Многомерная проективная геометрия

А. Кузнецов

Курс лекций прочитанный в НОЦ МИАН в весеннем семестре 2017 г.,
`http://www.mi.ras.ru/~akuznet/hdpg-2017/index-hdpg.htm`.

Содержание

Лекция I. Детерминантали. Многообразия Веронезе и Сегре 3
1. Напоминание 3
2. Многообразие Веронезе 3
3. Схема нулей и детерминантали 5
4. Многообразие Сегре 7

Лекция II. Дифференциалы 8
5. Кэлеровы дифференциалы 8
6. Вычисление 9
7. Пучок дифференциалов 11
8. Дифференциалы на проективном пространстве 12

Лекция III. Грассманианы 14
9. Грассманиан 14
10. Уравнения Плюккера 15
11. Локальная структура и дифференциалы 17

Лекция IV. Относительные конструкции 19
12. Аффинизация и проективизация расслоения 19
13. Универсальное свойство аффинизации 19
14. Универсальное свойство проективизации 20
15. Проективные вложения и уравнения 22
16. Относительный грассманиан 24

Лекция V. Раздутие 25
17. Определение и простейшие примеры 25
18. Проективные вложения 26
19. Универсальное свойство 28

Лекция VI. Локально полные пересечения 31

20. Регулярные последовательности и сечения 31
21. Комплексы Кошуля 32
22. Нормальное расслоение 34
23. Раздутия локально полных пересечений 35
24. Примеры 36

Лекция VII. Примеры раздутий 37

25. Полные и собственные прообразы 37
26. Простые примеры 38
27. Примеры посложнее 40

Лекция VIII. Схема Чжоу 43

28. Прямые 43
29. Коники 44
30. Параметризация Чжоу 45

Лекция IX. Многообразия модулей 48

31. Функторы точек 48
32. Представимые функторы и универсальные семейства 49
33. Функтор подсхем, многочлен Гильберта и плоские пучки 50
34. Функтор Hilb и функтор Quot 52

Лекция X. Примеры схем Гильберта 54

35. Схема Гильберта прямых 54
36. Схема Гильберта коник 57
37. Схемы Гильберта точек 58

Лекция I. Детерминантали. Многообразия Веронезе и Сегре

1. Напоминание

Два основных базовых класса многообразий в алгебраической геометрии — это аффинные многообразия и проективные многообразия, то есть многообразия, которые можно вложить либо в аффинное либо в проективное пространство подходящей размерности. И те и другие можно описывать в терминах “координатной алгебры” — если X — аффинно, то

$$A_X = \Gamma(X, \mathscr{O}_X),$$

а если X — проективно, то

$$A_X^\bullet = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Gamma(X, \mathscr{O}_X(k)),$$

где $\mathscr{O}_X(1)$ — очень обильное линейное расслоение на X. Вся геометрия многообразия X в этих случаях может быть восстановлена по координатным алгебрам. В частности, по алгебре восстанавливается как само многообразие

$$X = \begin{cases} \operatorname{Spec} A_X, & \text{в аффинном случае,} \\ \operatorname{Proj} A_X^\bullet, & \text{в проективном случае,} \end{cases}$$

так и категории когерентных и квазикогерентных пучков на нем

$$\operatorname{coh} X = \begin{cases} \operatorname{qgr} A_X, & \text{в аффинном случае,} \\ \operatorname{mod} A_X^\bullet, & \text{в проективном случае,} \end{cases} \qquad \operatorname{Qcoh} X = \begin{cases} \operatorname{Mod} A_X, & \text{в аффинном случае,} \\ \operatorname{Qgr} A_X^\bullet, & \text{в проективном случае} \end{cases}$$

(маленькие буквы в обозначениях категорий указывают на конечную порожденность объектов, а эквивалентности задаются формулами $\mathscr{F} \mapsto \Gamma(X, \mathscr{F})$ и $\mathscr{F} \mapsto \oplus_{k=0}^{\infty} \Gamma(X, \mathscr{F}(k))$ соответственно).

Если многообразие X является подмногообразием в аффинном пространстве, $X \subset \mathbb{A}^n$, то

$$A_X \cong \mathsf{k}[x_1, \dots, x_n]/I_X,$$

где I_X — идеал в кольце функций на $\mathbb{A}^n$, состоящий из функций, обращающихся в ноль на X. Аналогично, если многообразие X является подмногообразием в проективном пространстве, $X \subset \mathbb{P}^n$, то

$$A_X^\bullet \cong \mathsf{k}[x_0, x_1, \dots, x_n]/I_X^\bullet,$$

где кольцо многочленов рассматривается как градуированое с естественной градуировкой (а идеал $I_X^\bullet$, состоящий из многочлено обращающихся в ноль на X, автоматически однороден). Образующие идеала I_X (он автоматически конечно порожден в силу нетеровости кольца многочленов) называются уравнениями, задающими многообразие.

Два стандартных типа задач, встречающихся в алгебраической геометрии — по вложению многообразия определить уравнения, его задающие, и наоборот, по данной системе уравнений понять, что за многообразие ими задается. Другой важный вопрос — как строить морфизмы между алгебраическим многообразиями.

2. Многообразие Веронезе

Пусть $X = \mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(U)$ и рассмотрим морфизм $\nu \colon X \to \mathbb{P}(S^d U)$, задаваемый естественной сюръекцией $S^d U^* \otimes \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X(d)$ (получающейся применением симметрической степени к тавтологической сюръекции $U^* \otimes \mathscr{O}_X = \Gamma(X, \mathscr{O}_X(1)) \otimes \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X(1)$).

Для большей наглядности выберем базис u_0, u_1 в U^* (однородные координаты на X) и рассмотрим мономиальный базис в S^dU^*: $x_0 = u_0^d$, $x_1 = u_0^{d-1}u_1$, $\dots$, $x_d = u_1^d$. По определению морфизм имеет вид

$$(u_0 : u_1) \mapsto (u_0^d : u_0^{d-1}u_1 : \dots : u_1^d).$$

Попробуем описать идеал I_X для данного вложения. Сразу видно, что $f_{ij}(x) = x_ix_j - x_{i+1}x_{j-1}$ лежит в I_X. В самом деле, подставляя, получаем $f_{ij}(u) = u_0^{d-i}u_1^i \cdot u_0^{d-j}u_1^j - u_0^{d-i-1}u_1^{i+1} \cdot u_0^{d-j+1}u_1^{j-1} = 0$. Покажем, что

$$I_X = (f_{ij})_{0 \le i \le j-2 \le d-2}.$$

В данном случае, это равенство легко установить *комбинаторно*. В самом деле, легко видеть, что пространство мономов вида $\langle x_0^p x_i x_d^{k-p-1} \rangle_{0 \le p \le k-1,\ 1 \le i \le d}$ проектируется изоморфно на компоненту степени k в факторкольце $\mathsf{k}[x]/(f_{ij})$. С другой стороны, при гомоморфизме $\mathsf{k}[x]/(f_{ij}) \to \mathsf{k}[u]$, моном $x_0^p x_i x_d^{k-p-1}$ переходит в $u_0^{pd} \cdot u_0^{d-i}u_1^i \cdot u_1^{d(k-p-1)} = u_0^{pd+d-i}u_1^{d(k-p-1)+i}$, а такие мономы составляют базис в компоненте степени dk в $\mathsf{k}[u]$. Следовательно, $\mathsf{k}[x]/(f_{ij})$ изоморфно d-му подкольцу Веронезе в $\mathsf{k}[u]$, и значит $I_X = (f_{ij})$.

Упражнение 1. *Покажите, что аналогичные уравнения задают $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(U)$ при аналогичном вложении (которое, кстати, называется d-*кратным вложением Веронезе*) в $\mathbb{P}(S^dU)$.*

Представим теперь, что мы всего вышесказанного не знаем, и нас интересует обратный вопрос — описать подмногообразие $X \subset \mathbb{P}^d$ заданное уравнениями $f_{ij}(x) = x_ix_j - x_{i+1}x_{j+1}$. Для этого оказывается очень полезной следующая переформулировка условия.

Пусть $V = S^dU$ и заметим, что условия, задающие $X \subset \mathbb{P}(V)$ — это условия на ранг тензора $v \in V = S^dV$. Для этого рассмотрим морфизм пучков

$$U^* \otimes S^{d-1}U^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)} \to S^dU^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)} = V^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$$

(над точкой $P \in \mathbb{P}(V)$ он задается формулами $u_i \otimes (u_0^p u_1^q) \mapsto u_0^{p+\delta_{0i}}u_1^{q+\delta_{1i}} = x_{q+\delta_{1i}} \mapsto x_{q+\delta_{1i}}(P)$). По сопряженности он дает морфизм пучков

$$\varphi\colon U^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)} \to S^{d-1}U \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$$

(задается формулами $u_i \mapsto \sum_{p+q=d-1} x_{q+\delta_{1i}}(P)e_0^p e_1^q$, где e_0, e_1 — двойственный базис в U). Иначе говоря, φ задается матрицей

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{d-2} & x_{d-1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{d-1} & x_d \end{pmatrix}^T,$$

а многочлены f_{ij} — не что иное, как ее миноры. Тем самым, множество нулей миноров — это множество точек, где ранг отображения φ равен 1, то есть множество тензоров ранга 1 в $\mathbb{P}(S^dU)$. Чтобы понять геометрию этого множества полезно воспользоватся следующим утверждением.

Лемма 2.1. *Пусть R — локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m} \subset R$ и полем вычетов $\mathsf{k} = R/\mathfrak{m}$. Пусть $\varphi\colon R^n \to R^m$ — гомоморфизм свободных R-модулей, такой что $\wedge^{r+1}\varphi = 0$ и ранг индуцированного морфизма $\bar{\varphi}\colon \mathsf{k}^n \to \mathsf{k}^m$ равен r. Тогда ядро, коядро и образ φ — свободные модули ранга $n-r$, r и $m-r$ соответственно.*

Доказательство. Так как ранг морфизма $\bar{\varphi}$ равен r, один из миноров порядка r его матрицы не равен нулю. Аналогичный минор матрицы φ тогда обратим (элемент локального кольца, не лежащий в максимальном идеале всегда обратим!), а значит меняя базисы в R^n и R^m можно считать, что матрица φ имеет вид

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1_r & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Условие $\wedge^{r+1}\varphi = 0$ влечет $D = CB$ (равенство нулю окаймляющих миноров). Заметим, что

$$\begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ -C & 1_{m-r} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1_r & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1_r & -B \\ 0 & 1_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

значит заменами базисов в R^n и R^m матрица φ приводится к указанному виду. Отсюда лемма следует немедленно. $\square$

Обозначим через L образ ограничения φ на X. Заметим, что по определению X ранг $\varphi_{|X}$ не превосходит 1. С другой стороны, он нигде не равен нулю, поэтому выполнены условия леммы. Значит L — локально свободный пучок ранга 1 (то есть линейное расслоение) на X, причем у нас есть сюръекция $U^* \otimes \mathscr{O}_X \to L$. Такая сюръекция автоматически дает морфизм $\pi\colon X \to \mathbb{P}(U)$, такой что $\pi^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}(U)}(1) = L$.

Чтобы проверить, что π и ν взаимно обратны надо убедиться в том, что $\operatorname{Im}\nu^*\varphi$ — это тавтологический морфизм $U^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(U)} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}(U)}(1)$. В самом деле, применяя ν^* к матрице φ получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} u_0^d & u_0^{d-1}u_1 & \dots & u_0^2u_1^{d-2} & u_0u_1^{d-1} \\ u_0^{d-1}u_1 & u_0^{d-2}u_1^2 & \dots & u_0u_1^{d-1} & u_1^d \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} u_0^{d-1} & u_0^{d-2}u_1 & \dots & u_0u_1^{d-2} & u_1^{d-1} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} u_0 & u_1 \end{pmatrix},$$

а значит морфизм $\nu^*\varphi$ раскладывается в композицию $U^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(U)} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}(U)}(1) \to S^{d-1}U \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(U)}(d)$, причем первый морфизм сюръективен, а второй инъективен. Отсюда следует, что $\pi \circ \nu = \mathrm{id}_{\mathbb{P}(U)}$.

Для доказательства того, что $\nu \circ \pi = \mathrm{id}_X$ достаточно проверить, что X и $\nu(\mathbb{P}(U))$ совпадают теоретико-множественно (что очевидно), и что касательное пространство к X в любой точке одномерно. В силу того, что группа $\mathrm{PGL}(U)$ транзитивно действет на точках $\mathbb{P}(U)$ (а значит и на точках X) достаточно вычислить касательное пространство в точке $\nu(1:0) = (1:0:\dots:0)$. А оно очевидно задается уравнениями $x_2 = \dots = x_d = 0$ (например, в аффинной карте $x_0 = 1$).

Упражнение 2. *Проверьте, что те же рассуждения проходят для пространства U любой размерности.*

3. Схема нулей и детерминантали

Пусть Y — схема, а E — векторное расслоение на Y (локально свободный пучок конечного ранга). Пусть $s \in \Gamma(Y, E)$ — глобальное сечение, а $Z_s \subset Y$ — множество точек, в которых s обращается в нуль (то есть таких точек y, что образ s в $E_{Y,y} = E \otimes \mathscr{O}_{Y,y}$ лежит в $E \otimes \mathfrak{m}_{Y,y}$). Покажем, что на множестве Z_s есть естественная структура замкнутой подсхемы.

В самом деле, рассмотрим морфизм пучков $E^* \to \mathscr{O}_Y$, задаваемый сечением s. Его образ I_s — подпучок в $\mathscr{O}_Y$, то есть пучок идеалов на Y. Заметим, что $\operatorname{supp}(\mathscr{O}_Y/I_s)$ — как раз Z_s. Действительно, это вопрос локальный, поэтому можно считать пучок E тривиальным, то есть $E \cong \mathscr{O}_Y^n$. Тогда $\Gamma(Y, E) = \Gamma(Y, \mathscr{O}_Y)^n$, таким образом сечение s — это набор $(f_1, \dots, f_n)$ функций на Y. Ясно, что $Z_s = \{f_1 = \dots = f_n = 0\}$. С другой стороны, $E^* \cong \mathscr{O}_Y^n$ и морфизм $s\colon E^* \to \mathscr{O}_Y$ задается формулой $(g_1, \dots, g_n) \mapsto f_1g_1 + \dots + f_ng_n$, поэтому его образ — это как раз идеал $(f_1, \dots, f_n)$, носитель фактора по которому совпадает с Z_s.

Таким образом $Z_s \subset Y$ имеет естественную структуру замкнутой подсхемы. Эта подсхема называется схемой нулей сечения s.

Аналогично, пусть вместо сечения расслоения задан морфизм $s\colon E \to F$ расслоений. Так как

$$\operatorname{Hom}(E, F) \cong \Gamma(Y, E^* \otimes F),$$

мы можем рассматривать его как сечение расслоения $E^* \otimes F$. Схема нулей этого сечения также называется схемой нулей мофризма.

Предложение 3.1. *Пусть E — векторное расслоение на Y, $s \in \Gamma(Y, E)$, а S — произвольная схема. Тогда*

$$\operatorname{Map}(S, Z_s) = \{f \in \operatorname{Map}(S, Y) \mid f^*s = 0\},$$

где f^*s рассматривается как сечение расслоения f^*E.

Доказательство. Обозначим через i вложение $Z_s \to Y$. Заметим, что $i^*s = 0$. В самом деле, утверждение локально, поэтому можно считать, что $Y = \operatorname{Spec} A$, $E = A^m$, а $s = (s_1, \dots, s_m)$, $s_i \in A$. Тогда утверждение означает, что образы s_i в факторкольце $A/(s_1, \dots, s_m)$ равны нулю, что тавтологично. Отсюда сразу следует, что если $g\colon S \to Z_s$, а $f = i \circ g$, то $f^*s = g^*i^*s = 0$, поэтому $g \mapsto i \circ g$ задает отображение слева направо.

Пусть теперь f — морфизм $S \to Y$, такой что $f^*s = 0$. Покажем, что f единственным образом пропускается через i. Это утверждение также локально и означает следующее: если $A \to B$ — гомоморфизм колец, такой что при естественном морфизме $A^m \to A^m \otimes_A B$ набор $(s_1, \dots, s_m)$ переходит в ноль, то морфизм пропускается через $A/(s_1, \dots, s_m)$, что очевидно. $\square$

Пример 3.2. Пусть $Y = \mathbb{P}^1$ с координатами $(x : y)$, $E = \mathscr{O}(1)$, $s = x$. Тогда Z_s — точка $(0 : 1)$ с приведенной структурой. В самом деле, на аффинной окрестности точки $(1 : 0)$ при стандартной тривиализации сечение s представляется функцией 1 и поэтому нулей не имеет, а на аффинной окрестности точки $(0 : 1)$ с координатой t — функцией t, а факторкольцо $\mathsf{k}[t]/t\mathsf{k}[t]$ целостно.

Пример 3.3. Пусть $Y = \mathbb{P}^1$ с координатами $(x : y)$, $E = \mathscr{O}(2)$, $s = x^2$. Тогда Z_s — точка $(0 : 1)$ с неприведенной структурой. В самом деле, так же как и выше проверяется, что $(0 : 1)$ — единственный ноль s, при этом на аффинной окрестности точки $(0 : 1)$ сечение s представляется функцией t^2, а факторкольцо $\mathsf{k}[t]/t^2\mathsf{k}[t]$ содержит нильпотенты.

Важно понимать следующее. Пусть $Y = \mathbb{P}^n$ и $E = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)^m$. Тогда $\Gamma(\mathbb{P}^n, E) = \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d))^m$, поэтому сечение s представляется набором $(s_1, \dots, s_m)$ однородных многочленов степени d. Пусть $X = Z_s$. Тогда легко видеть, что $(s_1, \dots, s_m) \subset I_X$. В самом деле, по определению схемной структуры на локусе нулей имеем точную справа последовательность

$$\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-d)^m \xrightarrow{(s_1,\dots,s_m)} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow i_*\mathscr{O}_X$$

где $i\colon X \to \mathbb{P}^n$ — вложение. Подкручивая ее на d и переходя к глобальным сечениям, получаем комплекс

$$\mathsf{k}^m \xrightarrow{(s_1,\dots,s_m)} \mathsf{k}[x_0, \dots, x_n]_d \longrightarrow (A_X)_d$$

значит $s_i \in I_X$. Однако, **не верно**, что идеал I_X порождается многочленами $s_1, \dots, s_m$. Впрочем, на практике знание идеала I_X как правило не слишком важно, вполне достаточно знать образующие пучка идеалов X.

Пример 3.4. Пусть $Y = \mathbb{P}^1$ с координатами $(x : y)$, $E = \mathscr{O}(2)^2$, $s = (x^2, xy)$. Тогда Z_s — точка $(0 : 1)$ с неприведенной структурой, а $I_{Z_s} = x\mathsf{k}[x, y]$. В самом деле, так же как и выше проверяется, что $(0 : 1)$ — единственный ноль s, при этом на аффинной окрестности точки $(0 : 1)$ сечение s представляется функциями (t^2, t), а факторкольцо $k[t]/(t^2, t) = \mathsf{k}[t]/t\mathsf{k}[t]$, так что Z_s имеет приведенную структуру.

Другой способ убедится в этом такой. Заметим, что морфизм $s\colon \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)^2 \xrightarrow{(x^2,xy)} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}$ представляется в виде композиции $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)^2 \xrightarrow{(x,y)} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \xrightarrow{x} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}$, в которой первый морфизм сюръективен. Поэтому его образ равен образу второго морфизма.

Следующий частный случай схемы нулей очень важен и будет часто использоваться.

Внешней степенью свободного модуля над коммутативным кольцом называется подмодуль в его тензорной степени, состоящий из антиинвариантных тензоров. Ясно, что если $f\colon V \to W$ — линейное отображение, то отображение $f^{\otimes n}\colon V^{\otimes n} \to W^{\otimes n}$ коммутирует с действием симметрической группы, и поэтому переводит антиинвариантные тензоры в антиинвариантные тензоры, то есть индуцирует отображение $\wedge^n f\colon \bigwedge^n V \to \bigwedge^n W$. При этом ясно, что матрица отображения $\wedge^n f$ состоит из миноров матрицы f.

Если $s\colon E \to F$ — морфизм векторных расслоений, то схема нулей его $(r+1)$-ой внешней степени $\wedge^{r+1}s\colon \bigwedge^{r+1}E \to \bigwedge^{r+1}F$ называется r-ой **детерминанталью мофризма** s и обозначается $D_r(s)$. Например, подмногообразие Веронезе является детерминанталью $D_1(\varphi)$.

