^\bullet \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{com}(X)}(F^\bullet, -)$ ← в честь $\mathrm{com}(\mathrm{Qcoh}(X))$

1) $\Phi(\mathrm{acycl}(X)) \subset \mathrm{acycl}(\mathcal{A}_\mathcal{S}^{op})$

$\Rightarrow \Phi$ инд-ет ф-р на $\mathcal{D}(X)^{op} \to \mathcal{D}(\mathcal{A}_\mathcal{S}^{op})$

2) $s \in \mathcal{S} \rightsquigarrow \underline{s} \in \mathcal{A}_\mathcal{S}$

$\Phi(s) = \mathrm{Hom}(\underline{s}, -) = h_{\underline{s}}(-) \Rightarrow \Phi(\mathcal{S}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})^c$

$\Rightarrow \mathrm{Hom}(\Phi(s), \Phi(s')) = \mathrm{Hom}(h_{\underline{s}}, h_{\underline{s}'}) = \mathrm{Hom}(\underline{s}, \underline{s}')$

$\Rightarrow \Phi$ строго полон на $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}(X)$

3) Φ комм-ет с $\oplus$ (это заявление нужно понимать творчески)

$\Phi(\oplus F_\alpha) = \mathrm{Hom}(\oplus F_\alpha, -) = \prod \mathrm{Hom}(F_\alpha, -) =$
$= \prod \Phi(F_\alpha)$

4) Проверим, что Φ строго полон на $\mathbb{D}(X)$.

• зададим $\mathcal{T}_2 \subset \mathbb{D}(X)$,

$\mathcal{T}_2 := \{G \in \mathbb{D}(X) \mid \forall F \in \mathcal{S}: \mathrm{Hom}(F,G) \xrightarrow{\Phi}$

$\xrightarrow{\Phi} \mathrm{Hom}(\Phi F, \Phi G)$ iso$\}$

Наблюдения: $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}_2$; $\mathcal{T}_2$ трианг. (по лемме о 5-ти гом-мах); $\mathcal{T}_2$ замк. отн. $\oplus$ (в силу компактности F).

в записках 5-й лекции в формулировке теор. Нимана есть "опечатка": из указанных условий следует, конечно же, что $\mathcal{T} = \langle S \rangle^\oplus$.

• по теор. Нимана (см. Λ_5), $\mathcal{T}_2 = \mathbb{D}(X)$ ($\Leftarrow \langle \mathcal{S} \rangle^\oplus = \mathbb{D}(X)^c$).

• $\mathcal{T}_1 = \{F \in \mathbb{D}(X) \mid \forall G \in \mathbb{D}(X): \mathrm{Hom}(F,G) \xrightarrow{\Phi}$

$\xrightarrow{\Phi} \mathrm{Hom}(\Phi F, \Phi G)$ iso$\}$

Набл.: $\mathcal{T}_1 \supset \mathcal{S}$; $\mathcal{T}_1$ трианг.; $\mathcal{T}_1$ замк. отн. $\oplus$

по т. Нимана, $\mathcal{T}_1 = \mathbb{D}(X)$.

Значит, Φ строго полон.

Вообще говоря, образ ф-ра не явл-ся трианг. подкат., но образ строго полного ф-ра — явл-ся (комм-ет с конусами).

Заметим, что $\mathrm{Im}\,\Phi \supset \{h_S\}$

$\mathrm{Im}\,\Phi$ трианг.

$\mathrm{Im}\,\Phi$ замк. отн. $\oplus$

по т. Нимана, $\mathrm{Im}\,\Phi = \mathbb{D}(A_S)$

(т.к. $\{h_S\}$ — мн-во комп. обр-щих).

Замеч. Есть несколько естеств. способов выбрать $\mathcal{S}$.

1) $\mathcal{S} \cong \mathbb{D}^{perf}(X)$
(точнее, скелет её)

2) другой хороший выбор:

Теор. (Бондал, Ван ден Берг)
дост. хорошая
$\exists G \in \mathbb{D}^{perf}(X): \{G\}^\perp = 0$

Если $\mathcal{S} = \{G\}$, то $A_S = \underline{\mathrm{Hom}(IG, IG)} = A_G$ алгебра эндом-в инъ. рез-т

$\Rightarrow \mathbb{D}(X) \cong \mathbb{D}(\underline{A_G})$

("все достаточно хорошие схемы производно аффинны")

"Д-во" Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$, $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)|_X$ очень обильно.

