Задачи по курсу "DG-категории и триангулированные категории"

**Задача 1.** Пусть $C$ — гладкая проективная кривая над полем $\mathbb{C}$. Положим $\mathcal{T} := D^b_{coh}(C)/\langle \mathcal{O}_C \rangle$, где $\langle \mathcal{O}_C \rangle$ — триангулированная подкатегория, порожденная объектом $\mathcal{O}_C$.

а) Проверьте, что $\mathcal{T}$ карубиево замкнута и порождена объектом $\mathcal{O}_p$, где $p \in C$ - произвольная замкнутая точка. Докажите, что $\mathrm{Hom}^i_{\mathcal{T}}(\mathcal{O}_p, \mathcal{O}_p) = 0$ при $i \neq 0$. В частности, имеем эквивалентность категорий $\mathcal{T} \cong D_{perf}(A_p)$, где $A_p := \mathrm{Hom}^0_{\mathcal{T}}(\mathcal{O}_p, \mathcal{O}_p)$ — ассоциативная алгебра.

б) Покажите, что гомологическая размерность абелевой категории $\mathrm{Mod}\text{-}A_p$ равна 1, если род $C$ положителен. Покажите, что если $C = \mathbb{P}^1$, то $A_p = \mathbb{C}$.

**Задача 2.** Пусть Q - обобщенный колчан Кронекера с $m$ стрелками, $\mathrm{Rep}(Q)$ — категория конечномерных комплексных представлений $Q$. Пусть $P_1, P_2$ - неразложимые проективные объекты $\mathrm{Rep}(Q)$, так что $\mathrm{Hom}(P_1, P_2) = \mathbb{C}^m$. Возьмем представление $E \in \mathrm{Rep}(Q)$, имеющее резольвенту

$$0 \to P_1^k \to P_2 \to E \to 0,$$

где $0 \leq k \leq m$. Покажите, что фактор-категория $D^b(\mathrm{Rep}(Q))/\langle E \rangle$ эквивалентна категории $D_{perf}(B)$, где $B$ — свободная $\mathbb{C}$-алгебра с $k(n-k)$ образующими.

**Задача 3.** Обозначим через $\mathrm{dgcat}_k$ категорию малых DG категорий над коммутативным кольцом $k$.

а) Покажите, что в $\mathrm{dgcat}_k$ существуют малые пределы и копределы.

б) Пусть $\mathcal{A} \in \mathrm{dgcat}_k$ — h-плоская DG катгория (т.е. комплексы морфизмов являются h-плоскими $k$-модулями) и $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ — полная DG подкатегория. Проверьте, что DG фактор Дринфельда $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ изоморфен $(\mathcal{B}/\mathcal{B}) \sqcup_{\mathcal{B}} \mathcal{A}$ в $\mathrm{dgcat}_k$.

**Задача 4.** Пусть $A$ - конечномерная алгебра над $\mathbb{C}$, такая, что абелева категория $A\text{-mod}$ имеет конечную гомологическую размерность. Покажите, что формула

$$\langle a, b \rangle := \mathrm{tr}_A(x \mapsto axb)$$

задает невырожденную билинейную форму на пространстве $A/[A, A]$, где $[A, A] \subset A$ — векторное подпространство, порожденное коммутаторами.

**Задача 5.** Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — гладкие собственные DG категории над $\mathbb{C}$, и $M \in D_{perf}(\mathcal{A}^{op} \otimes \mathcal{B})$. Предположим, что $[M] \in \mathrm{Im}(K_0(\mathcal{A}^{op}) \otimes K_0(\mathcal{B}) \to K_0(\mathcal{A}^{op} \otimes \mathcal{B}))$. Покажите, что имеет место разложение $M \cong M_1 \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_{\mathcal{C}} M_2$, где $\mathcal{C}$ — некоторая гладкая собственная DG категория над $\mathbb{C}$, порожденная исключительным набором, и $M_1 \in D_{perf}(\mathcal{A}^{op} \otimes \mathcal{C})$, $M_2 \in D_{perf}(\mathcal{C}^{op} \otimes \mathcal{B})$.