Следствие 3.5. *Пусть $s\colon E \to F$ — морфизм векторных расслоений на Y, а S — любая схема. Тогда*

$$\mathrm{Map}(S, D_k(s)) = \{f \in \mathrm{Map}(S,Y) \mid \wedge^{k+1} f^*s = 0\}.$$

4. Многообразие Сегре

Рассмотрим множество X тензоров ранга 1 в $\mathbb{P}(U\otimes W)$. Покажем, что оно изоморфно произведению $\mathbb{P}(U)\times\mathbb{P}(W)$. Вначале построим морфизм $X \to \mathbb{P}(U)\times\mathbb{P}(W)$. Для этого заметим, что тавтологический морфизм $U^*\otimes W^*\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(U\otimes W)} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}(U\otimes W)}(1)$ дает морфизм

$$\varphi\colon U^*\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(U\otimes W)} \to W\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(U\otimes W)}(1).$$

Введем на X схемную структуру как $X = D_1(\varphi)$. Ясно, что на X ранг φ постоянен и равен единице, поэтому $L = \operatorname{Im}\varphi_{|X}$ — линейное расслоение. При этом имеем сюръекцию $U^*\otimes\mathscr{O}_X \to L$ и вложение $L \to W\otimes\mathscr{O}_X(1)$, которое после дуализации и подкрутки дает сюръекцию $W^*\otimes\mathscr{O}_X \to L^*\otimes\mathscr{O}_X(1)$. Получаем морфизмы $p\colon X\to\mathbb{P}(U)$, $q\colon X\to\mathbb{P}(W)$, такие что

$$p^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}(U)}(1) = L \qquad \text{и} \qquad q^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(1) = L^*\otimes\mathscr{O}_X(1).$$

Произведение морфизмов p и q дает морфизм $p\times q\colon X \to \mathbb{P}(U)\times\mathbb{P}(W)$.

Теперь построим морфизм в обратную сторону. Для этого заметим поднимем тавтологические морфизмы $U^*\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(U)} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}(U)}(1)$ и $W^*\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(1)$ на произведение и тензорно перемножим. Получим сюръекцию

$$(U\otimes W)^*\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(U)\times\mathbb{P}(W)} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}(U)\times\mathbb{P}(W)}(1,1) := p^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}(U)}(1)\otimes q^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(1),$$

которая задает морфизм $s\colon \mathbb{P}(U)\times\mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(U\otimes W)$, который называется **морфизмом Сегре**. При этом ясно, что морфизм $s^*\varphi$ раскладывается в композицию

$$U^*\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(U)\times\mathbb{P}(W)} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}(U)\times\mathbb{P}(W)}(1,0) \to W\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(U)\times\mathbb{P}(W)}(1,1)$$

(где первый морфизм — это поднятие тавтологического морфизма на $\mathbb{P}(U)$, а второй — это подкрученное на $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(U)\times\mathbb{P}(W)}(0,1)$ поднятие тавтологического морфизма на $\mathbb{P}(W)$). Поэтому $p\circ s$ и $q\circ s$ — это проекции $\mathbb{P}(U)\times\mathbb{P}(W)$ на сомножители, а $(p\times q)\circ s = \mathrm{id}$.

Для доказательства того, что $s\circ(p\times q) = \mathrm{id}_X$ достаточно проверить, что X и $s(\mathbb{P}(U)\times\mathbb{P}(W))$ совпадают теоретико-множественно (что очевидно), и что касательное пространство к X в любой точке имеет размерность $\dim(\mathbb{P}(U))+\dim(\mathbb{P}(W))$. В силу того, что группа $\mathrm{PGL}(U)\times\mathrm{PGL}(W)$ транзитивно действет на точках $\mathbb{P}(U)\times\mathbb{P}(W)$ (а значит и на точках X) достаточно вычислить касательное пространство в точке $s((1:0:\dots:0),(1:0:\dots:0)) = (1:0:\dots:0)$. А оно очевидно задается уравнениями $x_{ij}=0$ для $i,j\ge 1$ (например, в аффинной карте $x_{00}=1$).

Лекция II. Дифференциалы

5. Кэлеровы дифференциалы

Определение 5.1. Дифференцированием кольца A со значениями в A-модуле M называется гомоморфизм абелевых групп $D\colon A \to M$, удовлетворяющий правилу Лейбница

$$D(ab) = aD(b) + bD(a).$$

Если A — алгебра над кольцом R, то дифференцирование называется R-линейным, если $D(r) = 0$ для всех $r \in R$. Множество всех R-линейных дифференцирований $A \to M$ обозначается $\mathrm{Diff}(A/R, M)$.

Заметим, что всякое дифференцирование $\mathbb{Z}$-линейно, так как $D(1) = D(1\cdot 1) = D(1)+D(1)$, откуда $D(1) = 0$.

Пример 5.2. Всякое k-линейное дифференцирование кольца многочленов $D \in \mathrm{Diff}(\mathsf{k}[x]/\mathsf{k}, M)$ задается формулой $D(f) = df/dx\cdot m_0$, где $m_0 \in M$. В самом деле, пусть $m_0 = D(x)$. Тогда $D(x^2) = 2xD(x)$ и по индукции $D(x^n) = nx^{n-1}D(x)$, откуда в силу линейности вытекает приведенная формула.

Ясно, что если $f\colon M \to N$ — гомоморфизм A-модулей, а $D\colon A \to M$ — дифференцирование, то $f \circ D\colon A \to N$ — тоже дифференцирование. В самом деле

$$f(D(ab)) = f(aD(b) + bD(a)) = af(D(b)) + b(fD(a)).$$

В частности, если в качестве f взять умножение на элемент кольца (здесь важна коммутативность кольца!), получится что $\mathrm{Diff}(A/R, M)$ — A-модуль. Аналогично, если $g\colon B \to A$ — гомоморфизм R-алгебр, то $D \circ g\colon B \to M$ — дифференцирование кольца B.

Теорема 5.3. *Пусть A — коммутативная алгебра над R. Существует A-модуль $\Omega_{A/R}$ и дифференцирование $d : A \to \Omega_{A/R}$, обладающее следующим универсальным свойством — сопоставление $(f\colon \Omega_{A/R} \to M) \mapsto (f \circ d\colon A \to M)$ задает изоморфизм A-модулей*

$$\mathrm{Hom}(\Omega_{A/R}, M) \cong \mathrm{Diff}(A/R, M).$$

Доказательство. Умножение задает эпиморфизм колец $A \otimes_R A \to A$. Обозначим через I идеал, являющийся его ядром. Заметим сразу, что I является A-бимодулем и как левый A-модуль порождается элементами вида $1 \otimes a - a \otimes 1$. В самом деле, пусть $\sum a_i \otimes b_i \in I$ (то есть $\sum a_i b_i = 0$). Тогда

$$\sum a_i \otimes b_i = \sum a_i(1 \otimes b_i - b_i \otimes 1).$$

Отсюда сразу следует, что идеал I^2 порождается как левый A-модуль элементами

$$(1 \otimes a - a \otimes 1)(1 \otimes b - b \otimes 1) = (1 \otimes ab - a \otimes b - b \otimes a + ab \otimes 1).$$

Положим $\Omega_{A/R} := I/I^2$, а в качестве отображения d рассмотрим $d(a) = 1 \otimes a - a \otimes 1$. Во-первых, проверим, что d — дифференцирование. В самом деле

$$\begin{aligned} d(ab) - ad(b) - bd(a) &= 1 \otimes ab - ab \otimes 1 - a(1 \otimes b - b \otimes 1) - b(1 \otimes a - a \otimes 1) = \\ &= 1 \otimes ab - ab \otimes 1 - a \otimes b + ab \otimes 1 - b \otimes a + ab \otimes 1 = (1 \otimes a - a \otimes 1)(1 \otimes b - b \otimes 1) \equiv 0 \pmod{I^2}. \end{aligned}$$

Кроме того, d — R-линейно, так как $1 \otimes r - r \otimes 1 = 0$ в $A \otimes_R A$. Осталось проверить биективность соответствия.

Пусть $D\colon A \to M$ — дифференцирование. Рассмотрим отображение $F^D\colon A \otimes_R A \to M$, задаваемое формулой $a \otimes b \mapsto aD(b)$. Оно очевидно является гомоморфизмом, причем $F^D(I^2) = 0$. В самом деле,

$$F^D((1 \otimes a - a \otimes 1)(1 \otimes b - b \otimes 1)) = F^D(1 \otimes ab - a \otimes b - b \otimes a + ab \otimes 1) = D(ab) - aD(b) - bD(a) = 0.$$

Значит F^D индуцирует морфизм $f^D : I/I^2 \to M$. При этом

$$f^D(d(a)) = F^D(1 \otimes a - a \otimes 1) = D(a) - aD(1) = D(a).$$

Обратно, если $f\colon I/I^2 \to M$ — морфизм, а $D(a) = f(d(a))$, то

$$F^D(1 \otimes a - a \otimes 1) = D(a) = f(d(a)) = f(1 \otimes a - a \otimes 1),$$

то есть $F^D = f$. □

6. Вычисление

Вычислим модуль дифференциалов для кольца многочленов.

Лемма 6.1. *Пусть R — произвольное кольцо. Тогда $\Omega_{R[x_1,\dots,x_n]/R} \cong R[x_1,\dots,x_n]^{\oplus n}$.*

Доказательство. Пусть $A = R[x_1,\dots,x_n]$, тогда $A \otimes_R A = R[x'_1,\dots,x'_n,x''_1,\dots,x''_n]$, а морфизм умножения переводит x'_i и x''_i в x_i. Легко видеть, что идеал I порожден элементами $x'_i - x''_i$, а идеал I^2 — элементами $(x'_i - x''_i)(x'_j - x''_j)$. Рассмотрим гомоморфизм $F^D : I/I^2 \to A^n$, соответствующий дифференцированию

$$D\colon A \to A^n, \qquad f(x_1,\dots,x_n) \mapsto (\partial f/\partial x_1,\dots,\partial f/\partial x_n)$$

(он переводит образующую $x'_i - x''_i = d(x_i)$ в $e_i := (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$, где 1 стоит на i-ом месте). Обратно, рассмотрим морфизм $g\colon A^n \to I/I^2$, переводящий e_i в $x'_i - x''_i$. Очевидно, что они взаимно обратны. □

Замечание 6.2. Более инвариантная форма записи данного изоморфизма такова. Пусть V — свободный R-модуль, а $A = S^\bullet_R V^*$ — его симметрическая алгебра. Тогда $\Omega_{A/R} \cong V^* \otimes_R A$, причем универсальное дифференцирование $d\colon S^\bullet_R V^* \to V^* \otimes_R S^\bullet_R V^*$ — поляризация многочлена.

Лемма 6.3. *Если $S \subset A$ — мультипликативная система, то $\Omega_{S^{-1}A/A} = 0$.*

Доказательство. Пусть $D\colon S^{-1}A \to M$ — дифференцирование, такое что $D(A) = 0$. Тогда

$$0 = D(1) = D(s^{-1}s) = s^{-1}D(s) + sD(s^{-1}) = sD(s^{-1}),$$

значит $D(s^{-1}) = 0$ для всех $s \in S$, следовательно $D \equiv 0$. □

Лемма 6.4. *Пусть A и R' — алгебры над R. Тогда $\Omega_{A\otimes_R R'/R'} = \Omega_{A/R} \otimes_R R'$.*

Доказательство. По определению достаточно проверить, что $\mathrm{Diff}(A \otimes_R R'/R', M) \cong \mathrm{Diff}(A/R, M)$ (так как $\mathrm{Hom}_{A\otimes_R R'}(\Omega_{A/R} \otimes_R R', M) \cong \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/R}, M)$). Пусть $D\colon A \to M$ — дифференцирование. Положим тогда $D'(a \otimes r') = r'D(a)$. Ясно, что это R'-линейное дифференцирование кольца $A \otimes_R R'$. Обратно, если $D'\colon A \otimes_R R' \to M$ — дифференцирование, а $i\colon A \to A \otimes_R R'$ — естественный гомоморфизм, то $D' \circ i\colon A \to M$ — R-линейное дифференцирование, причем построенные соответствия взаимно обратны. □

Основной способ вычисления дифференциалов — следующая точная последовательность.

Предложение 6.5. *Пусть $B = A/J$. Тогда точна последовательность B-модулей*

$$J/J^2 \to \Omega_{A/R} \otimes_A B \to \Omega_{B/R} \to 0, \tag{1}$$

где левый морфизм индуцирован композицией $J \to A \xrightarrow{d} \Omega_{A/R} \to \Omega_{A/R} \otimes_A B$, а правый — дифференцированием $A \to B \xrightarrow{d} \Omega_{B/R}$.

Доказательство. Рассмотрим B-модуль M и применим к последовательности функтор $\mathrm{Hom}(-, M)$:

$$0 \to \mathrm{Diff}(B/R, M) \to \mathrm{Diff}(A/R, M) \to \mathrm{Hom}(J/J^2, M)$$

(мы воспользовались тем, что $\mathrm{Hom}_B(\Omega_{A/R} \otimes_A B, M) \cong \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/R}, M)$). Нам достаточно проверить ее точность для любого M.

Заметим, что первый морфизм задается формулой $D \mapsto D \circ \pi$, где $\pi\colon A \to B$ — проекция, и в силу сюръективности π является вложением. Второй морфизм задается формулой $D \mapsto D \circ j$, где $j\colon J \to A$ — вложение (заметим, что если $a_1, a_2 \in J$, то $D(j(a_1 a_2)) = D(a_1 a_2) = a_1 D(a_2) + a_2 D(a_1) = 0$, так как M, будучи B-модулем, аннулируется идеалом J, значит $D \circ j$ пропускается через J^2; то же рассуждение с $a_1 \in A$, $a_2 \in J$ показывает, что $D \circ j$ — гомоморфизм B-модулей). Пусть теперь $D \circ j = 0$. Значит D индуцирует гомоморфизм абелевых групп $D'\colon B \to M$, такой что $D = D' \circ \pi$. Остается заметить, что D' — дифференцирование. ☐

Пример 6.6. Пусть $f_1, \dots, f_m \in A = \mathsf{k}[x_1, \dots, x_n]$ и $B = A/(f_1, \dots, f_m)$. Найдем $\Omega_{B/\mathsf{k}}$. Воспользуемся точной последовательностью (1) и леммой 6.1. Средний член имеет вид B^n, а сюръекции $A^m \xrightarrow{f_1,\dots,f_m} J \to J/J^2$ показывают, что образ левого морфизма порожден df_1, df_2, $\dots$, df_m. Иначе говоря, получаем точную последовательность

$$B^m \xrightarrow{(\partial f_i/\partial x_j)} B^n \longrightarrow \Omega_{B/R} \longrightarrow 0.$$

Есть еще одна важная последовательность — связанная с заменой скаляров.

Предложение 6.7. *Пусть $A \to B \to C$ — гомоморфизмы колец. Тогда существует точная последовательность C-модулей*

$$\Omega_{B/A} \otimes_B C \to \Omega_{C/A} \to \Omega_{C/B} \to 0 \tag{2}$$

в которой первый морфизм индуцирован дифференцированием $B \to C \xrightarrow{d} \Omega_{C/A}$, а второй — дифференцированием $C \xrightarrow{d} \Omega_{C/B}$.

Доказательство. Достаточно проверить точность последуовательности

$$0 \to \mathrm{Diff}(C/B, M) \to \mathrm{Diff}(C/A, M) \to \mathrm{Diff}(B/A, M),$$

где M — произвольный C-модуль. Первый морфизм — очевидное вложение (дифференцирования над B также являются дифференцированиями над A), а второй задается формулой $D \mapsto D \circ f$, где $f : B \to C$. Но если $D \circ f = 0$, то дифференцирование D аннулирует B, а значит является дифференцированием над B. ☐

Следствие 6.8. *Пусть B_1, B_2 — A-алгебры, а $C = B_1 \otimes_A B_2$. Тогда*

$$\Omega_{C/A} = \Omega_{B_1/A} \otimes_A B_2 \oplus B_1 \otimes_A \Omega_{B_2/A}.$$

Доказательство. Имеем точные последовательности

$$\Omega_{B_1/A} \otimes_{B_1} C \to \Omega_{C/A} \to \Omega_{C/B_1} \to 0, \qquad \Omega_{B_2/A} \otimes_{B_2} C \to \Omega_{C/A} \to \Omega_{C/B_2} \to 0$$

и изоморфизмы $\Omega_{C/B_1} = \Omega_{B_2/A} \otimes_A B_1 = \Omega_{B_2/A} \otimes_{B_2} C$ и аналогично для Ω_{C/B_2}. Остается проверить, что композиция морфизмов $\Omega_{B_2/A} \otimes_{B_2} C \to \Omega_{C/A} \to \Omega_{C/B_1}$ — изоморфизм, что очевидно. ☐

Упражнение 3. *Пусть K/k — расширение полей. Покажите, что*
(a) если $K = \mathsf{k}(x_1, \dots, x_n)$, то $\Omega_{K/\mathsf{k}} = K^n$;
(b) если K/k — сепарабельное расширение, то $\Omega_{K/\mathsf{k}} = 0$.
(c) А если K/k — несепарабельное?

Следствие 6.9. *Если A — локализация конечнопорожденной R-алгебры, то $\Omega_{A/R}$ конечно порожден.*

Доказательство. По условию $A = S^{-1}B$, где $B = R[x_1, \dots, x_n]/J$. Из (1) следует, что $\Omega_{B/R}$ — фактормодуль свободного модуля конечного ранга, то есть конечно порожден. Далее, рассмотрим цепочку $R \to B \to A$. Из (2) получаем точную последовательность $\Omega_{B/R} \otimes A \to \Omega_{A/R} \to \Omega_{A/B}$. В ней $\Omega_{A/B} = 0$, значит $\Omega_{A/R}$ — фактормодуль конечнопорожденного модуля $\Omega_{B/R} \otimes_B A$, и значит сам конечно порожден. □

7. Пучок дифференциалов

Пусть теперь X — схема над R. Определим пучок дифференциалов на X. Для этого для каждого аффинного подмножества $\operatorname{Spec} A = U \subset X$ рассмотрим пучок на U, соответствующий модулю $\Omega_{A/R}$, а для каждого вложения $\operatorname{Spec} B = V \subset U$ (соответствующего гомоморфизму $A \to B$) морфизм $\Omega_{A/R} \to \Omega_{B/R}$, построенный по дифференцированию $A \to B \xrightarrow{d} \Omega_{B/R}$.

Лемма 7.1. *Существует единственный квазикогерентный пучок $\Omega_{X/R}$ на X, такой что для аффинных $\operatorname{Spec} A = U \subset X$ выполнено $\Omega_{X/R}(U) = \Omega_{A/R}$, а морфизмы ограничения для аффинных вложений такие же как и выше.*

Доказательство. Прямолинейный способ состоит в том, что на каждой из аффинных карт рассмотреть квазикогерентный пучок, соответствующий модулю дифференциалов, и склеить из них квазикогерентный пучок на всем X (иначе говоря, для каждой схемной точки $x \in X$ рассмотреть модуль $\Omega_{\mathscr{O}_{X,x}/R}$ и каждому $U \subset X$ сопоставить множество всех $\{s_x \in \Omega_{\mathscr{O}_{X,x}/R}\}_{x \in U}$, которые локально происходят из элементов модуля дифференциалов). Но мы применим другйо способ.

Предположим вначале, что X отделима (то есть диагональное вложение $\Delta \colon X \to X \times X$ является замкнутым вложением). Пусть $\mathscr{I} \subset \mathscr{O}_{X \times X}$ — пучок идеалов диагонали. Рассмотрим пучок $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$. Заметим, что он анулируется умножением на $\mathscr{I}$, следовательно является пучком $\mathscr{O}_{X \times X}/\mathscr{I}$-модулей, то есть его можно рассматривать как пучок на диагонали. Определим пучок $\Omega_{X/R}$ равенством

$$\mathscr{I}/\mathscr{I}^2 = \Delta_* \Omega_{X/R}.$$

Проверим, что построенный пучок локально устроен как модуль дифференциалов. В самом деле, если $U = \operatorname{Spec} A \subset X$, то $U \times U \subset X \times X$ и диагональное вложение соответствует морфизму умножения $A \otimes A \to A$, поэтому пучок $\mathscr{I}$ соответствует идеалу I из теоремы 5.3. Значит пучок $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ соответствует модулю $I/I^2 = \Omega_{A/R}$, что и требовалось.

Если же схема X не является отделимой, то диагональ не замкнута, но зато локально замкнута, то есть замкнута в некотором открытом подмножестве $V \subset X \times X$. Поэтому можно проделать все те же рассуждения, что и раньше, заменив $X \times X$ на V. □

Упражнение 4. *Покажите, что локальные дифференцирования $d : A \to \Omega_{A/R}$ склеиваются в глобальный морфизм пучков $d : \mathscr{O}_X \to \Omega_{X/R}$. Заметьте, что он* **не является морфизмом пучков $\mathscr{O}_X$-модулей!**

Лемма 7.2. $\Omega_{X/R} = \Delta^*(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2) = \Delta^*\mathscr{I}$.