$\dim X =: n$

$G := \mathcal{O}_X \oplus L \oplus L^2 \oplus \ldots \oplus L^n$

$G^{\perp} = \mathcal{O}_X^{\perp} \cap L^{\perp} \cap \ldots \cap L^{n\perp} \subset L^{i\perp}$
$\forall i \in \mathbb{Z}$

$\mathbb{P}^{N-n-1} \subset \mathbb{P}^N$, $\mathbb{P}^{N-n-1} \cap X = \emptyset$
общее

Рез-та Кошуля для $\mathbb{P}^{N-n-1}$:

$$0 \to \mathcal{O}(-n-1) \to \ldots \to \mathcal{O}(-2)^{\binom{n+1}{2}} \to \mathcal{O}(-1)^{n+1} \to \mathcal{O} \to \mathcal{O} \to 0$$

$$0 \to L^{-n-1} \to \ldots \to (L^{-2})^{\binom{n+1}{2}} \to (L^{-1})^{n+1} \to \mathcal{O}_X \to 0$$

"подкрутить" на степень L ⇒
(L^{-n-i} выр-ся через млад. степени)
L^{-i} выр-ся через млад. степени L^{-1}

Далее — если к-с пучков ортогонален всем степеням об. обильного, то он 0.
⇒ $\{G\}$ порождает $\mathcal{D}(X)$.

Такие оснащения не очень хорошие, т.к. они не функториальны.
Мы хотим, чтобы производный ф-р обратного образа "вёл себя хорошо" на DG уровне.

Опр. $F^\bullet \in com(X)$ h-плоский, если $\forall A^\bullet \in acycl(X)$: $F^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_X} A^\bullet \in acycl(X)$.
сворачиваем отн. $\oplus$

Утв. $hflat(X)$ замк. отн.:
1) $\oplus$;
2) взятия прямых слаг.;
3) сдвигов;
4) конусов;
5) почл. расщепимой исчерп. фильтраций с $hflat$ присоед. факторами.

$$\oplus F_k \to \oplus F_k \to \varinjlim F_k$$

(Рассуждения аналогичные.)

Хорошо бы у любого пучка найти h-плоскую накрывающую.
Если X квазипроективна, то $\mathcal{O}_X^{\oplus\ldots} \twoheadrightarrow F$
Если X не обяз. кв.пр.:
X кон. типа ⇒ $X = \cup U_\alpha$, $j_\alpha : U_\alpha \hookrightarrow X$
У любого пучка тогда есть рез-та Чеха: $0 \to \mathcal{F} \to \bigoplus_\alpha j_{\alpha *} j_\alpha^* \mathcal{F} \to \bigoplus_{\alpha<\beta} j_{\alpha\beta *} j_{\alpha\beta}^* \mathcal{F} \to \ldots$

(пусть $j : U \overset{\text{афф}}{\hookrightarrow} X$ откр. влож., тогда
$j_*(hflat(U)) \subset hflat(X)$
$j_* F \otimes_{\mathcal{O}_X} A^\bullet = j_*(F \otimes_{\mathcal{O}_U} j^* A^\bullet) \in acycl$, т.к.
j_* и j^* точн. и $F \in hflat(U)$)

Утв. $\forall G \in \mathrm{com}(X)\ \exists F \xrightarrow[qis]{\sim} G$ т.ч. $F \in \mathrm{hflat}(X)$.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{hflat}(X) & \subset & \mathrm{com}(X) \\ \cup & & \cup \\ \mathrm{hflatacycl}(X) & \subset & \mathrm{acycl}(X) \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{ccc} [\mathrm{hflat}(X)] & \subset & \mathrm{com}(X) \\ \cup & & \cup \\ [\mathrm{hflatacycl}(X)] & \subset & \mathrm{acycl}(X) \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{[\mathrm{hflat}(X)]}{[\mathrm{hflatacycl}(X)]} \underset{\cong}{\subseteq} \frac{[\mathrm{com}(X)]}{[\mathrm{acycl}(X)]} = \mathcal{D}(X)$$

← т.к. вложение существенно сюръ., что следует из утв.

$$\cong$$

$$\underbrace{\left[\frac{\mathrm{hflat}(X)}{\mathrm{hflatacycl}(X)}\right]}_{=\ \mathcal{A}_{\mathfrak{s}}} \qquad \mathfrak{s} \subset \mathcal{D}(X)^c$$

$\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathfrak{s}}) \xleftarrow{\Phi} \mathcal{D}(X)$ (двойственное)

$\mathrm{Hom}(-, M^\bullet) \leftrightarrow M^\bullet$

Теперь-то оснащение согласовано с функторами.