Доказательство. Первое равенство следует из приведенной ниже Леммы 7.3. Второе получается так. Применеяя функтор Δ^* к точной последовательности $0 \to \mathscr{I}^2 \to \mathscr{I} \to \mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \to 0$, получаем

$$\Delta^*(\mathscr{I}^2) \to \Delta^*\mathscr{I} \to \Delta^*(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2) \to 0.$$

Остается заметить, что первый морфизм соответствует морфизму $I^2 \otimes_A (A/I) \to I \otimes_A (A/I)$, который очевидно равен нулю. Значит второй морфизм — изоморфизм. □

Лемма 7.3. *Пусть* $i\colon Y \to X$ *— замкнутое вложение, а* $\mathscr{J}$ *— пучок идеалов* Y *в* X*. Тогда функтор* $i_* : \mathrm{Qcoh}(Y) \to \mathrm{Qcoh}(X)$ *— эквивалентность на подкатегорию пучков, аллуируемых пучком идеалов* $\mathscr{J}$*. Обратный функтор —* i^**.*

Доказательство. Во-первых, проверим, что $i^*i_*F \cong F$ для всякого $F \in \mathrm{Qcoh}(Y)$. Для этого заметим, что по сопряженности $\mathrm{Hom}(i^*i_*F, F) \cong \mathrm{Hom}(i_*F, i_*F)$, значит сущесвует канонический морфизм $i^*i_*F \to F$ и нам достаточно проверить, что он является изоморфизмом. Это вопрос локальный, так что можно считать, что $X = \operatorname{Spec} A$ — аффинно, $\mathscr{J}$ соответствует идеалу $J \subset A$, а $Y = \operatorname{Spec}(A/J)$. Тогда функтор i_* — это естественный функтор $\mathrm{Mod}(A/J) \to \mathrm{Mod}\, A$, а функтор i^* — это функтор $- \otimes_A (A/J) : \mathrm{Mod}\, A \to \mathrm{Mod}(A/J)$. В частности, если M — A/J-модуль, соответствующий пучку F, то пучку i^*i_*F соответствует модуль $M \otimes_A (A/J)$, а наш морфизм $M \otimes_A (A/J) \to M$ индуцирован действием A/J на M. Остается заметить, что это — изоморфизм, так как J действует на M тривиально.

Обратно, для всякого пучка G на X есть естественный морфизм $G \to i_*i^*G$, который локально соответсвует естественному морфизму $N \to N \otimes_A (A/J)$ для A-модуля N. Ясно, что он изоморфизм в точности для тех N, которые аннулируются идеалом J, так что i_* — эквивалентность на подкатегорию пучков, которые аннулируются идеалом $\mathscr{J}$. $\square$

Аналогично определяется пучок относительных дифференциалов. Пусть X — схема над S. Рассмотрим диагональ в расслоенном квадрате $\Delta : X \to X \times_S X$ и положим $\Omega_{X/S} = \Delta^*\mathscr{I}$, где $\mathscr{I}$ — пучок идеалов диагонали, если X отделима над S, а если не отделима, то аналогично заменив расслоенный квадрат на открытое подмножество, в котором диагональ замкнута. Ясно, что если $\operatorname{Spec} A \subset X$, $\operatorname{Spec} R \subset S$ — аффинные открытые подмножества, такие что $\pi(\operatorname{Spec} A) \subset \operatorname{Spec} R$, где $\pi\colon X \to S$ (так что A — R-алгебра), то $\Omega_{X/S}$ над $\operatorname{Spec} A$ соответствует модулю $\Omega_{A/R}$.

Ясно, что если X — схема над кольцом R, то $\Omega_{X/R} = \Omega_{X/\operatorname{Spec} R}$.

Лемма 7.4. *Пучок дифференциалов* $\Omega_{X/S}$ *конечно порожден. В частности, если* X *— локально нетерова, то* $\Omega_{X/S}$ *когерентен.*

Эта лемма сразу следует из 6.9.

8. Дифференциалы на проективном пространстве

Теорема 8.1. *Пусть* W *— векторное пространтсво над* k *размерности* n*. Тогда существует точная последовательность*

$$0 \to \Omega_{\mathbb{P}(W)} \to W^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1) \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)} \to 0, \qquad \text{(последовательность Эйлера)}$$

в которой правый морфизм индуцирован естественным отображением $W^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(1)$*.*

Доказательство. Обозначим ядро отображения $\alpha : W^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(1)$ через K (если рассматривать $\mathbb{P}(W)$ как грассманиан $\mathrm{Gr}(1, W)$, то это расслоение $\mathscr{U}^\perp$). Получим морфизм расслоений $\beta : K \to W^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}$. Поднимем α и β на $\mathbb{P}(W) \times \mathbb{P}(W)$ и прокомпонируем — получим морфизм

$$\varphi : p_1^*K \xrightarrow{p_1^*\beta} W^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)\times\mathbb{P}(W)} \xrightarrow{p_2^*\alpha} p_2^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(1).$$

Покажем, что $Z_\varphi = \Delta(\mathbb{P}(W))$ — диагональ. В самом деле, чтобы проверить, что $Z_\varphi \subset \Delta(\mathbb{P}(W))$ надо убедиться в том, что $p_{1|Z_\varphi} = p_{2|Z_\varphi}$. Для этого заметим, что эти отображения определяются ограничениями морфизмов $W^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)\times\mathbb{P}(W)} \to p_i^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(1)$ на Z_φ. Рассмотрим коммутатиыную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & p_1^* K_{|Z_\varphi} \arrow[r, "p_1^*\beta"] \arrow[dr, "\varphi_{|Z_\varphi}"'] & W^* \otimes \mathscr{O}_{Z_\varphi} \arrow[r, "p_1^*\alpha"] \arrow[d, "p_2^*\alpha"] & p_1^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(1)_{|Z_\varphi} \arrow[r] \arrow[dl, dashed] & 0 \\
& & p_2^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(1)_{|Z_\varphi} & &
\end{tikzcd}$$

Так как $\varphi_{|Z_\varphi} = 0$, получаем пунктирную стрелку, которая должна быть сюръективна в силу сюръективности вертикальной стрелки. Но заметим, что сюръективный морфизм локально свободных пучков одинакового ранга — изоморфизм. В самом деле, у него постоянный ранг, значит по лемме из первой лекции его ядро — локально свободно ранга ноль, значит равно нулю. Таким образом, пунктирная стрелка — изоморфизм, что и означает равенство отображений $p_{1|Z_\varphi} = p_{2|Z_\varphi}$.

Чтобы построить обратное вложение $\Delta(\mathbb{P}(W)) \subset Z_\varphi$, заметим, что при диагональном вложении $\Delta : \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(W) \times \mathbb{P}(W)$ имеем $\Delta^*\varphi = \alpha \circ \beta = 0$, значит Δ пропускается через Z_φ.

Итак, $Z_\varphi = \Delta(\mathbb{P}(W))$ и значит $\mathscr{I}_{Z_\varphi}$ — идеал диагонали. Вспоминая определение схемы нулей, получаем сюръекцию $K \boxtimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1) \to \mathscr{I}$. Применяя функтор Δ^* получаем эпиморфизм $\Delta^*(K \boxtimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1)) = K(-1) \to \Delta^*\mathscr{I} = \Omega_{\mathbb{P}(W)}$. Но и $K(-1)$ и $\Omega_{\mathbb{P}(W)}$ являются локально свободными пучками ранга $n-1$ (для первого это верно по определению, а для второго следует из того, что проективное пространство покрывается аффинными пространствами, а на аффинном пространстве пучок дифференциалов локально свободен), значит этот морфизм — изоморфизм. Теперь вспоминая определение пучка K, получаем искомую точную последовательность. $\square$

Упражнение 5. *Проверьте, что для грассманиана* $\mathrm{Gr}(k, W)$
(a) *существует эпиморфизм* $\mathscr{U}^\perp \boxtimes \mathscr{U} \to \mathscr{I}$, *где* $\mathscr{I}$ *— пучок идеалов диагонали;*
(b) *он индуцирует изоморфизм* $\Omega_{\mathrm{Gr}(k,W)} \cong \mathscr{U}^\perp \otimes \mathscr{U}$.

Лекция III. Грассманианы

9. Грассманиан

Пусть W — векторное пространство размерности n. В проективном пространстве $\mathbb{P}(\bigwedge^k W)$ рассмотрим множество поливекторов минимально ранга. Заметим, что для поливектора $\lambda \in \bigwedge^k W$ минимальный ранг равен k, причем он достигается в точности на поливекторах, лежащих в одномерных подпространствах $\bigwedge^k U \subset \bigwedge^k W$, где $U \subset W$ — подпространство размерности k. В самом деле, по определению ранг λ — это ранг r морфизма свертки $W^* \xrightarrow{\lambda} \bigwedge^{k-1} W$, то есть коразмерность его ядра $K = \mathrm{Ker}(\lambda)$. В силу кососимметричности λ, ясно что $\lambda \in \bigwedge^k(K^\perp) \subset \bigwedge^k W$, где $K^\perp \subset W$ — аннулятор K. Поэтому при $\lambda \neq 0$ должно быть $\dim K^\perp \geq k$, откуда $r = \operatorname{codim} K = \dim K^\perp \geq k$, а если достигается равенство, то $\lambda \in \bigwedge^k U$, где $U = K^\perp$.

Рассмотрим множество X всех поливекторов ранга k в пространстве $\mathbb{P}(\bigwedge^k W)$. Тавтологический морфизм $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^k W)}(-1) \to \bigwedge^k W \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^k W)}$ дает морфизм

$$\varphi : \textstyle\bigwedge^{k-1} W^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^k W)}(-1) \to W \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^k W)}$$

(он послойно двойственный к морфизму, рассмотренному выше). Введем на X схемную структуру занулением $\wedge^{k+1}\varphi$ (таким образом, $X = D_k(\varphi)$ — детерминанталь морфизма φ). Ясно, что на X ранг φ постоянен и равен k, поэтому

$$\mathscr{U} = \operatorname{Im} \varphi_{|X}, \qquad W/\mathscr{U} := \operatorname{Coker} \varphi_{|X}, \quad \text{и} \quad \mathscr{U}^\perp := (W/\mathscr{U})^*$$

— расслоения ранга k и $n-k$ соответственно. Многообразие X называется **грассманианом k-мерных подпространств в** W и обозначается $\mathrm{Gr}(k, W)$ или $\mathrm{Gr}(k, n)$. Расслоения $\mathscr{U}$ и $\mathscr{U}^*$ называются **тавтологическим подрасслоением** и **двойственным тавтологическим расслоением**, а расслоения $W/\mathscr{U}$ и $\mathscr{U}^\perp$ — **тавтологическим факторрасслоением** и **расслоением аннуляторов**. По определению на $\mathrm{Gr}(k, W)$ имеем точные последовательности расслоений

$$0 \to \mathscr{U} \to W \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(k,W)} \to W/\mathscr{U} \to 0 \qquad \text{и} \qquad 0 \to \mathscr{U}^\perp \to W^* \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(k,W)} \to \mathscr{U}^* \to 0,$$

называемые **тавтологическими**. Вложение $\mathrm{Gr}(k, W) \to \mathbb{P}(\bigwedge^k W)$ называется **вложением Плюккера**.

Следующее свойство является аналогом универсального свойства проективного пространства.

Предложение 9.1 (Универсальное свойство грассманиана)**.** *Пусть S — произвольная схема. Тогда*

$$\mathrm{Map}(S, \mathrm{Gr}(k, W)) = \\ = \{(E, \varepsilon) \mid E \text{ — расслоение ранга } k \text{ на } S,\ \varepsilon : E \to W \otimes \mathscr{O}_S \text{ — вложение расслоений}\}$$

(пары (E, ε) и (E', ε)) эквивалентны, если существует изоморфизм $\xi : E \to E'$, такой что $\epsilon = \epsilon' \circ \xi$). При этом композиция $S \xrightarrow{(E,\varepsilon)} \mathrm{Gr}(k, W) \longrightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^k W)$ задается вложением $\bigwedge^k E \xrightarrow{\wedge^k \varepsilon} \bigwedge^k W \otimes \mathscr{O}_S$.

Доказательство. Морфизму $f : S \to \mathrm{Gr}(k, W)$ сопоставим вложение расслоений, являющееся обратным образом тавтологического вложения

$$f^*\mathscr{U} \to f^*(W \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(k,W)}) = W \otimes \mathscr{O}_S.$$

Обратно, пусть (E, ε) расслоение с вложением в $W \otimes \mathscr{O}_S$. Рассмотрим морфизм

$$\wedge^k \varepsilon : \textstyle\bigwedge^k E \to \bigwedge^k W \otimes \mathscr{O}_S.$$

Ясно, что $\wedge^k \varepsilon$ — вложение линейного подрасслоения, поэтому по универсальному свойству проективного пространства существует морфизм $\bar{f} : S \to \mathbb{P}(\bigwedge^k W)$, такой что $\bar{f}^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^k W)}(-1) \cong \bigwedge^k E$. При этом очевидно, что морфизм $\bar{f}^*\varphi : \bigwedge^{k-1} W^* \otimes \bigwedge^k E \to W \otimes \mathscr{O}_S$ раскладывается в композицию

$$\textstyle\bigwedge^{k-1} W^* \otimes \bigwedge^k E \xrightarrow{\ \wedge^{k-1}\varepsilon^*\ } \bigwedge^{k-1} E^* \otimes \bigwedge^k E = E \xrightarrow{\ \varepsilon\ } W \otimes \mathscr{O}_S$$

Отсюда видно, что $\bar f^*(\wedge^{k+1}\varphi) = 0$, так как $\bar f^*\varphi$ пропускается через расслоение E ранга k, поэтому морфизм $\bar f$ пропускается через морфизм $f : S \to \mathrm{Gr}(k, W)$. Кроме того, ясно, что обратный образ вложения $\mathscr{U} \to W \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(k,W)}$ совпадает с исходным морфизмом $\varepsilon : E \to W \otimes \mathscr{O}_S$. □

Следствие 9.2. *Пусть* $\dim W = n$. *Тогда*

$$\mathrm{Gr}(k, W) \cong \mathrm{Gr}(n-k, W^*), \qquad \mathrm{Gr}(1, W) \cong \mathbb{P}(W), \quad \text{и} \quad \mathrm{Gr}(n-1, W) \cong \mathbb{P}(W^*).$$

Доказательство. В самом деле, тавтологическое вложение $\mathscr{U}^\perp \to W^* \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(k,W)}$ задает морфизм $\mathrm{Gr}(k, W) \to \mathrm{Gr}(n-k, W^*)$. Обратный морфизм строится аналогично. Далее, тавтологическое расслоение на $\mathrm{Gr}(1, W)$ линейно, поэтому вложение $\mathscr{U} \to W \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(1,W)}$ задает морфизм $\mathrm{Gr}(1, W) \to \mathbb{P}(W)$, а вложение $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1) \to W \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}$ — морфизм $\mathbb{P}(W) \to \mathrm{Gr}(1, W)$, которые очевидно взаимно обратны. Третий изоморфизм является немедленным следствием двух первых. □

10. Уравнения Плюккера

Опишем теперь пучок идеалов грассманиана $X = \mathrm{Gr}(k, W)$ в плюккеровом вложении. По определению, X — схема нулей морфизма

$$\wedge^{k+1}\varphi\colon \textstyle\bigwedge^{k+1}(\bigwedge^{k-1}W^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^k W)}(-1)) \to \bigwedge^{k+1}W \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^k W)}.$$

Поскольку $\bigwedge^{k+1}(\bigwedge^{k-1}W^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^k W)}(-1)) \cong \bigwedge^{k+1}(\bigwedge^{k-1}W^*) \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^k W)}(-k-1)$, этот морфизм можно рассматривать как матрицу, элементы которой — однородные многочлены степени $k{+}1$ от координат. Иначе говоря, X высекается гиперповерхностями степени $k+1$. Однако, на самом деле можно показать, что X высекается даже квадриками.

Предложение 10.1. *Грассманиниан* $\mathrm{Gr}(k, W)$ *в* $\mathbb{P}(\bigwedge^k W)$ *является схемой нулей композиции морфизмов*

$$\psi : \textstyle\bigwedge^{k-1}W^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^k W)}(-1) \xrightarrow{\varphi} W \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^k W)} \xrightarrow{\varphi'} \bigwedge^{k+1}W \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^k W)}(1),$$

где морфизм φ' *получается из тавтологического морфизма* $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^k W)}(-1) \to \bigwedge^k W \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^k W)}$ *подкруткой и умножением на* W.

Доказательство. Основой доказательства является следующий факт. Пусть $\lambda \in \bigwedge^k W$. Тогда отображение умножения на λ из W в $\bigwedge^{k+1}W$ имеет ранг не меньше $n-k$, причем ранг $n-k$ достигается ровно для разложимых поливекторов. В самом деле, пусть вектор w лежит в ядре умножения на λ, то есть $w \wedge \lambda = 0$. Пусть $W' = W/\mathsf{k}w$, то есть существует точная последовательность $0 \to \mathsf{k}w \to W \to W' \to 0$. Переходя к внешним степеням, получаем последовательность $0 \to \bigwedge^{k-1}W' \wedge w \to \bigwedge^k W \to \bigwedge^k W' \to 0$ (морфизм $- \wedge w : \bigwedge^{k-1}W \to \bigwedge^k W$ очевидно пропускается через $\bigwedge^{k-1}W'$, на котором является вложением). Таким образом имеем диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \bigwedge^{k-1}W' \wedge w \arrow[r] & \bigwedge^k W \arrow[r] \arrow[d, "\wedge w"] & \bigwedge^k W' \arrow[r] \arrow[dll, dotted] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bigwedge^k W' \wedge w \arrow[r] & \bigwedge^{k+1} W \arrow[r] & \bigwedge^{k+1} W' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Согласно сделанным выше замечаниям ядро морфизма $\wedge w$ равно $\bigwedge^{k-1}W' \wedge w$, поэтому равенство $\lambda \wedge w = 0$ означает существование $\lambda' \in \bigwedge^{k-1}W$, такого что $\lambda = \lambda' \wedge w$. Пользуясь этим фактом заключаем, что если $K = \mathrm{Ker}(- \wedge \lambda)$ имеет размерность k, то $\lambda \in \bigwedge^k K \subset \bigwedge^k W$, и кроме того, больше чем k размерность K быть не может.

Тем самым докачзано, что размерность ядра морфизма φ' не превосходит k, то есть его ранг не ниже чем $n-k$, то есть $D_{n-k-1}(\varphi') = \emptyset$. Поэтому, согласно лемме 10.2, приведенной ниже, имеем $D_k(\varphi|_{Z_\psi}) = Z_\psi$, то есть $Z_\psi \subset D_k(\varphi) = \mathrm{Gr}(k, W)$.

Наоборот, как мы видели при ограничении на $\mathrm{Gr}(k,W)$ первый из морфизмов, входящих в определение ψ, факторизуется как $\bigwedge^{k-1}W^*\otimes\mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(k,W)}(-1)\to\mathscr{U}\to W\otimes\mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(k,W)}$. С другой стороны, из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{U} \arrow[r] \arrow[d] & W\otimes\mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(k,W)} \arrow[d] \\
\bigwedge^{k+1}\mathscr{U}\otimes\mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(k,W)}(1) \arrow[r] & \bigwedge^{k+1}W\otimes\mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(k,W)}(1)
\end{tikzcd}$$

и равенства $\bigwedge^{k+1}\mathscr{U}=0$ (ввиду того, что ранг $\mathscr{U}$ равен k), следует, что $\psi_{|\,\mathrm{Gr}(k,W)}=0$. Тем самым плюккерово вложение $\mathrm{Gr}(k,W)\to\mathbb{P}(\bigwedge^k W)$ пропускается через Z_ψ, то есть $\mathrm{Gr}(k,W)\subset Z_\psi$. Вместе со вложением, доказанным раньше, это дает равенство $\mathrm{Gr}(k,W)=Z_\psi$. □

Лемма 10.2. *Пусть Z — схема, а $\mathscr{E}\xrightarrow{\varphi}\mathscr{F}\xrightarrow{\varphi'}\mathscr{G}$ — комплекс морфизмов векторных расслоений, то есть $\varphi'\circ\varphi=0$. Пусть ранг $\mathscr{F}$ равен n, и для некоторого $0\le k\le n$ выполнено равенство $D_{n-k-1}(\varphi')=\emptyset$. Тогда $D_k(\varphi)=Z$.*

Доказательство. Вопрос локальный, поэтому можно считать, что Z — спектр локального кольца R с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$, то есть все расслоения тривиальны и морфизмы φ и φ' задаются матрицами с коэффициентами из R. Условие $D_{n-k-1}(\varphi')=\emptyset$ означает, что идеал порожденный всеми минорами размера $n-k$ матрицы φ' является единичным идеалом, следовательно по крайней мере один из миноров не лежит в $\mathfrak{m}$, а значит обратим. Поэтому матрицу φ' заменой базисов можно привести к виду

$$\varphi'=\begin{pmatrix}1_{n-k}&0\\0&*\end{pmatrix}$$

Если теперь записать матрицу φ в блочном виде

$$\varphi=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},$$

то условие $\varphi'\circ\varphi=0$ влечет $a=b=0$, то есть φ имеет лишь k ненулевых строк. В частности, все миноры размера $k+1$ в матрице φ равны нулю, а значит $D_k(\varphi)=X$. □

Морфизм ψ соответствует сечению расслоения $\bigwedge^{k-1}W\otimes\bigwedge^{k+1}W\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^k W)}(2)$, то есть набору квадрик, являющихся образами отображения $\bigwedge^{k-1}W^*\otimes\bigwedge^{k+1}W^*\to S^2(\bigwedge^2W^*)$. Согласно определению морфизма ψ, оно задается как композиция отображений

$$\bigwedge^{k-1}W^*\otimes\bigwedge^{k+1}W^*\to\bigwedge^{k-1}W^*\otimes W^*\otimes\bigwedge^kW^*\to\bigwedge^kW^*\otimes\bigwedge^kW^*\to S^2(\bigwedge^kW^*)$$

(первое отображение — естественное вложение $\bigwedge^{k+1}W^*\hookrightarrow W^*\otimes\bigwedge^kW^*$, второе — внешнее произведение $\bigwedge^{k-1}W^*\otimes W^*\to\bigwedge^kW^*$, а третье — симметризация $\bigwedge^kW^*\otimes\bigwedge^kW^*\to S^2(\bigwedge^2W^*)$). В частности, это отображение легко вычислить на произведениях базисных векторов:

$$\begin{aligned}
x_{i_1\dots i_{k-1}}\otimes x_{j_1\dots j_{k+1}}&\mapsto x_{i_1\dots i_{k-1}}\otimes\sum_{s=1}^{k+1}(-1)^{s-1}(x_{j_s}\otimes x_{j_1\dots j_{s-1}j_{s+1}\dots j_{k+1}})\\
&\mapsto\sum_{s=1}^{k+1}(-1)^{s-1}x_{i_1\dots i_{k-1}j_s}x_{j_1\dots j_{s-1}j_{s+1}\dots j_{k+1}}=:Q_{i_1,\dots,i_{k-1};j_1,\dots,j_{k+1}}(x).
\end{aligned}$$

Квадрики $Q_{i_1,\dots,i_{k-1};j_1,\dots,j_{k+1}}(x)$ называются квадриками Плюккера.

Пример 10.3. Пусть $k=2$, $n=4$. Тогда

$$Q_{1;2,3,4}=x_{12}x_{34}-x_{13}x_{24}+x_{14}x_{23},\qquad Q_{2;1,3,4}=-x_{12}x_{34}-x_{23}x_{14}+x_{24}x_{13}=-Q_{1;2,3,4}$$

Аналогично $Q_{3;1,2,4}=-Q_{4;1,2,3}=Q_{1;2,3,4}$. С другой стороны, $Q_{1;1,2,3}=0-x_{12}x_{13}+x_{13}x_{12}=0$. Аналогично равны нулю и все остальные квадрики. Таким образом $\mathrm{Gr}(2,4)\subset\mathbb{P}^5$ — квадрика.

Кстати, любая невырожденная квадрика в $\mathbb{P}^5$ над алгебраически замкнутым полем характеристики большей двух приводится к плюккеровому виду, так что любая такая квадрика изоморфна грассманиану $\mathrm{Gr}(2,4)$.

Замечание 10.4. Легко видеть, что если $\{i_1,\dots,i_{k-1}\}\subset\{j_1,\dots,j_{k+1}\}$, то $Q_{i_1,\dots,i_{k-1};j_1,\dots,j_{k+1}}=0$.

Пример 10.5. Пусть $k=2$, $n=5$. Тогда

$$Q_{1;2,3,4}=x_{12}x_{34}-x_{13}x_{24}+x_{14}x_{23},\ Q_{1;2,3,5}=x_{12}x_{35}-x_{13}x_{25}+x_{15}x_{23},\ Q_{1;2,4,5}=x_{12}x_{45}-x_{14}x_{25}+x_{15}x_{24},$$
$$Q_{1;3,4,5}=x_{13}x_{45}-x_{14}x_{35}+x_{15}x_{34},\qquad Q_{2;3,4,5}=x_{23}x_{45}-x_{24}x_{35}+x_{25}x_{34}.$$

Остальные квадрики либо совпадают с этими, либо нулевые, т.е. $\mathrm{Gr}(2,5)\subset\mathbb{P}^9$ — пересечение пяти квадрик.

Важно понимать, что за исключением тривиальных случаев $\mathrm{Gr}(2,4)$, $\mathrm{Gr}(1,n)$ и $\mathrm{Gr}(n-1,n)$, грассманиан *не является* полным пересечением содержащих его квадрик (и вообще не является полным пересечением).

11. Локальная структура и дифференциалы

Опишем теперь локальное строение грассманиана. Для этого рассмотрим пересечение $\mathrm{Gr}(k,W)$ с аффинной картой в $\mathbb{P}(\bigwedge^k W)$, заданной неравенством $x_{12\dots k}\neq 0$. Нам понадобится

Лемма 11.1 (Универсальное свойство аффинного пространства)**.** *Пусть V — векторное пространство, а $\mathbb{A}(V)=\operatorname{Spec}S^\bullet(V^*)$ — соответствующее аффинное пространство. Тогда*

$$\mathrm{Map}(S,\mathbb{A}(V))=\Gamma(S,V\otimes\mathscr{O}_S).$$

Доказательство. Так как $\mathbb{A}(V)$ аффинно, $\mathrm{Map}(S,\mathbb{A}(V))=\mathrm{Hom}_{\mathrm{alg}}(S^\bullet(V^*),\Gamma(S,\mathscr{O}_S))$. Так как $S^\bullet(V^*)$ является свободной коммутативной алгеброй, имеем

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{alg}}(S^\bullet(V^*),\Gamma(S,\mathscr{O}_S))=\mathrm{Hom}(V^*,\Gamma(S,\mathscr{O}_S))=V\otimes\Gamma(S,\mathscr{O}_S)=\Gamma(S,V\otimes\mathscr{O}_S),$$

что и требовалось. $\square$

В частности, на $\mathbb{A}(V)$ имеется “тавтологическое сечение” $s\in\Gamma(\mathbb{A}(V),V\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{A}(V)})$, соответствующее согласно лемме тождественному морфизму $\mathbb{A}(V)\to\mathbb{A}(V)$.

Предложение 11.2. *Открытое подмножество* $\mathrm{Gr}(k,W)\cap\{x_{12\dots k}\neq 0\}$ *в* $\mathrm{Gr}(k,W)$ *изоморфно аффинному пространству* $\mathbb{A}^{k(n-k)}$.

Доказательство. Пусть $U_1\subset W$ — подпространство в W, задаваемое как $U_1=\{x_1=\dots=x_k=0\}$. Выберем дополнительное к нему подпространство $U_0\subset W$ размерности k, так что $W=U_0\oplus U_1$. Построим морфизм $\mathbb{A}^{k(n-k)}=\mathbb{A}(\mathrm{Hom}(U_0,U_1))\to\mathrm{Gr}(k,W)$. Для этого рассмотрим тавтологическое сечение $s:\mathscr{O}_{\mathbb{A}(\mathrm{Hom}(U_0,U_1))}\to\mathrm{Hom}(U_0,U_1)\otimes\mathscr{O}_{\mathrm{Hom}(U_0,U_1)}$. Оно индуцирует морфизм векторных расслоений $U_0\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{A}(\mathrm{Hom}(U_0,U_1))}\to U_1\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{A}(\mathrm{Hom}(U_0,U_1))}$ и далее морфизм

$$U_0\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{A}(\mathrm{Hom}(U_0,U_1))}\xrightarrow{(1,s)^T}(U_0\oplus U_1)\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{A}(\mathrm{Hom}(U_0,U_1))}=\!=W\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{A}(\mathrm{Hom}(U_0,U_1))}.$$

Ясно, что ранг этого морфизма во всех точках равен k, так что в силу универсального свойства грассманниана он задает морфизм $\mathbb{A}(\mathrm{Hom}(U_0,U_1))\to\mathrm{Gr}(k,W)$. При этом композиция этого морфизма с плюккеровым вложением задается минорами матрицы $(1,s)^T$. Первый из этих миноров равен 1, поэтому образ отображения содержится в $\mathrm{Gr}(k,W)\cap\{x_{12\dots k}\neq 0\}$.

Обратно, пусть $X=\mathrm{Gr}(k,W)\cap\{x_{12\dots k}\neq 0\}$. Очевидно, что детерминант композиции морфизмов $\mathscr{U}_{|X}\to W\otimes\mathscr{O}_X\to U_0\otimes\mathscr{O}_X$ равен $x_{12\dots k}$, поэтому она является изоморфизмом. Пользуясь этим изоморфизмом, получим морфизм $U_0\otimes\mathscr{O}_X \cong \mathscr{U}_{|X} \to W\otimes\mathscr{O}_X \to U_1\otimes\mathscr{O}_X$, то есть сечение расслоения $\mathrm{Hom}(U_0,U_1)\otimes\mathscr{O}_X$. В силу леммы 11.1 оно дает морфизм $X\to\mathbb{A}(\mathrm{Hom}(U_0,U_1)) = \mathbb{A}^{k(n-k)}$.

Построенные отображения очевидно взаимно обратны. □

Поскольку множества $x_{i_1i_2\dots i_k}\neq 0$ покрывают все $\mathbb{P}(\bigwedge^k W)$, заключаем что $\mathrm{Gr}(k,W)$ покрывается открытыми подмножествами, каждое из которых изоморфно аффинному пространству.

Следствие 11.3. *Грассманиан* $\mathrm{Gr}(k,n)$ *является гладким многообразием размерности* $k(n-k)$.

Теперь вычислим на $\mathrm{Gr}(k,W)$ пучок дифференциалов.

Теорема 11.4. *Пусть* W *— векторное пространтсво над* k *размерности* n. *Тогда*

$$\Omega_{\mathrm{Gr}(k,W)} \cong \mathscr{U}\otimes\mathscr{U}^\perp.$$

Доказательство. Рассуждение аналогично вычислению дифференциалов проективного пространства. Пусть $p_1,p_2\colon \mathrm{Gr}(k,W)\times\mathrm{Gr}(k,W)\to\mathrm{Gr}(k,W)$ — проекции, а α и β — тавтологические морфизмы

$$0\to\mathscr{U}\xrightarrow{\alpha} W\otimes\mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(k,W)}\xrightarrow{\beta} W/\mathscr{U}\to 0$$

На $\mathrm{Gr}(k,W)\times\mathrm{Gr}(k,W)$ рассмотрим композицию морфизмов

$$p_1^*\mathscr{U}\xrightarrow{p_1^*\alpha} W\otimes\mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(k,W)\times\mathrm{Gr}(k,W)}\xrightarrow{p_2^*\beta} p_2^*(W/\mathscr{U}).$$

Покажем, что ее схема нулей Z_φ совпадает с диагональю $\Delta=\Delta(\mathrm{Gr}(k,W))$.

В самом деле, чтобы проверить, что $Z_\varphi\subset\Delta$ надо убедиться в том, что $p_{1|Z_\varphi}=p_{2|Z_\varphi}$. Для этого заметим, что проекции p_1 и p_2 определяются (в смысле универсального свойства грассманиана) ограничениями на Z_φ морфизмов $p_i^*\alpha\colon p_i^*\mathscr{U}\to W\otimes\mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(k,W)\times\mathrm{Gr}(k,W)}$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & & p_1^*\mathscr{U}_{|Z_\varphi} \arrow[dll, dashed] \arrow[d, "p_1^*\alpha_{|Z_\varphi}"] \arrow[dr, "\varphi_{|Z_\varphi}"] & & \\
0 \arrow[r] & p_2^*\mathscr{U}_{|Z_\varphi} \arrow[r, "p_2^*\alpha_{|Z_\varphi}"] & W\otimes\mathscr{O}_{Z_\varphi} \arrow[r, "p_2^*\beta_{|Z_\varphi}"] & p_2^*(W/\mathscr{U})_{|Z_\varphi} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Так как $\varphi_{|Z_\varphi}=0$, получаем пунктирную стрелку. Так как $p_1^*\alpha$ и $p_2^*\alpha$ являются вложениями расслоений ранга k, эта стрелка тоже везде имеет ранг k. Следовательно, в силу леммы с первой лекции пунктирная стрелка является изоморфизмом расслоений (так как ее ядро и коядро — расслоения ранга 0). Значит отображения $p_1|_{Z_\varphi}$ и $p_2|_{Z_\varphi}$ задаются эквивалентными (в смысле универсального свойства грассманиана) данными, значит $p_1|_{Z_\varphi}=p_2|_{Z_\varphi}$, то есть $Z_\varphi\subset\Delta$.

Чтобы проверить обратное вложение $\Delta\subset Z_\varphi$, заметим, что $\Delta^*\varphi=\beta\circ\alpha=0$, значит Δ пропускается через Z_φ.

Итак, $Z_\varphi=\Delta(\mathrm{Gr}(k,W))$ и значит $\mathscr{I}_{Z_\varphi}$ — идеал диагонали. Вспоминая определение схемы нулей, получаем сюръекцию $p_1^*\mathscr{U}\otimes p_2^*\mathscr{U}^\perp\to\mathscr{I}_\Delta$. Применяя функтор Δ^* получаем эпиморфизм

$$\mathscr{U}\otimes\mathscr{U}^\perp=\Delta^*(p_1^*\mathscr{U}\otimes p_2^*\mathscr{U}^\perp)\twoheadrightarrow\Delta^*\mathscr{I}_\Delta=\Omega_{\mathrm{Gr}(k,W)}.$$

Но пучки $\mathscr{U}\otimes\mathscr{U}^\perp$ и $\Omega_{\mathrm{Gr}(k,W)}$ являются локально свободными пучками ранга $k(n-k)$ (для первого это верно по определению, а для второго следует Предложения 11.2), значит этот морфизм — изоморфизм. □

Лекция IV. Относительные конструкции

12. Аффинизация и проективизация расслоения

Пусть X — алгебраическое многообразие, а $\mathscr{E}$ — векторное расслоение ранга n на нем. Определим

$$\mathbb{A}_X(\mathscr{E}) := \mathrm{Spec}_X\left(\bigoplus_{i=0}^{\infty} S^i\mathscr{E}^*\right), \qquad \mathbb{P}_X(\mathscr{E}) := \mathrm{Proj}_X\left(\bigoplus_{i=0}^{\infty} S^i\mathscr{E}^*\right),$$

где $\bigoplus_{i=0}^{\infty} S^i\mathscr{E}^*$ — симметрическая алгебра, порожденная двойственным расслоением $\mathscr{E}^*$.

В случае, когда X — точка, а значит $\mathscr{E}$ — векторное пространство, эти формулы определяют аффинное и проективное пространства, ассоциированные с векторным. В общем же случае они называются **аффинизацией** и **проективизацией векторного расслоения** соответственно. Еще иногда **аффинизацию** называют тотальным пространством векторного расслоения.

По определению аффинизация и проективизация снабжены морфизмами

$$a\colon \mathbb{A}_X(\mathscr{E}) \to X \qquad \text{и} \qquad p\colon \mathbb{P}_X(\mathscr{E}) \to X.$$

Лемма 12.1. *Морфищмы $a\colon \mathbb{A}_X(\mathscr{E}) \to X$ и $p\colon \mathbb{P}_X(\mathscr{E}) \to X$ являются локально тривиальными расслоениями в топологии Зариского со слоем $\mathbb{A}^n$ и $\mathbb{P}^{n-1}$ соответственно.*

Доказательство. По определению относительный (проективный) спектр получаются склейкой обычных (проективных) спектров над открытыми аффинными подмножествами в X. Поэтому достаточно проверить, что у X есть такое открытое покрытие, над каждым элементом которого у нас получается декартово произведение. Поскольку пучок $\mathscr{E}$ локально свободен, у X есть такое покрытие, над каждым элементом которого пучок $\mathscr{E}$ тривиален. Поэтому достаточно проверить, что если $\mathscr{E}$ тривиален (то есть $\mathscr{E} \cong V \otimes \mathscr{O}_X$, где V — векторное пространство), то $\mathbb{A}_X(\mathscr{E}) \cong \mathbb{A}(V) \times X$ и $\mathbb{P}_X(\mathscr{E}) \cong \mathbb{P}(V) \times X$. Но очевидно, что в этом случае

$$\bigoplus_{i=0}^{\infty} S^i\mathscr{E}^* = \bigoplus_{i=0}^{\infty} S^i(V \otimes \mathscr{O}_X)^* = \left(\bigoplus_{i=0}^{\infty} S^iV^*\right) \otimes \mathscr{O}_X,$$

откуда сразу следуют искомые формулы. □

13. Универсальное свойство аффинизации

Так же как и в “абсолютном случае”, на $\mathbb{A}_X(\mathscr{E})$ и $\mathbb{P}_X(\mathscr{E})$ есть тавтологическое сечение и тавтологическое подрасслоение. Первое из них построить совсем просто. Заметим, что

$$a_*a^*\mathscr{E} \cong \mathscr{E} \otimes a_*\mathscr{O}_{\mathbb{A}_X(\mathscr{E})} \cong \mathscr{E} \otimes \left(\bigoplus_{i=0}^{\infty} S^i\mathscr{E}^*\right) \cong \bigoplus_{i=0}^{\infty}(\mathscr{E} \otimes S^i\mathscr{E}^*)$$

(первый изоморфизм — формула проекции, а второй — определение $\mathbb{A}_X(\mathscr{E})$). Слагаемое с номером $i = 1$ равно $\mathscr{E} \otimes \mathscr{E}^*$, поэтому его глобальные сечения равны $\Gamma(X, \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}^*) \cong \mathrm{End}(\mathscr{E})$ и содержат выделенный элемент $\mathrm{id}_{\mathscr{E}}$. Поскольку $\Gamma(X, a_*a^*\mathscr{E}) \cong \Gamma(\mathbb{A}_X(\mathscr{E}), a^*\mathscr{E})$, он задает глобальное сечение пучка $a^*\mathscr{E}$ на $\mathbb{A}_X(\mathscr{E})$. Оно и называется **тавтологическим сечением**. По построению, тавтологическое сечение *линейно на слоях* морфизма a (так как соответствует слагаемому с $i = 1$).

Если расслоение $\mathscr{E}$ тривиально, то есть $\mathscr{E} \cong V \otimes \mathscr{O}_X$, так что $\mathbb{A}_X(\mathscr{E}) \cong \mathbb{A}(V) \times X$, то

$$a^*\mathscr{E} \cong a^*(V \otimes \mathscr{O}_X) \cong V \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{A}_X(\mathscr{E})}$$

и тавтологическое сечение является обратным образом тавтологического сечения пучка $V \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{A}(V)}$ на $\mathbb{A}(V)$ относительно проекции $\mathbb{A}(V) \times X \to \mathbb{A}(V)$.

Лемма 13.1 (Универсальное свойство аффинизации). *Имеется естественный изоморфизм*

$$\mathrm{Map}(S, \mathbb{A}_X(\mathscr{E})) = \{(\phi, \sigma) \mid \phi \in \mathrm{Map}(S, X),\ \sigma \in \Gamma(S, \phi^*\mathscr{E})\}.$$

Доказательство. Морфизму $f\colon S \to \mathbb{A}_X(\mathscr{E})$ сопоставим пару $\phi = a \circ f$, $\sigma = f^*(s)$, где s — тавтологическое сечение расслоения $a^*\mathscr{E}$.

Обратно, пусть дана пара (ϕ, σ). Покроем X аффинными картами X_i, на которых $\mathscr{E}$ тривиально (то есть $\mathscr{E}|_{X_i} \cong V_i \otimes \mathscr{O}_{X_i}$). Пусть $S_i = \phi^{-1}(X_i)$, $\phi_i = \phi|_{S_i}\colon S_i \to X_i$ и

$$\sigma_i = \sigma|_{S_i} \in \Gamma(S_i, \phi_i^*(\mathscr{E}|_{X_i})) \cong \Gamma(S_i, \phi_i^*(V_i \otimes \mathscr{O}_{X_i})) \cong \Gamma(S_i, V_i \otimes \mathscr{O}_{S_i}).$$

Тогда σ_i задает отображение $S_i \to \mathbb{A}(V_i)$, и вместе с ϕ_i они задают отображение

$$f_i\colon S_i \xrightarrow{(\sigma_i, \phi_i)} \mathbb{A}(V_i) \times X_i \cong \mathbb{A}_{X_i}(\mathscr{E}|_{X_i}) \cong \mathbb{A}_X(\mathscr{E}) \times_X X_i \subset \mathbb{A}_X(\mathscr{E}).$$

Ясно, что на пересечениях $S_i \cap S_j$ ограничения отображений f_i и f_j совпадают, а значит они склеиваются в общее отображение $f\colon S \to \mathbb{A}_X(\mathscr{E})$.