Лемма 1) $F_1, F_2 \in \mathrm{hflat}(X) \Rightarrow F_1 \otimes F_2 \in \mathrm{hflat}(X)$

2) $X \xrightarrow{f} Y$, $F \in \mathrm{hflat}(Y) \Rightarrow f^*F \in \mathrm{hflat}(X)$

Д-во 1) $(F_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} F_2) \otimes_{\mathcal{O}_X} A = F_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \overbrace{(F_2 \otimes_{\mathcal{O}_X} \underbrace{A}_{acycl})}^{acycl}$

3) $F \in \mathrm{hflatacycl}(X) \Rightarrow \forall G$ $F \otimes G \in \mathrm{acycl}(X)$

2) $f^*F = f^{-1}F \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$ ← опред-е когерентного обратного образа

$$f^*F \otimes_{\mathcal{O}_X} A = (f^{-1}F \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} A =$$

$$= f^{-1}F \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} (\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} A)$$

$$\begin{array}{ccc} f^*: \mathrm{hflat}(Y) & \to & \mathrm{hflat}(X) \\ \cup & & \cup \\ f^*: \mathrm{hflatacycl}(Y) & \to & \mathrm{hflatacycl}(X) \end{array}$$

⇒ обратный образ индуц-ет ф-р на факторах Дринфельда:

$$f^*: \frac{\mathrm{hflat}(Y)}{\mathrm{hflatacycl}(Y)} \to \underbrace{\frac{\mathrm{hflat}(X)}{\mathrm{hflatacycl}(X)}}_{\mathcal{A}_{\mathfrak{s}_X}}$$

Хотим выбрать такие $\mathfrak{s}_X \cong \mathcal{D}(X)^c$ для всех X кон. типа, одновременно, чтобы $\mathcal{A}_{\mathfrak{s}_X}$ были соглас. с обрат. образом.

(Выберем вначале от балды $\mathring{\mathcal{S}}_X \cong \mathbb{D}(X)$,
а потом: $\mathcal{S}_X := \bigcup\limits_{\substack{Y,f \\ \{f: X\to Y\}}} f^*\mathcal{S}_Y$)

Тогда $f^*(\mathcal{S}_Y) \subset \mathcal{S}_X$.

<u>Утв.</u> Есть такая комм. диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}(\mathcal{A}_Y) \arrow[r, "\mathbb{L}\mathrm{Ind}_{f^*}"] & \mathbb{D}(\mathcal{A}_X) \\
\mathbb{D}(Y) \arrow[u, "\wr", "\Phi_Y"'] \arrow[r, "\mathbb{L}f^*"] & \mathbb{D}(X) \arrow[u, "\wr", "\Phi_X"']
\end{tikzcd}$$

<u>Д-во</u> Естест. пр-е $\mathbb{L}\mathrm{Ind}_{f^*}\circ\Phi_Y \xrightarrow{f^*} \Phi_X\circ\mathbb{L}f^*$

$$\Phi_Y \xrightarrow{f^*} \mathrm{Res}_{f^*}\circ\Phi_X\circ\mathbb{L}f^*$$

$\Phi_Y: M^\cdot \mapsto \mathrm{Hom}(-, M^\cdot) \xrightarrow{f^*}$

$\mathrm{Res}_{f^*}\circ\Phi_X\circ\mathbb{L}f^*: M^\cdot \mapsto \mathrm{Hom}(f^*(-), f^*M^\cdot)$

проверим, что этот м-м ф-ров явл-ся изоморфизмом. На $F\in\mathcal{S}_Y$:

$$F \xmapsto{\Phi_Y} \mathrm{Hom}(-,F) = h^F \xmapsto{\mathbb{L}\mathrm{Ind}_{f^*}} h^{f^*F}$$

Экзамен: всё-таки 10.12.

Анонс: быть может, будет оснащение Чеха.

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, mapsto, "\mathbb{L}f^*"] & f^*F \arrow[r, mapsto, "\Phi_X"] \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] & h^{f^*F} \\
& \mathcal{S}_X &
\end{tikzcd}$$

Итак, f^* – iso на $\mathcal{S}_Y$.

$\mathcal{T} := \{F \mid f^* - \mathrm{iso}\}$

ещё одно наблюдение: т. Нимана использовалась 7 раз за лекцию

Набл.: $\mathcal{S}_Y \subset \mathcal{T}$, $\mathcal{T}$ триангл., замкн. отн. $\oplus$

$\Rightarrow$ (по теор. Нимана) $\mathcal{T} = \mathbb{D}(Y)$

а также $\mathbb{R}f_* \cong \mathrm{Res}_{f^*}$

<u>Упр.</u> Проверить, что эти оснащения согласованы с $\otimes$.