Легко видеть, что приведенные конструкции взаимно обратны. □

Следствие 13.2. *Всякий морфизм расслоений $\varepsilon\colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ индуцирует морфизм их аффинизаций $\mathbb{A}_X(\mathscr{E}) \to \mathbb{A}_X(\mathscr{E}')$, коммутирующий с проекциями на X.*

Доказательство. Пусть $s \in \Gamma(\mathbb{A}_X(\mathscr{E}), a^*\mathscr{E})$ — тавтологическое сечение. Тогда естественный морфизм $a\colon \mathbb{A}_X(\mathscr{E}) \to X$ вместе с сечением $a^*(\varepsilon)(s) \in \Gamma(\mathbb{A}_X(\mathscr{E}), a^*(\mathscr{E}'))$ задают (в силу универсального свойства $\mathbb{A}_X(\mathscr{E}')$) морфизм $\mathbb{A}_X(\mathscr{E}) \to \mathbb{A}_X(\mathscr{E}')$. Он по построению коммутирует с проекцией на X. □

Упражнение 6. *Покажите, что сечения отображения a (то есть отображения $f\colon X \to \mathbb{A}_X(\mathscr{E})$, такие что $a \circ f = \mathrm{id}_X$) находятся в биекции с глобальными сечениями расслоения $\mathscr{E}$ на X.*

14. Универсальное свойство проективизации

Согласно теореме Серра категория когренетных пучков на $\mathbb{P}_X(\mathscr{E})$ эквивалентна факторкатегории градуированных пучков модулей над градуированным пучком алгебр $\mathscr{A}^\bullet := \bigoplus_{i=0}^\infty S^i\mathscr{E}^*$ по подкатегории модулей, почти все компоненты которых (то есть все кроме конечного числа) равны нулю. При этом свободный модуль $\mathscr{A}^\bullet$ соответствует структурному пучку $\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})}$, а свободный модуль со сдвинутой на единицу градуировкой $\mathscr{A}^\bullet(1) := \bigoplus_{i=0}^\infty S^{i+1}\mathscr{E}^*$ — “скручивающему” линейному расслоению $\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(1)$. Естественный морфизм градуированных $\mathscr{A}^\bullet$-модулей

$$\mathscr{A}^\bullet = \bigoplus_{i=0}^\infty S^i\mathscr{E}^* \to \bigoplus_{i=0}^\infty (\mathscr{E} \otimes S^{i+1}\mathscr{E}^*) = \mathscr{E} \otimes \mathscr{A}^\bullet(1)$$

(переводящий $1 \in \mathscr{A}^\bullet_0$ в $\mathrm{id}_{\mathscr{E}} \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}^* = \mathscr{E} \otimes \mathscr{A}^\bullet_1 = \mathscr{E} \otimes \mathscr{A}^\bullet(1)_0$) после сдвига градуировки задает морфизм пучков

$$\alpha\colon \mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(-1) \to p^*\mathscr{E}.$$

Двойственный к нему морфизм $p^*\mathscr{E}^* \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(1)$ в терминах градуированных модулей соответствует гомоморфизму умножения $\mathscr{E}^* \otimes \left(\bigoplus_{i=0}^\infty S^i\mathscr{E}^*\right) \to \bigoplus_{i=0}^\infty S^{i+1}\mathscr{E}^*$. Поскольку он сюръективен почти во всех (во всех кроме $i = -1$) компонентах градуировки, соответствующий морфизм пучков на $\mathbb{P}_X(\mathscr{E})$ тоже сюръективен, а значит α является вложением расслоений.

Лемма 14.1 (Универсальное свойство проективизации). *Имеется естественный изоморфизм*

$$\begin{aligned}\mathrm{Map}(S, \mathbb{P}_X(\mathscr{E})) = \{(\phi, L, \lambda) \mid \phi \in \mathrm{Map}(S, X),\ L &\text{ — \textit{линейное расслоение на} } S \text{ \textit{и}} \\ &\lambda\colon L \to \phi^*\mathscr{E} \text{ — \textit{вложение расслоений}}\}/\sim,\end{aligned}$$

с обычным отношением эквивалентности $(\phi, L, \lambda) \sim (\phi', L', \lambda')$, если $\phi = \phi'$ и существует изоморфизм $\xi\colon L \xrightarrow{\sim} L'$, такой что $\lambda = \lambda' \circ \xi$.

Доказательство. Морфизму $f\colon S \to \mathbb{P}_X(\mathscr{E})$ сопоставим тройку $\phi = p \circ f$, $L = f^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(-1)$, $\lambda = f^*(\alpha)$, где $\alpha\colon \mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(-1) \to p^*\mathscr{E}$ тавтологическое вложение.

Обратно, пусть дана тройка (ϕ, L, λ). Покроем X аффинными картами X_i, на которых $\mathscr{E}$ тривиально (то есть $\mathscr{E}|_{X_i} \cong V_i \otimes \mathscr{O}_{X_i}$). Пусть $S_i = \phi^{-1}(X_i)$, $\phi_i = \phi|_{S_i}\colon S_i \to X_i$, $L_i = L|_{S_i}$ и

$$\lambda_i = \lambda|_{S_i}\colon L_i \to \phi_i^*(\mathscr{E}|_{X_i}) \cong V_i \otimes \mathscr{O}_{S_i}.$$

Тогда λ_i задает отображение $S_i \to \mathbb{P}(V_i)$, и вместе с ϕ_i они задают отображение

$$f_i\colon S_i \xrightarrow{(\lambda_i,\phi_i)} \mathbb{P}(V_i) \times X_i \cong \mathbb{P}_{X_i}(\mathscr{E}|_{X_i}) \cong \mathbb{P}_X(\mathscr{E}) \times_X X_i \subset \mathbb{P}_X(\mathscr{E}).$$

Ясно, что на пересечениях $S_i \cap S_j$ ограничения отображений f_i и f_j совпадают, а значит они склеиваются в общее отображение $f\colon S \to \mathbb{P}_X(\mathscr{E})$.

Легко видеть, что приведенные конструкции взаимно обратны. □

Следствие 14.2. *Всякое вложение расслоений $\varepsilon\colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ индуцирует вложение их проективизаций $\bar\varepsilon\colon \mathbb{P}_X(\mathscr{E}) \to \mathbb{P}_X(\mathscr{E}')$, коммутирующий с проекциями на X и $\bar\varepsilon^*(\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E}')/X}(-1)) \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(-1)$.*

Доказательство. Пусть $\alpha\colon \mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(-1) \to p^*\mathscr{E}$ — тавтологическое вложение тавтологического расслоения. Тогда естественный морфизм $p\colon \mathbb{P}_X(\mathscr{E}) \to X$ вместе с тавтологическим расслоением $\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(-1)$ и вложением λ, определямым как композиция $\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(-1) \xrightarrow{\alpha} p^*\mathscr{E} \xrightarrow{p^*(\varepsilon)} p^*\mathscr{E}'$ задают (в силу универсального свойства $\mathbb{P}_X(\mathscr{E}')$) морфизм $\mathbb{P}_X(\mathscr{E}) \to \mathbb{P}_X(\mathscr{E}')$. Он по построению коммутирует с проекцией на X, а обратный образ $\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E}')/X}(-1)$ равен $\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(-1)$. То, что $\bar\varepsilon$ является замкнутым вложением легко проверить локально по X. □

Упражнение 7. *Покажите, что сечения отображения p (то есть отображения $f\colon X \to \mathbb{P}_X(\mathscr{E})$, такие что $p \circ f = \mathrm{id}_X$) находятся в биекции с линейными подрасслоениями в $\mathscr{E}$ на X.*

Важной особенностью проективизации (в отличии от аффинизации) является то, что ее результат не зависит от подкрутки векторного расслоения.

Лемма 14.3. *Пусть $\mathscr{L}$ — линейное расслоение на X. Тогда существует единственный изоморфизм $f\colon \mathbb{P}_X(\mathscr{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_X(\mathscr{E} \otimes \mathscr{L})$, такой что $f^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E}\otimes\mathscr{L})/X}(-1) \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(-1) \otimes p^*\mathscr{L}$.*

Доказательство. Аналогично предыдущему — если $\alpha\colon \mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(-1) \to p^*\mathscr{E}$ — тавтологическое вложение тавтологического расслоения, то естественный морфизм $p\colon \mathbb{P}_X(\mathscr{E}) \to X$ вместе с подкруткой тавтологического вложения $\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(-1) \otimes p^*\mathscr{L} \xrightarrow{\alpha\otimes\mathrm{id}_{p^*\mathscr{L}}} p^*(\mathscr{E} \otimes \mathscr{L})$ задают (в силу универсального свойства $\mathbb{P}_X(\mathscr{E} \otimes \mathscr{L})$) морфизм $f\colon \mathbb{P}_X(\mathscr{E}) \to \mathbb{P}_X(\mathscr{E} \otimes \mathscr{L})$. Он по построению коммутирует с проекцией на X, а $f^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E}\otimes\mathscr{L})/X}(-1) \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(-1) \otimes p^*\mathscr{L}$. Применяя аналогичную конструкцию к расслоению $\mathscr{L}^{-1}$, получаем также морфизм $g\colon \mathbb{P}_X(\mathscr{E} \otimes \mathscr{L}) \to \mathbb{P}_X(\mathscr{E})$. Взаимная обратность построенных морфизмов очевидна. □

Следствие 14.4. *Если V — векторное пространство, то $\mathbb{P}_X(V \otimes \mathscr{L}) \cong X \times \mathbb{P}(V)$, причем так что $\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(V\otimes\mathscr{L})/X}(-1) \cong \mathscr{L} \boxtimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1)$.*

Важно помнить, что разным представлениям многообразия в виде проективизации расслоения соответствуют разные линейные расслоения $\mathscr{O}(1)$. Это соответствие происходит через формулу

$$p_*\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(1) \cong \mathscr{E}^*.$$

В частности, подкрутка расслоения $\mathscr{E}$ на $p^*\mathscr{L}$ соответствует подкрутке $\mathscr{O}(1)$ на $p^*\mathscr{L}^*$.

15. Проективные вложения и уравнения

Вложить проективизацию расслоения в проективное пространство можно следующим способом. Допустим, расслоение $\mathscr{E}$ вкладывается в подкуртку тривиального расслоения $V \otimes \mathscr{L}$ на X (чтобы получить такое вложение, можно найти подкрутку $\mathscr{E}^* \otimes \mathscr{L}$ двойственного расслоения, которая порождалась бы глобальными сечениями, и положив $V = \Gamma(X, \mathscr{E}^* \otimes \mathscr{L})^*$, рассмотреть морфизм вычисления $V^* \otimes \mathscr{O}_X \twoheadrightarrow \mathscr{E}^* \otimes \mathscr{L}$, а затем взять двойственный морфизм $\mathscr{E} \otimes \mathscr{L}^* \hookrightarrow V \otimes \mathscr{O}_X$ и подкрутить его на $\mathscr{L}$). Тогда, согласно Следствию 14.2 и 14.4 получаем

$$\mathbb{P}_X(\mathscr{E}) \hookrightarrow \mathbb{P}_X(V \otimes \mathscr{L}) \cong X \times \mathbb{P}(V).$$

Компонируя его с проекцией на $\mathbb{P}(V)$, получаем морфизм $f\colon \mathbb{P}_X(\mathscr{E}) \to \mathbb{P}(V)$. Заметим, что

$$f^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1) \cong \big(\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(V\otimes\mathscr{L})/X}(1) \otimes p^*\mathscr{L}\big)\,|_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})} \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(1) \otimes p^*\mathscr{L},$$

следовательно

$$\Gamma(\mathbb{P}_X(\mathscr{E}), f^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)) \cong \Gamma(X, p_*f^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)) \cong \Gamma(X, p_*(\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(1) \otimes p^*\mathscr{L})) \cong \Gamma(X, \mathscr{E}^* \otimes \mathscr{L}) \cong V^*,$$

откуда следует, что построенный нами выше морфизм совпадает с морфизмом, индуцированным пространством глобальных сечений расслоения $\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(1) \otimes p^*\mathscr{L}$ на $\mathbb{P}_X(\mathscr{E})$ (в частности, это расслоение глобально порождено). Этот морфизм не всегда является вложением, однако этого можно добиться, подкрутив $\mathscr{E}^*$ чуть сильнее.

Лемма 15.1. *Пусть расслоение $\mathscr{L}_1$ таково, что $\mathscr{E}^* \otimes \mathscr{L}_1$ порождается глобальными сечениями, а $\mathscr{L}_2$ очень обильно на X. Тогда морфизм $f\colon \mathbb{P}_X(\mathscr{E}) \to \mathbb{P}(V)$, где $V = \Gamma(X, \mathscr{E}^* \otimes \mathscr{L}_1 \otimes \mathscr{L}_2)^*$ является замкнутым вложением.*

Доказательство. Пусть $V_1 = \Gamma(X, \mathscr{E}^* \otimes \mathscr{L}_1)^*$ и $f_1\colon \mathbb{P}_X(\mathscr{E}) \to \mathbb{P}(V_1)$ индуцироанный морфизм. С другой стороны, пусть $V_2 = \Gamma(X, \mathscr{L}_2)^*$ и $g\colon X \to \mathbb{P}(V_2)$ соответствующее вложение. Рассмотрим морфизм $\mathbb{P}_X(\mathscr{E}) \xrightarrow{(f_1,p)} \mathbb{P}(V) \times X \xrightarrow{\mathrm{id}\times g} \mathbb{P}(V_1) \times \mathbb{P}(V_2) \hookrightarrow \mathbb{P}(V_1 \otimes V_2)$ (последняя стрелка — вложение Сегре). Каждая из стрелок является замкнутым вложением (первая — по Следствию 14.2 и 14.4, а вторая в силу очень обильности $\mathscr{L}_2$. Значит и композиция замкнутое вложение. При этом обратный образ $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V_1\otimes V_2)}(1)$ равен линейному расслоению

$$f_1^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1) \otimes p^*\mathscr{L}_2 \cong f_1^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(1) \otimes p^*\mathscr{L}_1 \otimes p^*\mathscr{L}_2,$$

значит оно очень обильно, а задаваемый им морфизм f является замкнутым вложением. $\square$

Пример 15.2. Пусть $X = \mathbb{P}(A)$, $\mathscr{E} = B \otimes \mathscr{O}_X$, где $\dim A = \dim B = 2$. Тогда $\mathbb{P}_X(\mathscr{E}) \cong \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$. При этом если взять $\mathscr{L} = \mathscr{O}_X$, $V = B$, получится проекция $X \to \mathbb{P}(B)$. Если же взять $\mathscr{L} = \mathscr{O}_X(1)$, $V = \Gamma(X, \mathscr{E}^* \otimes \mathscr{L})^* = \Gamma(\mathbb{P}(A), B^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(A)}(1))^* \cong (B^* \otimes A^*)^* \cong A \otimes B$, получится вложение Сегре $X = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \hookrightarrow \mathbb{P}(A \otimes B) = \mathbb{P}(V)$.

Пример 15.3. Пусть по-прежнему $X = \mathbb{P}(A)$, $\dim A = 2$, но $\mathscr{E} = \mathscr{O}_X \oplus \mathscr{O}_X(-1)$. Тавтологическое вложение $\mathscr{O}_X(-1) \hookrightarrow A \otimes \mathscr{O}_X$ индуцирует вложение $\mathscr{E} \hookrightarrow (\mathsf{k} \oplus A) \otimes \mathscr{O}_X$, и, следовательно, морфизм $f\colon \mathbb{P}_X(\mathscr{E}) \to \mathbb{P}(\mathsf{k} \oplus A) \cong \mathbb{P}^2$. Этот морфизм не является вложением. Действительно, вложение $\mathscr{O}_X \subset \mathscr{E}$ индуцирует сечение $s\colon X \to \mathbb{P}_X(\mathscr{E})$, такое что $s^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(-1) \cong \mathscr{O}_X$. Но так как по построению $f^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(-1)$, то $(f \circ s)^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) = \mathscr{O}_X$, значит кривая $s(X) \subset \mathbb{P}_X(\mathscr{E})$ стягивается морфизмом f. Позже мы проверим, что это единственная такая кривая.

Пример 15.4. Пусть по-прежнему $X = \mathbb{P}(A)$, но $\mathscr{E} = \mathscr{O}_X(-b) \oplus \mathscr{O}_X(-c)$, где $0 \le b \le c$. Стандартные вложения $\mathscr{O}_X(-b) \hookrightarrow S^bA \otimes \mathscr{O}_X$ и $\mathscr{O}_X(-c) \hookrightarrow S^cA \otimes \mathscr{O}_X$ индуцируют вложение $\mathscr{E} \hookrightarrow (S^bA \oplus S^cA) \otimes \mathscr{O}_X$, и, следовательно, морфизм $f\colon \mathbb{P}_X(\mathscr{E}) \to \mathbb{P}(S^bA \oplus S^cA) \cong \mathbb{P}^{b+c+1}$. Этот морфизм является вложением тогда и только тогда, когда $b > 0$. В самом деле, если $b = 0$, то легко найти кривую, стягиваемую морфизмом f. Если же $b > 0$, применим Лемму 15.1 с $\mathscr{L}_1 = \mathscr{O}_X(-1)$, $\mathscr{L}_2 = \mathscr{O}_X(1)$.

Образ линейчатой поверхности $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-b) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-c))$ в $\mathbb{P}^{b+c+1}$ геометрически описывается следующим образом. Легко видеть, что образы ограничения вложения f на сечения, соответствующие прямым слагаемым $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-b)$ и $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-c)$ в $\mathscr{E}$, являются рациональными нормальными кривыми степени b и c в непересекающихся подпространствах $\mathbb{P}^b$ и $\mathbb{P}^c$ внутри $\mathbb{P}^{b+c+1}$ соответственно. Эти кривые канонически отождествлены друг с другом. Соединия их соответствующие точки прямыми внутри $\mathbb{P}^{b+c+1}$, получаем поверхность, которая и совпадает с образом f. Она называется **рациональным скроллом** степени $b + c$.

Иногда важно понимать, как задать уравнениями образ построенных нами вложений. Здесь очень полезен следующий простой результат.

Лемма 15.5. *Пусть $0 \to \mathscr{E} \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to 0$ — точная тройка векторных расслоений на X. Пусть $f\colon \mathbb{P}_X(\mathscr{E}) \to \mathbb{P}_X(\mathscr{F})$ — индуцированное вложение. Тогда $f(\mathbb{P}_X(\mathscr{E})) \subset \mathbb{P}_X(\mathscr{F})$ является схемой нулей естественного сечения расслоения $\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{F})/X}(1) \otimes p^*\mathscr{G}$.*

Доказательство. Во-первых, построим сечение. Заметим, что

$$\Gamma(\mathbb{P}_X(\mathscr{F}), \mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{F})/X}(1) \otimes p^*\mathscr{G}) \cong \Gamma(X, p_*(\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{F})/X}(1) \otimes p^*\mathscr{G})) \cong \Gamma(X, \mathscr{F}^* \otimes \mathscr{G}) \cong \operatorname{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{G}),$$

значит морфизм $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ из точной тройки задает сечение s нашего расслоения.

Теперь проверим, что $f(\mathbb{P}_X(\mathscr{E})) \subset Z_s$. Для этого надо проверить, что $f^*(s) = 0$. Но

$$f^*(s) \in \Gamma(\mathbb{P}_X(\mathscr{E}), f^*(\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{F})/X}(1) \otimes p^*\mathscr{G})) \cong \Gamma(\mathbb{P}_X(\mathscr{E}), \mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(1) \otimes p^*\mathscr{G}) \cong \operatorname{Hom}(\mathscr{E}, \mathscr{G})$$

очевидно соответствует морфизму $\mathscr{E} \to \mathscr{G}$ являющемуся композицией морфизмов $\mathscr{E} \to \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ из точной тройки, то есть нулю.

Наконец, проверим, что $Z_s \subset f(\mathbb{P}_X(\mathscr{E}))$. Для этого построим морфизм $Z_s \to \mathbb{P}_X(\mathscr{E})$. Заметим, что на $\mathbb{P}_X(\mathscr{F})$ композиция

$$\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{F})/X}(-1) \to p^*\mathscr{F} \to p^*\mathscr{G},$$

где первая стрелка — тавтологическое вложение, а вторая — обратный образ морфизма из точной тройки, задается сечением s, поэтому при ограничении на Z_s композиция зануляется. Значит ограничение тавтологического вложения $\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{F})/X}(-1)|_{Z_s} \to p^*\mathscr{F}|_{Z_s}$ пропускается через $p^*\mathscr{E}|_{Z_s}$. Построенное вложение $\lambda\colon \mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{F})/X}(-1)|_{Z_s} \to p^*\mathscr{E}|_{Z_s}$ вместе с морфизмом $\phi = p|_{Z_s}\colon Z_s \to X$ и линейным расслоением $\mathscr{L} = \mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{F})/X}(-1)|_{Z_s}$ задают искомое отображение $Z_s \to \mathbb{P}_X(\mathscr{E})$. Его композиция с вложением f очевидно является вложением $Z_s \hookrightarrow \mathbb{P}_X(\mathscr{F})$, значит действительно $Z_s \subset f(\mathbb{P}_X(\mathscr{E}))$. $\square$

Пример 15.6. Опишем образ вложения $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ из Примера 15.3. Для этого заметим, что если $(x_0 : x_1)$ — координаты на $\mathbb{P}^1$, то вложение $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \hookrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus 3}$ задается матрицей $(1, x_0, x_1)^T$ и продолжается до точной тройки

$$0 \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \xrightarrow{(1,x_0,x_1)^T} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus 3} \xrightarrow{(0,x_1,-x_0)} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \to 0.$$

Поэтому, наша поверхность в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ является схемой нулей соответствующего сечения линейного расслоения $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2}(1,1)$. Если выбрать координаты $(y_0 : y_1 : y_2)$ на $\mathbb{P}^2$, его уравнение — $x_1y_1 - x_0y_2$.

Упражнение 8. *Запишите уравнением образ вложения $\mathbb{P}_{\mathbb{P}(V)}(\Omega_{\mathbb{P}(V)}(1)) \hookrightarrow \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*)$, индуцированного вложением из последовательности Эйлера.*

16. Относительный грассманиан

Пусть опять $\mathscr{E}$ — векторное расслоение ранга n на схеме X и $1 \le k \le n-1$. Построим относительную версию грассманиана в этом расслоении. Определим ее через универсальное свойство.

Предложение 16.1. *Существует схема $\mathrm{Gr}_X(k,\mathscr{E})$, такая что*

$$\mathrm{Map}(S,\mathrm{Gr}_X(k,\mathscr{E})) = \{(\phi,E,\varepsilon) \mid \phi\in\mathrm{Map}(S,X),\ E \text{ — расслоение ранга } k \text{ на } S \text{ и } \varepsilon\colon E\to\phi^*\mathscr{E} \text{ — вложение расслоений}\}/\sim,$$

с обычным отношением эквивалентности $(\phi,E,\varepsilon)\sim(\phi',E',\varepsilon')$, если $\phi=\phi'$ и существует изоморфизм $\xi\colon E \xrightarrow{\sim} E'$, такой что $\varepsilon=\varepsilon'\circ\xi$.

Доказательство. Ввиду универсального свойства достаточно доказать предложение в случае, когда расслоение $\mathscr{E}$ тривиально (в общем случае достаточно покрыть X такими картами, построить относительные грассманианы над каждой из них, после чего склеить пользуясь универсальным свойством). Итак, будем считать, что $\mathscr{E}\cong V\otimes\mathscr{O}_X$. Проверим тогда, что $X\times\mathrm{Gr}(k,V)$ удовлетворяет универсальному свойству. В самом деле $\mathrm{Map}(S,X\times\mathrm{Gr}(k,V))=\mathrm{Map}(S,X)\times\mathrm{Map}(S,\mathrm{Gr}(k,V))$ задается тройками (ϕ,E,ε), которые, пользуясь тривиализацией $\mathscr{E}\cong V\otimes\mathscr{O}_X$, отождествляются с нужными нам тройками. □

В силу универсального свойства тождественному морфизму $\mathrm{Gr}_X(k,\mathscr{E})\to\mathrm{Gr}_X(k,\mathscr{E})$ соответствует проекция $g\colon \mathrm{Gr}_X(k,\mathscr{E})\to X$ и подрасслоение $\mathscr{U}\hookrightarrow g^*\mathscr{E}$ (тавтологическое подрасслоение). Оно продолжается до точных троек

$$0\to\mathscr{U}\to g^*\mathscr{E}\to\mathscr{E}/\mathscr{U}\to 0,\qquad 0\to\mathscr{U}^\perp\to g^*\mathscr{E}^*\to\mathscr{U}^*\to 0,$$

где $\mathscr{E}/\mathscr{U}$ обозначает тавтологическое факторрасслоение, а $\mathscr{U}^\perp=(\mathscr{E}/\mathscr{U})^*$ — его двойственное. Внешняя степень $\bigwedge^k\mathscr{U}\hookrightarrow g^*(\bigwedge^k\mathscr{E})$ является линейным подрасслоением и задает (в силу универсального свойства) морфизм $\mathrm{Gr}_X(k,\mathscr{E})\to\mathbb{P}_X(\bigwedge^k\mathscr{E})$ — относительное вложение Плюккера.

Упражнение 9. *Проверьте, что морфизм $g\colon \mathrm{Gr}_X(k,\mathscr{E})\to X$ является локально тривиальным расслоением со слоем $\mathrm{Gr}(k,n)$, а его сечения соттветствуют подрасслоениям ранга k в $\mathscr{E}$.*

Упражнение 10. *Проверьте, что $\mathrm{Gr}_X(k,\mathscr{E}\otimes\mathscr{L})\cong\mathrm{Gr}_X(k,\mathscr{E})$ и $\mathrm{Gr}_X(k,V\otimes\mathscr{L})\cong X\times\mathrm{Gr}(k,V)$. Объясните, как связаны тавтологические расслоения при этих изоморфизмах.*

Упражнение 11. *Пусть $0\to\mathscr{E}\to\mathscr{F}\to\mathscr{G}\to 0$ точная тройка расслоений. Покажите, что $\mathrm{Gr}_X(k,\mathscr{E})\subset\mathrm{Gr}_X(k,\mathscr{F})$ и совпадает со схемой нулей естественного сечения расслоения $\mathscr{U}^*\otimes g^*\mathscr{G}$.*

Упражнение 12. $\mathrm{Gr}_X(k,\mathscr{E})\cong\mathrm{Gr}_X(n-k,\mathscr{E}^*)$, $\mathrm{Gr}_X(1,\mathscr{E})\cong\mathbb{P}_X(\mathscr{E})$, $\mathrm{Gr}_X(n-1,\mathscr{E})\cong\mathbb{P}_X(\mathscr{E}^*)$.

Упражнение 13. *Проверьте, что $\mathrm{Gr}_X(k,\mathscr{E})\subset\mathbb{P}_X(\bigwedge^k\mathscr{E})$ совпадает со схемой нулей естественного сечения расслоения $p^*(\bigwedge^{k-1}\mathscr{E}\otimes\bigwedge^{k+1}\mathscr{E})\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\wedge^k\mathscr{E})/X}(2)$.*

Упражнение 14. *Докажите, что $\Omega_{\mathrm{Gr}_X(k,\mathscr{E})/X}\cong\mathscr{U}\otimes\mathscr{U}^\perp$ и постройте относительную последовательность Эйлера $0\to\Omega_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}\to p^*\mathscr{E}^*\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(-1)\to\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})}\to 0$.*

Упражнение 15. *Пусть $\mathscr{E}$ — расслоение ранга n на схеме X и дана последовательность чисел $0<k_1<k_2<\dots<k_s<n$. Определите многообразие частичных флагов $\mathrm{Fl}_X(k_1,\dots,k_s;\mathscr{E})$, сформулируйте его универсальное свойство и докажите аналоги тех свойств относительного грассманиана, которые мы разбирали выше.*

Упражнение 16. *Проверьте, что (1) $\mathbb{P}_{\mathbb{P}(V)}(T_{\mathbb{P}(V)})\cong\mathrm{Fl}(1,2;V)$ и $\mathbb{P}_{\mathbb{P}(V)}(\Omega_{\mathbb{P}(V)})\cong\mathrm{Fl}(1,n-1;V)$, где $n=\dim V$; (2) $\mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(k,V)}(\mathscr{U})\cong\mathrm{Fl}(1,k;V)$, $\mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(k,V)}(\mathscr{U}^\perp)\cong\mathrm{Fl}(k,n-1;V)$, $\mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(k,V)}(\mathscr{U}^*)\cong\mathrm{Fl}(k-1,k;V)$, $\mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(k,V)}(V/\mathscr{U})\cong\mathrm{Fl}(k,k+1;V)$.*

Лекция V. Раздутие

17. Определение и простейшие примеры

Пусть X — алгебраическое многообразие, а $\mathscr{I}$ — пучок идеалов на нем, то есть когерентный подпучок в $\mathscr{O}_X$. Определим

$$\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X) := \mathrm{Proj}_X\left(\bigoplus_{k=0}^{\infty}\mathscr{I}^k\right),$$

где $\bigoplus_{k=0}^{\infty}\mathscr{I}^k$ — градуированный пучок коммутативных алгебр (относительно умножения индуцированного умножением в $\mathscr{O}_X$). Схема $\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X)$ вместе с естественным морфизмом

$$\pi\colon \mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X) \to X$$

называются **раздутием пучка идеалов** $\mathscr{I}$ **на** X, или **раздутием** X **с центром в** $\mathscr{I}$. Если $Z \subset X$ — подсхема, соответствующая идеалу $\mathscr{I}$, раздутие $\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X)$ также называется **раздутием подсхемы** Z и обозначается $\mathrm{Bl}_Z(X)$, а подсхема Z также называется **центром раздутия**.

Прежде чем рассмотреть примеры, заметим простое свойство.

Лемма 17.1. *Пусть $f\colon X' \to X$ — замена базы. Тогда*

$$\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X)\times_X X' \cong \mathrm{Proj}_{X'}\left(\bigoplus_{k=0}^{\infty} f^*(\mathscr{I}^k)\right).$$

В частности, если f — открытое вложение и $\mathscr{I}' = \mathscr{I}|_{X'}$, то $\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X)\times_X X' \cong \mathrm{Bl}_{\mathscr{I}'}(X')$.

Доказательство. Первая формула следует из согласованности взятия проективного спектра с заменой базы. Если f — открытое вложение, то $f^*(\mathscr{I}^k) \to f^*(\mathscr{O}_X) = \mathscr{O}_{X'}$ — вложение (для произвольного морфизма f это, кстати, не верно), то есть $f^*(\mathscr{I}^k)$ — идеал в $\mathscr{O}_{X'}$, и он как раз равен $\mathscr{I}'$. При этом морфизм $(f^*(\mathscr{I}))^{\otimes k} = f^*(\mathscr{I}^{\otimes k}) \to f^*(\mathscr{I}^k)$ сюръективен, поэтому $f^*(\mathscr{I}^k) \cong (f^*\mathscr{I})^k$. Таким образом, $\mathrm{Proj}_{X'}\left(\bigoplus_{k=0}^{\infty} f^*(\mathscr{I}^k)\right) = \mathrm{Proj}_{X'}\left(\bigoplus_{k=0}^{\infty} f^*(\mathscr{I})^k\right) = \mathrm{Bl}_{\mathscr{I}'}(X')$. □

Это свойство позволяет, в частности, описывать слои раздутия (беря в качестве X' точку на X). Теперь перейдем к примерам.

Пример 17.2. Пусть $\mathscr{I}$ — обратимый пучок идеалов. Тогда $\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X) \cong X$. Действительно, утверждение локально, поэтому пользуясь Леммой 17.1 можно считать, что $X = \mathrm{Spec}(A)$ и $\mathscr{I} = Af \subset A$ — главный идеал, причем f не является делитем нуля (иначе Af не изоморфен A как A-модуль). Тогда $\mathscr{I}^k \cong Af^k$, поэтому

$$\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X) = \mathrm{Proj}_X\left(\bigoplus_{k=0}^{\infty}\mathscr{I}^k\right) = \mathrm{Proj}\left(\bigoplus_{k=0}^{\infty}Af^k\right) \cong \mathrm{Proj}(A[t]) = \mathbb{P}^0_A \cong \mathrm{Spec}(A) = X.$$

Непосредственным следствием этого наблюдения является то, что морфизм раздутия является изоморфизмом вне центра раздутия, то есть морфизм $\pi\colon \mathrm{Bl}_Z(X) \to X$ индуцирует изоморфизм

$$\mathrm{Bl}_Z(X)\times_X (X\setminus Z) \cong X\setminus Z.$$

Вот еще один характерный пример.

Пример 17.3. Пусть $\mathscr{I} = 0$. Тогда $\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X) = \emptyset$. В самом деле, проективный спектр алгебры, сосредоточенной в градуировке 0, пуст по определению.

Раздутие разных идеалов может давать одно и то же многообразие.

Лемма 17.4. *Для всех $d \ge 1$ имеется канонический изоморфизм $\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}^d}(X) \cong \mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X)$.*

Доказательство. В самом деле, изофморфизм алгебр $\bigoplus_{k=0}^{\infty}(\mathscr{I}^d)^k \cong \bigoplus_{k=0}^{\infty}\mathscr{I}^{dk}$ показывает, что алгебра, проективным спектром которой является раздутие $\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}^d}(X)$ является d-кратной подалгеброй Веронезе в алгебре, определяющей раздутие $\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X)$. Поскольку проективный спектр не меняется при переходе к подалгебре Веронезе, получаем требуемый изоморфизм. □

Следствие 17.5. *Пусть $\mathscr{I}$ — нильпотентный идеал, то есть $\mathscr{I}^d = 0$ для некотрого $d \geq 1$. Тогда $\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X) = \emptyset$.*

Упражнение 17. *Пусть $\mathscr{J}$ — обратимый идеал. Докажите, что $\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}\cdot\mathscr{J}}(X) \cong \mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X)$.*

Упражнение 18. *Пусть $X = X_1 \sqcup X_2$ — несвязное объединение двух замкнутых подмножеств. Чему равно раздутие $\mathrm{Bl}_{X_1}(X)$?*

18. Проективные вложения

Как и на всяком проективном спектре, на раздутии $\tilde{X} = \mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X)$ есть пучок $\mathscr{O}_{\tilde{X}/X}(1)$. Более того, если $\pi\colon \tilde{X} \to X$ — естественная проекция, то есть также естественная сюръекция $\pi^*\mathscr{I} \to \mathscr{O}_{\tilde{X}/X}(1)$ (индуцированная сюръективным морфизмом градуированных пучков модулей $\mathscr{I}\otimes(\oplus\mathscr{I}^k) \to \oplus\mathscr{I}^{k+1}$. Она позволяет строить (относительные) проективные вложения раздутия.

Лемма 18.1. *Пусть $\mathscr{E}$ — локально свободный пучок и дана сюрьекция $\mathscr{E}^* \to \mathscr{I}$. Тогда существует вложение $i\colon \tilde{X} := \mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X) \to \mathbb{P}_X(\mathscr{E})$, так что $i^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(1) \cong \mathscr{O}_{\tilde{X}/X}(1)$.*

Доказательство. Рассмотрим композицию сюръекций $\pi^*\mathscr{E}^* \to \pi^*\mathscr{I} \to \mathscr{O}_{\tilde{X}/X}(1)$ и двойственный к ней морфизм $\mathscr{O}_{\tilde{X}/X}(-1) \to \pi^*\mathscr{E}$. Он является вложением расслоений, поэтому вместе с проекцией $\pi\colon \tilde{X} \to X$ он задает морфизм $i\colon \tilde{X} \to \mathbb{P}_X(\mathscr{E})$ (в силу универсального свойства проективизации), причем так, что $i^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(-1) \cong \mathscr{O}_{\tilde{X}/X}(-1)$. □

Компонируя построенное вложение $\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X) \to \mathbb{P}_X(\mathscr{E})$ с проективными вложениями $\mathbb{P}_X(\mathscr{E})$, можно получать проективные вложения раздутия. Однако, в отличие от проективизации, в общем случае сложно написать уравнения, задающие раздутие внутри $\mathbb{P}_X(\mathscr{E})$. Хотя описать “линейную часть” уравнений не сложно.

Лемма 18.2. *Пусть дана точная справа тройка*

$$\mathscr{F}^* \xrightarrow{\varphi} \mathscr{E}^* \to \mathscr{I} \to 0,$$

где $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F}$ локально свободны, и $i\colon\ \mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X) \to \mathbb{P}_X(\mathscr{E})$ индуцированное вложение. Тогда $\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X) \subset Z_s$, где s — сечение расслоения $p^*\mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(1)$ на $\mathbb{P}_X(\mathscr{E})$, индуцированное морфизмом φ.

Доказательство. Напомним, что

$$\Gamma(\mathbb{P}_X(\mathscr{E}), \mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(1) \otimes p^*\mathscr{F}) \cong \Gamma(X, p_*(\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(1) \otimes p^*\mathscr{F})) \cong \Gamma(X, \mathscr{E}^* \otimes \mathscr{F}) \cong \mathrm{Hom}(\mathscr{F}^*, \mathscr{E}^*),$$

тем самым морфизму φ сопоставляется сечение s. Для проверки вложения $\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X) \subset Z_s$ остается проверить, что ограничение s на $\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X)$ зануляется. Для этого заметим, что сечение s соответствует композиции $p^*\mathscr{F}^* \xrightarrow{p^*\varphi} p^*\mathscr{E}^* \twoheadrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(1)$, причем вторая стрелка (тавтологическая сюръекция) по определению вложения i при ограничении на $\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X)$ раскладывается в композицию

$$i^*p^*\mathscr{E}^* = \pi^*\mathscr{E}^* \to \pi^*\mathscr{I} \to \mathscr{O}_{\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X)/X}(1) = i^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(1).$$

Ввиду исходной точной тройки, композиция $i^*p^*\mathscr{F}^* \xrightarrow{i^*p^*\varphi} i^*p^*\mathscr{E}^* \to i^*p^*\mathscr{I} = \pi^*\mathscr{I}$ равна нулю, значит и ограничение сечения s зануляется. □

В некоторых случаях, вложение $\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X) \to Z_s$ является изоморфизмом.

Пример 18.3. Пусть $X = \mathrm{Spec}(\mathsf{k}[x,y]) \cong \mathbb{A}^2$, а $I = (x,y)$ — идеал точки $P = (0,0)$. Имеем точную последовательность

$$0 \to \mathsf{k}[x,y] \xrightarrow{(y,-x)^T} \mathsf{k}[x,y] \oplus \mathsf{k}[x,y] \xrightarrow{(x,y)} I \to 0.$$

Тем самым, получаем вложение $\tilde{X} = \mathrm{Bl}_P(X) \hookrightarrow \mathbb{P}_X(\mathscr{O}_X \oplus \mathscr{O}_X) = \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$, а если выбрать на $\mathbb{P}^1$ однородные координаты $(u : v)$, то сечение s имеет вид $s = uy - vx$. Тем самым, Z_s задается внутри $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$ уравнением $uy = vx$. В данном случае легко проверить, что ядро сюръективного гомоморфизма градуированных алгебр $\mathsf{k}[x,y][u,v] \to \oplus I^k$ ($\deg u = \deg v = 1$ и переменные u и v переходят в $x, y \in I$) порождается элементом $uy - vx$, поэтому $\mathrm{Bl}_P(\mathbb{A}^2) = Z_s = \{uy = vx\} \subset \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$.

Точную тройку как в лемме 18.2 можно написать для любого идеала $\mathscr{I}$ (по крайней мере, для квазипроективных X), это всего лишь начало локально свободной резольвенты пучка $\mathscr{I}$. Однако, вложение $\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X) \to Z_s$, построенное в лемме, далеко не всегда является изоморфизмом, причем "препятствие" совершенно не зависит от выбора резольвенты.

Пример 18.4. Пусть $X = \mathrm{Spec}(A)$, где $A = \mathsf{k}[x,y]/xy$ ("координатный крест"), а $I = (x,y) \subset A$. Тогда простейшая резольвента идеала выглядит так:

$$A \oplus A \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} y & 0 \\ 0 & x \end{smallmatrix}\right)} A \oplus A \xrightarrow{(x,y)} I \to 0.$$

Тем самым, получаем вложение $\tilde{X} = \mathrm{Bl}_I(X) \hookrightarrow \mathbb{P}_X(\mathscr{O}_X \oplus \mathscr{O}_X) = X \times \mathbb{P}^1$, а если выбрать на $\mathbb{P}^1$ однородные координаты $(u : v)$, то сечение s имеет вид $s = (uy, vx)$. Тем самым, Z_s задается внутри $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$ уравнениями $xy = uy = vx = 0$ и является, тем самым, объединением трех прямых — двух "горизонтальных" аффинных прямых $x = u = 0$ и $y = v = 0$, и одной "вертикальной" проективной прямой $x = y = 0$.

Чтобы понять, как это связано с раздутием, рассмотрим сюръективный гомоморфизм градуированных алгебр $\mathsf{k}[x,y][u,v] \to A[u,v] \to \oplus I^k$ ($\deg u = \deg v = 1$ и переменные u и v переходят в $x, y \in I$). Легко видеть, что в ядре этого гомоморфизма, помимо xy, uy, vx, также лежит uv. Более того, несложно проверить, что ядро гомоморфизма порождается этими четырьмя элементами. Поэтому $\tilde{X} \subset \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$ задается четырьмя уравнениями $xy = uy = vx = uv = 0$. Отсюда видно, что $\tilde{X}$ является объединением только двух "горизонтальных" прямых из Z_s, а от "вертикальной" прямой остаются лишь две точки (ее точки пересечения с "горизонтальными" прямыми).

Разобранный нами пример достаточно показателен. Чтобы вложение $\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X) \hookrightarrow Z_s$ было изоморфизмом необходимо, чтобы все слои морфизма раздутия $\pi\colon \mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X) \to X$ были проективными пространствами (причем так, чтобы пучок $\mathscr{O}_{\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X)/X}(1)$ ограничивался на них как $\mathscr{O}(1)$).

Пример 18.5. Пусть $X = \mathrm{Spec}(\mathsf{k}[x,y]) \cong \mathbb{A}^2$, а $I = (x^2, xy, y^2)$ — квадрат идеала точки $P = (0,0)$. Имеем точную последовательность

$$0 \to \mathsf{k}[x,y] \oplus \mathsf{k}[x,y] \xrightarrow{\begin{pmatrix} y & 0 \\ -x & y \\ 0 & -x \end{pmatrix}} \mathsf{k}[x,y] \oplus \mathsf{k}[x,y] \oplus \mathsf{k}[x,y] \xrightarrow{(x^2,xy,y^2)} I \to 0.$$

Тем самым, получаем вложение $\tilde{X} = \mathrm{Bl}_I(X) \hookrightarrow \mathbb{P}_X(\mathscr{O}_X \oplus \mathscr{O}_X \oplus \mathscr{O}_X) = \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^2$, а если выбрать на $\mathbb{P}^2$ однородные координаты $(u : v : w)$, то сечение s имеет вид $s = (uy - vx, vy - wx)$. Тем самым, Z_s задается внутри $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^2$ уравнениями $uy - vx = vy - wx = 0$. В частности, слой Z_s над точкой P равен $\mathbb{P}^2$ (при $x = y = 0$ сечение s тождественно равно нулю). Однако, в силу Леммы 17.4, мы знаем, что слой должен быть таким же как и в Примере 18.3, то есть изомофен $\mathbb{P}^1$. Проблема, как обычно, в дополнительном соотношении $uw = v^2$ в алгебре $A[u,v,w]$.

Пример 18.6. Пусть $X = \mathrm{Spec}(A)$, где $A = \mathsf{k}[x,y]/(xy, y^2)$, то есть прямая с вложенной точкой, а $I = (x,y)$ — идеал этой точки. Имеем резольвенту

$$A \oplus A \oplus A \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x & y \end{smallmatrix}\right)} A \oplus A \xrightarrow{(x,y)} I \to 0.$$

Поэтому $\mathrm{Bl}_I(X) \subset Z_s = \{uy = vx = vy = 0\} \subset X \times \mathbb{P}^1$. Многообразие Z_s является объединением “горизонтальной” прямой $v = y = 0$ и “вертикальной” прямой $x = y = 0$, а в раздутии появляются дополнительные соотношения $uv = v^2 = 0$, в результате чего остается только “горизонтальная прямая”. Тем самым $\mathrm{Bl}_I(X) \cong \mathbb{A}^1$ — раздутие вложенной точки “уничтожает” ее.

19. Универсальное свойство

Пусть $\mathscr{I} \subset \mathscr{O}_X$ — пучок идеалов, а $Z \subset X$ — соответствующая подсхема. Рассмотрим естественное вложение $\alpha\colon \mathscr{I} \to \mathscr{O}_X$ и его обратный образ на $\tilde{X} = \mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X) = \mathrm{Bl}_Z(X)$. В терминах градуированных модулей над пучком градуированных алгебр $\oplus \mathscr{I}^k$, он соответсвует морфизму

$$\oplus(\mathscr{I} \otimes \mathscr{I}^k) \xrightarrow{\alpha\otimes\mathrm{id}} \oplus(\mathscr{O}_X \otimes \mathscr{I}^k) = \oplus \mathscr{I}^k.$$

Этот морфизм очевидно раскладывается в композицию

$$\oplus(\mathscr{I} \otimes \mathscr{I}^k) \twoheadrightarrow \oplus \mathscr{I}^{k+1} \hookrightarrow \oplus \mathscr{I}^k,$$

где первая стрелка индуцирована умножением, а вторая — естественное вложение. Это означает, что имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \pi^*\mathscr{I} \arrow[rr, "\pi^*(\alpha)"] \arrow[dr] & & \mathscr{O}_{\tilde{X}} \\ & \mathscr{O}_{\tilde{X}/X}(1) \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

В частности, пучок $\mathscr{O}_{\tilde{X}/X}(1)$ является обратимым пучком идеалов в $\mathscr{O}_{\tilde{X}}$. Соответствующая ему подсхема в $\tilde{X}$ определяется градуированной факторалгеброй $\oplus(\mathscr{I}^k/\mathscr{I}^{k+1}) \cong \oplus(\mathscr{I}^k \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Z)$, и следовательно (в силу Леммы 17.1) изоморфна расслоенному произведению $\mathrm{Bl}_Z(X) \times_X Z$. Эта подсхема

$$E := \mathrm{Bl}_Z(X) \times_X Z = \pi^{-1}(Z) \subset \mathrm{Bl}_Z(X)$$

(где $\pi^{-1}(Z)$ — схемный прообраз Z) называется исключительным дивизором раздутия. Часто рассматривают следующую “диаграмму раздутия”

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p"'] & \mathrm{Bl}_Z(X) \arrow[d, "\pi"] & \mathrm{Bl}_Z(X) \setminus E \arrow[l] \arrow[d, equal] \\ Z \arrow[r, "j"] & X & X \setminus Z \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Диаграмма коммутативна, морфизмы i и j — замкнутые вложения, а горизонтальные стрелки в правой части — открытые вложения.

Предложение 19.1. *Исключительный дивизор E раздутия является дивизором Картье, а его пучок идеалов изоморфен скручивающему пучку $\mathscr{O}_{\mathrm{Bl}_Z(X)}(-E) \cong \mathscr{O}_{\mathrm{Bl}_Z(X)/X}(1)$. Сам исключительный дивизор изоморфен проективному спектру*

$$E \cong \mathrm{Proj}_Z\left(\bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathscr{I}^k/\mathscr{I}^{k+1}\right),$$

причем так, что $\mathscr{O}_E(-E) \cong \mathscr{O}_{E/Z}(1)$.

Доказательство. Напомним, что дивизор Картье — подмногообразие, которое в любой достаточно маленькой локальной карте $\mathrm{Spec}(A)$ задается одним уравнением $\varphi = 0$, причем $\varphi \in A$ не является делителем нуля. Это равносильно тому, что морфизм $A \xrightarrow{\varphi} A$ является вложением, а его образ изоморфен идеалу дивизора. Иначе говоря, подсхема является дивизором Картье, если ее пучок идеалов обратим. Ровно это выполнено для исключительного дивизора E — по построению его идеал изоморфен $\mathscr{O}_{\mathrm{Bl}_Z(X)/X}(1)$, и в частности является обратимым пучком.

Описание самого исключительного дивизора было установлено выше, а связь между линейными расслоениями на нем очевидна. □

Тем самым, про раздутие можно думать как про процесс превращения подсхемы в дивизор Картье. Так, в Примерах 18.3 и 18.5 точка на плоскости превращается в прямую, а в Примерах 18.4 и 18.6 особая точка кривой (она не является дивизором Картье — обратите внимание, что ее идеал порождается двумя элементами, а не одним) превращается в две или одну неособые точки. Это дает свойство, которое часто называется универсальным свойством раздутия.

Предложение 19.2. *Пусть $\phi\colon S \to X$ морфизм, такой что схемный прообраз $\phi^{-1}(Z)$ подсхемы $Z \subset X$ является дивизором Картье. Тогда морфизм ϕ единственным образом поднимается до морфизма $\tilde{\phi}\colon S \to \mathrm{Bl}_Z(X)$, такого что $\pi \circ \tilde{\phi} = \phi$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{I}$ — идеал подсхемы Z. По условию морфизм $\phi^*\mathscr{I} \xrightarrow{\phi^*(\alpha)} \phi^*\mathscr{O}$ раскладывается в композицию

$$\phi^*(\mathscr{I}) \twoheadrightarrow \mathscr{O}_S(-D) \hookrightarrow \mathscr{O}_S = \phi^*\mathscr{O}_X,$$

где $D = \phi^{-1}(Z) \subset S$ — дивизор Картье. Очевидно композиция

$$\phi^*(\mathscr{I})^{\otimes k} \twoheadrightarrow \mathscr{O}_S(-D)^{\otimes k} = \mathscr{O}_X(-kD) \hookrightarrow \mathscr{O}_S = \phi^*\mathscr{O}_X$$

может быть переписана, как композиция

$$\phi^*(\mathscr{I})^{\otimes k} = \phi^*(\mathscr{I}^{\otimes k}) \twoheadrightarrow \phi^*(\mathscr{I}^k) \to \phi^*\mathscr{O}_X.$$

следовательно, морфизм $\phi^*(\mathscr{I})^{\otimes k} \twoheadrightarrow \mathscr{O}_X(-kD)$ может быть разложен в композицию сюръекций $\phi^*(\mathscr{I})^{\otimes k} \twoheadrightarrow \phi^*(\mathscr{I}^k) \twoheadrightarrow \mathscr{O}_X(-kD)$ (причем единственным образом). Легко видеть, что построенные при разных k сюръекции $\phi^*(\mathscr{I}^k) \to \mathscr{O}_S(-kD)$ согласованы с умножением, следовательно задают сюръективный гомоморфизм градуированных алгебр

$$\bigoplus_{k=0}^{\infty} \phi^*(\mathscr{I}^k) \twoheadrightarrow \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathscr{O}_S(-kD),$$

и следовательно замкнутое вложение проективных спектров

$$S \cong \mathbb{P}_S(\mathscr{O}_S(D)) = \mathrm{Proj}_S\left(\bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathscr{O}_S(-kD)\right) \hookrightarrow \mathrm{Proj}_S\left(\bigoplus_{k=0}^{\infty} \phi^*(\mathscr{I}^k)\right) = S \times_X \mathrm{Bl}_Z(X).$$

Проекция из расслоенного произведения задает морфизм $\tilde{\phi}\colon S \to \mathrm{Bl}_Z(X)$, такой что $\pi \circ \tilde{\phi} = \phi$. Легко видеть, что он единственен (для этого достаточно провернуть ту же конструкцию в обратной последовательности). □

Доказанное предложение является очень полезным для построения морфизмов в раздутие, однако оно не является по настоящему универсальным свойством, так как описывает не все морфизмы в $\mathrm{Bl}_Z(X)$, а только часть из них. В самом деле, любой морфизм $S \to \mathrm{Bl}_Z(X)$, образ которого содержится в исключительном дивизоре, не может быть получен таким образом, так как его композиция с проекцией $\pi\colon \mathrm{Bl}_Z(X) \to X$ переводит S в Z, а значит прообразом Z является все S, что не является дивизором Картье.

Рассмотрим несколько примеров использования “универсального” свойства раздутия.

Упражнение 19. *Пусть* $\phi\colon X' \to X$ — *морфизм, а* $Z \subset X$ — *замкнутая подсхема. Рассмотрим схемный прообраз* $Z' = \phi^{-1}(Z) \subset X'$. *Покажите, что морфизм* ϕ *однозначно поднимается до морфизма* $\tilde{\phi}\colon \mathrm{Bl}_{Z'}(X') \to \mathrm{Bl}_Z(X)$. *А что происходит, если* $X' = Z$?

Пример 19.3. Пусть $X = \mathrm{Spec}(\mathsf{k}[x,y,z]/(xz - y^2))$ — двумерный квадратичный конус, а I — идеал прямой $Z = \{x = y = 0\}$ на нем. Тогда имеем резольвенту

$$A \oplus A \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} y & z \\ -x & -y \end{smallmatrix}\right)} A \oplus A \xrightarrow{(x,y)} I \to 0,$$

откуда $Z_s \subset X \times \mathbb{P}^1$ задается уравнениями $uy - vx = 0$ и $uz - vy = 0$. Рассмотрим нули этих уравнений в $X \times \mathbb{P}^1$. Для этого покроем $X \times \mathbb{P}^1$ двумя картами $\{u = 1\}$ и $\{v = 1\}$.

Карта $\{u = 1\}$ изоморфна $\mathbb{A}^2$ с координатами v и x, а остальные функции выражаются через них $y = vx$, $z = v^2x$. В частности, прообраз Z в этой карте задается одним уравнением $x = 0$. Аналогично, карта $\{v = 1\}$ изоморфна $\mathbb{A}^2$ с координатами u и z, а $y = uz$, $x = u^2z$. В частности, прообраз Z в этой карте задается одним уравнением $uz = 0$. Тем самым прообраз Z в Z_s является дивизором Картье, следовательно по универсальному свойству, существует морфизм $Z_s \to \mathrm{Bl}_Z(X)$. Легко видеть, что его композиция с построенным выше вложением $\mathrm{Bl}_Z(X) \hookrightarrow X \times \mathbb{P}^1$ совпадает с вложением Z_s. Значит $Z_s \subset \mathrm{Bl}_Z(X) \subset X \times \mathbb{P}^1$. Вместе с вложением Леммы 18.2, это доказывает изоморфизм $\mathrm{Bl}_Z(X) \cong Z_s$.

Упражнение 20. *Проверьте, что раздутие из Примера* 19.3 *изоморфно аффинизации* $\mathbb{A}_{\mathbb{P}^1}(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-2))$.

Упражнение 21. *Опишите раздутие конуса* $\mathrm{Spec}(\mathsf{k}[x,y,z]/(xz - y^2))$ *в вершине.*

Лекция VI. Локально полные пересечения

20. Регулярные последовательности и сечения

Как мы видели на прошлой лекции, раздутие, вообще говоря, может выглядеть довольно сложно. Есть однако, довольно широкий класс подсхем, раздутия которых устроены просто.

Определение 20.1. Подсхема $Z \subset X$ называется **локально полным пересечением**, если для любой точки $z \in Z$ существует ее окрестность $U \subset X$ и *регулярная в точке z последовательность* функций $s_1, \dots, s_k$ в $\Gamma(U, \mathscr{O}_U)$, такая что

$$Z \cap U = Z_{s_1,\dots,s_k} = \{s_1 = \dots = s_k = 0\} \subset U.$$

Последовательность функций называется **регулярной в** z, если для всех i функция s_{i+1} не является делителем нуля в кольце $\mathscr{O}_{U,z}/(s_1, \dots, s_i)$, и просто **регулярной**, если она регулярна во всех точках схемы $Z_{s_1,\dots,s_k}$. Иначе говоря, если $Z_{s_1,\dots,s_i,s_{i+1}} \subset Z_{s_1,\dots,s_i}$ — дивизор Картье в окрестности $Z_{s_1,\dots,s_k}$.

Замечание 20.2. Важное (хотя и тавтологическое) замечание состоит в том, что если схема нулей $Z_{s_1,\dots,s_k}$ пуста, то последовательность $s_1, \dots, s_k$ по определению регулярна.

Как мы увидим чуть ниже, длина регулярной последовательности задающей непустую подсхему $Z \subset X$, не зависит от ее выбора (так как она равна рангу нормального расслоения к подсхеме Z, Предложение 22.1), а если подсхема Z связна, то и от точки z. Она называется **коразмерностью локально полного пересечения** (и в случае, когда схемы равноразмерностные, равна коразмерности в обычном смысле слова).

Следующая переформулировка понятия регулярной последовательности очень удобна. Пусть $\mathscr{E}$ — векторное расслоение ранга k, а $s \in \Gamma(X, \mathscr{E}^*)$ — сечение двойственного расслоения. В окрестности всякой точки $z \in X$ расслоение можно тривиализовать. Тогда сечение будет локально задаваться последовательностью функций длины k.

Определение 20.3. Сечение $s \in \Gamma(X, \mathscr{E}^*)$ векторного расслоения **регулярно** (в точке z), если соответствующая ему последовательность функций регулярна (в этой точке).

Заметим, что разные выборы тривиализации расслоения представляют его сечение в виде разных последовательностей функций и априори не ясно, почему регулрность одной из них равносильна регулярности другой (то есть неясно, корректно ли данное определение). Мы скоро, однако, проверим (Следствие 21.3), что все тут хорошо. Пока же отметим очевидное следствие.

Следствие 20.4. *Подсхема является локально полным пересечением коразмерности k тогда и только тогда, когда локально она представляется как схема нулей регулярного сечения векторного расслоения ранга k.*

Вот очень полезное утверждение, которое мы не будем доказывать (но будем им пользоваться!).

Теорема 20.5. *Сечение расслоения $\mathscr{E}^*$ ранга k на* гладком *многообразии X регулярно, тогда и только тогда, когда* $\operatorname{codim}(Z_s) = k$.

На самом деле, гладкость здесь не нужна, а нужно более слабое свойство X, которое называется Коэн–Маколеевость. Это свойство, в частности, наследуется схемой нулей регулярного сечения — если X Коэн–Маколеево, а s — регулярное сечение, то Z_s тоже Коэн–Маколеево (хотя запросто может быть особым, даже если X гладко).

21. Комплексы Кошуля

Определение 21.1. Пусть $\{s_1, \dots, s_k\}$ — последовательность функций на X. Для каждого i рассмотрим двучленный комплекс $\mathrm{K}(s_i) := \{\mathscr{O}_X \xrightarrow{s_i} \mathscr{O}_X\}$. Тензорное произведение всех таких комплексов

$$\mathrm{K}(s_1, \dots, s_k) := \bigotimes_{i=1}^{k} \mathrm{K}(s_i)$$

называется комплексом Кошуля последовательности $s_1, \dots, s_k$.

Компонента комплекса Кошуля в (когомологической) градуировке $-p$ — свободный модуль ранга $\binom{k}{p}$, а дифференциал $d^{-p}\colon \mathrm{K}(s_1, \dots, s_k)^{-p} \to \mathrm{K}(s_1, \dots, s_k)^{1-p}$ может быть записан следующим образом

$$d^{-p}(a)_{i_1,\dots,i_{p-1}} = \sum_{t=0}^{p-1} (-1)^t \sum_{i_t < i < i_{t+1}} a_{i_1,\dots,i_{t-1},i,i_{t+1},\dots,i_{p-1}} s_i.$$

Ниже выписаны комплексы Кошуля для $k = 2$ и $k = 3$.

$$\mathrm{K}(s_1, s_2) = \left\{ \mathscr{O}_X \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} -s_2 \\ s_1 \end{smallmatrix}\right)} \mathscr{O}_X \oplus \mathscr{O}_X \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} s_1 & s_2 \end{smallmatrix}\right)} \mathscr{O}_X \right\},$$

$$\mathrm{K}(s_1, s_2, s_3) = \left\{ \mathscr{O}_X \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{smallmatrix}\right)} \mathscr{O}_X \oplus \mathscr{O}_X \oplus \mathscr{O}_X \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0 & -s_3 & -s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ s_2 & s_1 & 0 \end{smallmatrix}\right)} \mathscr{O}_X \oplus \mathscr{O}_X \oplus \mathscr{O}_X \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \end{smallmatrix}\right)} \mathscr{O}_X \right\},$$

Упражнение 22. *Пусть s лежит в идеале $(s_1, \dots, s_k)$, порожденном функциями $s_1, \dots, s_k$. Проверьте, что морфизм комплексов $s\colon \mathrm{K}(s_1, \dots, s_k) \to \mathrm{K}(s_1, \dots, s_k)$, заданный умножением на s, гомотопен нулю. Выведите отсюда, что все когомологии комплекса $\mathrm{K}(s_1, \dots, s_n)$ сосредоточены на схеме $Z(s_1, \dots, s_k)$.*

Лемма 21.2. *Когомология комплекса Кошуля $\mathrm{K}(s_1, \dots, s_k)$ в крайнем правом члене равна*

$$\mathscr{H}^0(\mathrm{K}(s_1, \dots, s_k)) \cong \mathscr{O}_{Z(s_1,\dots,s_k)} = \mathscr{O}_X/(s_1, \dots, s_k).$$

Более того, следующие свойства эквивалентны:

(i) *последовательность $s_1, \dots, s_k$ регулярна в точке $z \in X$;*
(ii) *в окрестности точки z комплекс Кошуля $\mathrm{K}(s_1, \dots, s_k)$ точен везде, кроме степени 0;*
(iii) *в окрестности точки z комплекс Кошуля $\mathrm{K}(s_1, \dots, s_k)$ точен в степени -1.*

Заметим, что вне $Z(s_1, \dots, s_k)$ комплекс Кошуля ацикличен в силу Упражнения 22.

Доказательство. Первое утверждение очевилно, так как $\mathrm{Im}(d^{-1})$ — идеал, порожденный $s_1, \dots, s_k$. Докажем второе утверждение индукцией по k. При $k = 0$ доказывать нечего. Допустим $k \geq 1$ и утверждение при $k - 1$ доказано.

Докажем импликацию $(i) \Rightarrow (ii)$. По определению $\mathrm{K}(s_1, \dots, s_k) = \mathrm{K}(s_1, \dots, s_{k-1}) \otimes \mathrm{K}(s_k)$, то есть $\mathrm{K}(s_1, \dots, s_k)$ является сверткой бикомплекса

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r, "d^{-3}"] & \mathrm{K}(s_1, \dots, s_{k-1})^{-2} \arrow[r, "d^{-2}"] & \mathrm{K}(s_1, \dots, s_{k-1})^{-1} \arrow[r, "d^{-1}"] & \mathrm{K}(s_1, \dots, s_{k-1})^{0} \\
\dots \arrow[r, "d^{-3}"] & \mathrm{K}(s_1, \dots, s_{k-1})^{-2} \arrow[r, "d^{-2}"] \arrow[u, "s_k"] & \mathrm{K}(s_1, \dots, s_{k-1})^{-1} \arrow[r, "d^{-1}"] \arrow[u, "s_k"] & \mathrm{K}(s_1, \dots, s_{k-1})^{0} \arrow[u, "s_k"]
\end{tikzcd}$$

Если последовательность $s_1, \dots, s_k$ регулярна, то $s_1, \dots, s_{k-1}$ тоже регулярна в z, а значит когомологии горизонтальных дифференциалов по предположению индукции есть только в правом столбце и равны $\mathscr{O}_{Z_{s_1,\dots,s_{k-1}}}$, а вертикальный дифференциал задает отображение

$$\mathscr{O}_{Z_{s_1,\dots,s_{k-1}}} \xrightarrow{s_k} \mathscr{O}_{Z_{s_1,\dots,s_{k-1}}}.$$

Но s_k не является в $\mathscr{O}_{Z_{s_1,\dots,s_{k-1}}}$ делителем нуля, значит этот морфизм инъективен. Следовательно, у $\mathrm{K}(s_1, \dots, s_k)$ нет когомологий нигде, кроме крайне правого члена.

Импликация $(ii) \Rightarrow (iii)$ очевидна.

Докажем теперь импликацию $(iii) \Rightarrow (i)$. Предположим, что у $\mathrm{K}(s_1, \dots, s_k)$ нет когомологий в степени -1. Рассматривая в бикомплексе вначале горизонтальный дифференциал, получаем длинную точную последовательность

$$\begin{aligned} \dots \to \mathscr{H}^{-1}(\mathrm{K}(s_1, \dots, s_{k-1})) \xrightarrow{s_k} \mathscr{H}^{-1}(\mathrm{K}(s_1, \dots, s_{k-1})) \to \mathscr{H}^{-1}(\mathrm{K}(s_1, \dots, s_k)) \to \\ \to \mathscr{O}_{Z_{s_1,\dots,s_{k-1}}} \xrightarrow{s_k} \mathscr{O}_{Z_{s_1,\dots,s_{k-1}}} \to \mathscr{O}_{Z_{s_1,\dots,s_{k-1},s_k}} \to 0, \end{aligned}$$

Отсюда следует, что морфизм s_k в первой строке является эпиморфизмом. Но если умножение на функцию является эпиморфизмом конечно порожденного модуля, то носитель модуля не пересекается со схемой нулей функции. Значит в окрестности точки z комплекс $\mathrm{K}(s_1, \dots, s_{k-1})$ не имеет когомологий в степени -1, и следовательно последовательность $s_1, \dots, s_{k-1}$ регулярна в z. Остается заметить, что из точности второй строки следует что s_k не является делителем нуля в $\mathscr{O}_{Z_{s_1,\dots,s_{k-1}}}$, а значит последовательность $s_1, \dots, s_k$ тоже регулярна. □

Для глобальных конструкций удобно иметь глобальную версию комплекса Кошуля.

Пусть $\mathscr{E}$ — векторное расслоение ранга k, а $s \in \Gamma(X, \mathscr{E}^*)$ — сечение двойственного. Соответсвующий комплекс Кошуля определяется как

$$\mathrm{K}(s) := \{0 \to \textstyle\bigwedge^k \mathscr{E} \xrightarrow{s} \bigwedge^{k-1} \mathscr{E} \xrightarrow{s} \dots \xrightarrow{s} \bigwedge^2 \mathscr{E} \xrightarrow{s} \mathscr{E} \xrightarrow{s} \mathscr{O}_X\},$$

где отображения определяются как свертка с s. Иначе говоря, они определяются коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd} \bigwedge^p \mathscr{E} \arrow[r, "s"] \arrow[d] & \bigwedge^{p-1} \mathscr{E} \arrow[d] \\ \mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \otimes \dots \otimes \mathscr{E} \arrow[r, "s \otimes \mathrm{id} \otimes \dots \otimes \mathrm{id}"] & \mathscr{E} \otimes \dots \otimes \mathscr{E} \end{tikzcd}$$

в которой вертикальные стрелки естественные вложения (легко видеть, что нижняя стрелка сохраняет кососимметричность и, следовательно, индуцирует верхнюю стрелку).

Упражнение 23. *Пусть $\mathscr{E}$ тривиально, $\varphi\colon \mathscr{E} \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_X^{\oplus k}$ тривиализация, и $\varphi^*(s_1, \dots, s_k) = s$. Проверьте, что изоморфизмы $\wedge^p\varphi\colon \bigwedge^p \mathscr{E} \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_X^{\oplus \binom{k}{p}}$ задают ихоморфизм комплексов $\mathrm{K}(s) \cong \mathrm{K}(s_1, \dots, s_k)$.*

Следствие 21.3. *Сечение s расслоения $\mathscr{E}^*$ регулярно тогда и только тогда, когда соответствующий комплекс Кошуля $\mathrm{K}(s)$ ацикличен везде, кроме правого члена. В частности, регулярность сечения не зависит от выбора тривиализации расслоения.*

Пример 21.4. Пусть $X = \mathbb{P}(V)$, $\mathscr{E}^* = V \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$ и сечение s соответствует тождественному морфизму id_V. Тогда $Z_s = \emptyset$, значит s регулярно и комплекс Кошуля

$$0 \to \textstyle\bigwedge^n V^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(-n) \to \dots \to \bigwedge^2 V^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(-2) \to V^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1) \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)} \to 0$$

(где $n = \dim V$) точен во всех степенях.

22. Нормальное расслоение

Напомним, что конормальный пучок к подсхеме $Z \subset X$, соответствующей пучку идеалов $\mathscr{I}$ определяется как $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ (заметим, что он является модулем над пучком колец $\mathscr{O}_X/\mathscr{I} \cong \mathscr{O}_Z$, поэтому его следует рассматривать как когерентный пучок на Z). В свою очередь нормальный пучок определяется как двойственный к конормальному

$$\mathscr{N}_{Z/X} \cong \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Z}(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2, \mathscr{O}_Z).$$

Вообще говоря, конормальный и нормальный пучки к подсхеме могут быть устроены довольно сложно, но для подсхем, являющихся локально полными пересечениями они устроены просто.

Предложение 22.1. *Если $Z \subset X$ — локально полное пересечение коразмерности k, то конормальный $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ и нормальный $\mathscr{N}_{Z/X}$ пучки являются локально свободными пучками ранга k. Более того, если $Z = Z_s$, где s — регулярное сечение векторного расслоения $\mathscr{E}^*$, то*

$$\mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \cong \mathscr{E}|_Z, \qquad \mathscr{N}_{Z/X} \cong \mathscr{E}^*|_Z.$$

Обратно, если конормальный пучок $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ локально свободен ранга k, то $Z \subset X$ — локально полное пересечение.

Доказательство. Первое утверждение локально, поэтому (в силу Следствия 20.4) достаточно доказать второе. Более того, в силу определения нормального пучка, достаточно построить необходимый изоморфизм для конормального пучка. Для этого рассмотрим тензорное произведение пучка $\mathscr{I}$ с точной тройкой $0 \to \mathscr{I} \to \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_Z \to 0$:

$$\mathscr{I} \otimes \mathscr{I} \to \mathscr{I} \to \mathscr{I} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Z \to 0.$$

Первое отображение индуцировано умножением функций, поэтому его образ равен $\mathscr{I}^2$, значит

$$\mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \cong \mathscr{I} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Z.$$

Теперь раззмотрим комплекс Кошуля как резольвенту пучка $\mathscr{I}$

$$\dots \to \textstyle\bigwedge^2\mathscr{E} \xrightarrow{s} \mathscr{E} \to \mathscr{I} \to 0.$$

Тензорно умножая ее на $\mathscr{O}_Z$, получаем точную последовательность

$$\textstyle\bigwedge^2\mathscr{E}|_Z \xrightarrow{s|_Z} \mathscr{E}|_Z \to \mathscr{I} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Z \to 0.$$

Поскольку Z — схема нулей s, то $s|_Z = 0$, то есть первое отображение нулевое, и значит второе отображение — изоморфизм. Тем самым $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \cong \mathscr{I} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Z \cong \mathscr{E}|_Z$, что и требовалось.

Предположим теперь, что $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ — локально свободен ранга k и докажем, что Z — локально полное пересечение. Рассмотрим вначале случай $k = 1$. Выберем точку $z \in Z$ и образующую пучка $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ в окрестности точки z, поднимем ее (переходя к еще более маленькой окрестности) до сечения пучка $\mathscr{I}$ и рассмотрим полученный морфизм $\mathscr{O}_X \xrightarrow{f} \mathscr{I}$. По лемме Накаямы морфизм f сюръективен в еще более маленькой окрестности точки z. Кроме того, по построению, у нас есть коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd} \mathscr{O}_X \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[d, two heads] & \mathscr{I} \arrow[d, two heads] \\ \mathscr{O}_Z \arrow[r, "\cong"] & \mathscr{I}/\mathscr{I}^2, \end{tikzcd}$$

в котором вертикальные стрелки — ограничение на Z. Отсюда следует, что носитель ядра морфизма f не пересекается с Z. Значит, переходя к еще более маленькой окрестности, можно считать, что f — изоморфизм. Но это значит, что $\mathscr{I}$ — обратимый идеал в окрестности точки z и тем самым доказывает утверждение для случая $k = 1$.

Вернемся теперь к общему случаю. Пусть $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ — локально свободен ранга k. В окрестности точки $z \in Z$ можно выбрать вложение расслоений $\mathscr{O}_Z \hookrightarrow \mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ (так что фактор локально свободен). Поднимем (локально) это вложение до сечения f пучка идеалов $\mathscr{I}$ и обозначим через $\mathscr{I}_1 \subset \mathscr{I}$ идеал, порожденный f. По построению морфизм $\mathscr{O}_X \xrightarrow{f} \mathscr{I}_1$ сюръективен, и так же как и в случае $k = 1$ проверяется, что f изоморфизм в окрестности точки z. Значит соотсветствующая идеалу $\mathscr{I}_1$ подсхема $X_1 \subset X$ является дивизором Картье. Покажем, что пучок идеалов $\bar{\mathscr{I}}$ для $Z \subset X_1$ локально свободен ранга $k-1$ (по индукции это будет означать, что $Z \subset X_1$ локально полное пересечение, а значит также и $Z \subset X$). Для этого заметим, что $\bar{\mathscr{I}}$ определяется из точной тройки

$$0 \to \mathscr{I}_1 \to \mathscr{I} \to \bar{\mathscr{I}} \to 0.$$

Ограничивая ее на Z получаем точную последовательность

$$\mathscr{I}_1 \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Z \to \mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \to \bar{\mathscr{I}}/\bar{\mathscr{I}}^2 \to 0.$$

Поскольку $\mathscr{I}_1 \cong \mathscr{O}_X$, ее первый член изоморфен $\mathscr{O}_Z$, а первая стрелка очевидно совпадает с изначальным вложением расслоений. Значит, по его построению $\bar{\mathscr{I}}/\bar{\mathscr{I}}^2$ локально свободен. $\square$

Поскольку конормальный пучок для локально полного пересечения локально свободен, то

$$\mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \cong \mathscr{N}^*_{Z/X},$$

поэтому часто для конормального пучка мы будем использовать обозначение $\mathscr{N}^*_{Z/X}$.

Следствие 22.2. *Если $Z \subset X$ — полное пересечение дивизоров Картье $D_1, \ldots, D_k$, то*

$$\mathscr{N}_{Z/X} \cong \mathscr{O}_Z(D_1) \oplus \cdots \oplus \mathscr{O}_Z(D_k), \qquad \mathscr{N}^*_{Z/X} \cong \mathscr{O}_Z(-D_1) \oplus \cdots \oplus \mathscr{O}_Z(-D_k).$$

23. Раздутия локально полных пересечений

Опишем теперь структуру раздутия с уентром в локально полном пересечнии.

Предложение 23.1. *Пусть E — исключительный дивизор в раздутии локально полного пересечения $Z \subset X$. Тогда*

$$E \cong \mathbb{P}_Z(\mathscr{N}_{Z/X}), \qquad \text{причем} \qquad \mathscr{O}_E(E) \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}_Z(\mathscr{N}_{Z/X})/Z}(-1).$$

Если Z является схемой нулей регулярного сечения s расслоения $\mathscr{E}^*$, то $\mathrm{Bl}_Z(X) \subset \mathbb{P}_X(\mathscr{E}^*)$, и является там схемой нулей естественного глобального сечения расслоения $\bigwedge^2 \mathscr{E}^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E}^*)/X}(1)$.

Доказательство. Для произвольного раздутия выполнено равенство $E \cong \mathrm{Proj}(\oplus(\mathscr{I}^k/\mathscr{I}^{k+1}))$, поэтому для первого утверждения достаточно проверить, что $\mathscr{I}^k/\mathscr{I}^{k+1} \cong S^k(\mathscr{N}^*_{Z/X})$ (и проверить согласованность этого изоморфизма с умножением). Для этого заметим, что умножение

$$S^k(\mathscr{N}^*_{Z/X}) \cong S^k(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2) \to \mathscr{I}^k/\mathscr{I}^{k+1}$$

очевидно сюръективно. Тем самым, достаточно проверить его инъективность. Это уже локальное утверждение, поэтому начиная с этого места будем считать, что $Z \subset X$ — схема нулей сечения s локально свободного пучка $\mathscr{E}^*$ ранга k. В этом случае комплекс Кошуля $\bigwedge^2 \mathscr{E} \xrightarrow{s} \mathscr{E} \to \mathscr{I} \to 0$ дает вложение раздутия $\mathrm{Bl}_Z(X)$ в схему нулей $\tilde{X} \subset \mathbb{P}_X(\mathscr{E}^*)$ сечения расслоения $\bigwedge^2 \mathscr{E}^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E}^*)/X}(1)$. Покажем, что оно является изоморфизмом (тем самым, будет доказана и вторая часть предложения). Поскольку мы уже знаем, что $\mathrm{Bl}_Z(X) \subset \tilde{X}$, остается проверить, что $\tilde{X} \subset \mathrm{Bl}_Z(X)$. Для этого достаточно построить морфизм $\tilde{X} \to \mathrm{Bl}_Z(X)$, который в композиции с вложением $\mathrm{Bl}_Z(X) \hookrightarrow \mathbb{P}_X(\mathscr{E}^*)$ равнялся бы вложению $\tilde{X} \hookrightarrow \mathbb{P}_X(\mathscr{E}^*)$. Для этого воспользуемся универсальным свойством раздутия.

В силу универсального свойства раздутия, достаточно проверить, что схемный прообраз Z в $\tilde{X}$ является дивизором Картье. Заметим сразу, что схемный прообраз Z в $\mathbb{P}_X(\mathscr{E}^*)$ равен $\mathbb{P}_Z(\mathscr{E}^*)$ и очевидно содержится в $\tilde{X}$ (так как ограничение s на Z равно нулю). Поэтому надо проверить, что $\mathbb{P}_Z(\mathscr{E}^*) \subset \tilde{X}$ является дивизором Картье.

Это утверждение локальное, поэтому можем считать, что расслоение $\mathscr{E}$ тривиально, а сечение s задается регулярной последовательностью $s_1, \dots, s_k$. Тогда $\tilde{X} \subset X \times \mathbb{P}^{k-1}$ задается уравнениями

$$u_i s_j - u_j s_i = 0$$

(где $(u_1 : \dots : u_k)$ — однородные координаты на $\mathbb{P}^{k-1}$). Рассмотрим карту $X \times \mathbb{A}^{k-1} \subset X \times \mathbb{P}^{k-1}$, в которой $u_1 \neq 0$ (тем самым, можно считать $u_1 = 1$) и $\tilde{X}_1 := \tilde{X} \cap (X \times \mathbb{A}^{k-1})$. Тогда из уравнений следует, что в $\tilde{X}_1$ выполнены равенства

$$s_j = u_j s_1,$$

и значит

$$Z \times \mathbb{A}^{k-1} = \mathbb{P}_Z(\mathscr{E}^*) \cap (X \times \mathbb{A}^{k-1}) = \{s_1 = s_2 = \dots = s_k = 0\} = \{s_1 = u_2 s_1 = \dots = u_k s_1 = 0\} = \{s_1 = 0\},$$

то есть задается одним уравнением. Остается проверить, что s_1 не является делителем нуля в $\mathscr{O}_{\tilde{X}_1}$.

Для этого заметим, что $Z \times \mathbb{A}^{k-1} \subset X \times \mathbb{A}^{k-1}$ — локально полное пересечение коразмерности k (оно задается регулярной последовательностью $s_1, s_2, \dots, s_k$). С другой стороны, его же можно задать последовательностью $(s_2 - u_2 s_1, \dots, s_k - u_k s_1, s_1)$, которая следовательно тоже является регулярной. Но это как раз означает, что s_1 не является делителем нуля в факторе кольца $\mathscr{O}_X[u_2, \dots, u_k]$ по идеалу $(s_2 - u_2 s_1, \dots, s_k - u_k s_1)$, то есть в $\mathscr{O}_{\tilde{X}_1}$. ☐

Следствие 23.2. *Утверждение предложения выполнено, если X и Z — оба гладкие многообразия.*

24. Примеры

Пусть $X = \mathbb{P}(V)$, $P \in \mathbb{P}(V)$ точка, $v_P \in V$ — соответствующий вектор, а $\bar{V} = V/\mathsf{k} v_P$.

Лемма 24.1. *Существует изоморфизм $\mathrm{Bl}_P(\mathbb{P}(V)) \cong \mathbb{P}_{\mathbb{P}(\bar{V})}(\mathscr{O}_{\mathbb{P}(\bar{V})} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\bar{V})}(-1))$.*

Доказательство. Сюръекция $V \to \bar{V}$ индуцирует вложение $\bar{V}^* \hookrightarrow V^*$ и задает сечение

$$s \in H^0(\mathbb{P}(V), \bar{V} \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)) \cong \bar{V} \otimes V^*,$$

схема нулей которого — это в точности точка P. Поэтому,

$$\mathrm{Bl}_P(V) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{P}(V)}(\bar{V} \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)) \cong \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(\bar{V})$$

и является схемой нулей сечения $\bar{s}$ расслоения $\bigwedge^2(\bar{V}) \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(\bar{V})}(1,1)$, соответствующего индуцированному вложению $\bigwedge^2(\bar{V}^*) \hookrightarrow V^* \otimes \bar{V}^*$. С другой стороны, резольвента

$$\dots \to \bigwedge^2(\bar{V}^*) \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\bar{V})}(-1) \to V^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\bar{V})} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\bar{V})} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\bar{V})}(1) \to 0$$

(сумма подкрученного на 1 комплекса Кошуля на $\mathbb{P}(\bar{V})$ и изоморфизма $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(\bar{V})} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\bar{V})}$) задает вложение проективизации $\mathbb{P}_{\mathbb{P}(\bar{V})}(\mathscr{O}_{\mathbb{P}(\bar{V})} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\bar{V})}(-1))$ в $\mathbb{P}_{\mathbb{P}(\bar{V})}(V \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\bar{V})}) \cong \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(\bar{V})$ в качестве схемы нулей того же самого сечения того же самого расслоения. ☐

Упражнение 24. *Пусть h и $\bar{h}$ — обратные образы на $\mathrm{Bl}_P(\mathbb{P}(V)) \cong \mathbb{P}_{\mathbb{P}(\bar{V})}(\mathscr{O}_{\mathbb{P}(\bar{V})} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\bar{V})}(-1))$ классов гиперплоских сечений с $\mathbb{P}(V)$ и $\mathbb{P}(\bar{V})$ соответственно. Проверьте, что класс исключительного дивизора раздутия равен $e = h - \bar{h}$.*

Упражнение 25. *Пусть $Q \subset \mathbb{P}(V)$ — квадрика, такая что $P \in Q$ — ее гладкая точка. Проверьте, что $\mathrm{Bl}_P(Q) \cong \mathrm{Bl}_{\bar{Q}}(\mathbb{P}(\bar{V}))$, где $\bar{Q} \subset \mathbb{P}(\bar{V})$ — полное пересечение квадрики и гиперплоскости.*

Упражнение 26. *Пусть $W \subset V$ подпространство. Опишите $\mathrm{Bl}_{\mathbb{P}(W)}(\mathbb{P}(V))$ как проективизацию расслоения на $\mathbb{P}(V/W)$.*

Лекция VII. Примеры раздутий

25. Полные и собственные прообразы

Пусть $\pi\colon \mathrm{Bl}_Z(X) \to X$ — раздутие подсхемы $Z \subset X$, а $Y \subset X$ — еще одна подсхема. Есть два разных способа построить по ней подсхему в раздутии.

Во-первых, можно рассмотреть схемный прообраз $\pi^{-1}(Y) \subset \mathrm{Bl}_Z(X)$, он называется полным прообразом Y. С другой стороны, из универсального свойства раздутия следует, что вложение $Y \hookrightarrow X$ однозначно поднимается до вложения

$$\mathrm{Bl}_{Y\cap Z}(Y) \hookrightarrow \mathrm{Bl}_Z(X).$$

Его образ наызвается собственным прообразом Y в $\mathrm{Bl}_Z(X)$ и обозначается $\pi^*(Y)$.

Упражнение 27. *Пусть $Y \cap Z \subset Y$ — дивизор Картье (например, это так, если $Y \cap Z = \varnothing$). Покажите, что $\pi^*(Y) \cong Y$.*

Упражнение 28. *Пусть $Y \subset Z$. Проверьте, что $\pi^*(Y) = \varnothing$.*

Лемма 25.1. *Пусть Y — целостная схема. Тогда $\pi^*(Y) = \overline{\pi^{-1}(Y \setminus Z)}$.*

Доказательство. Если $Y \subset Z$, то обе части равенства пусты. Если же $Y \not\subset Z$, то $\pi^{-1}(Y \setminus Z)$ является открытым подмножеством в замкнутой подсхеме $\mathrm{Bl}_{Y\cap Z}(Y) \subset \mathrm{Bl}_Z(X)$, следовательно ее замыкание содержится в собственном прообразе. Кроме того, $\mathrm{Bl}_{Y\cap Z}(Y)$ целостная схема (так как соответсвующий пучок алгебр $\oplus\mathscr{I}^k_{Y\cap Z,Y} \subset \mathscr{O}_Y[t]$ не содержит делителей нуля), а $\pi^{-1}(Y \setminus Z)$ — непустое открытое подмножество в ней (дополнение до исключительного дивизора), значит оно плотно, а $\mathrm{Bl}_{Y\cap Z}(Y)$ равно его замыканию. □

По определению, всегда выполнено включение $\pi^*(Y) \subset \pi^{-1}(Y)$ (так как по построению собственного прообраза $\pi(\pi^*(Y)) \subset Y$). Обсудим, что происходит в случае, когда $Y = D$ — дивизор Картье, содержащий Z, само Z является целостным локально полным пересечением, причем

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \mathscr{I}_Z^k = 0$$

(геометрически, это означает что Z не содержится в неприводимой компоненте X). По определению, вложение $Z \subset D$ означает, что $\mathscr{O}_X(-D) = \mathscr{I}_D \subset \mathscr{I}_Z$. Пусть m — максимальное число, такое что $\mathscr{I}_D \subset \mathscr{I}_Z^m$ (оно называется кратностью D вдоль Z), оно существует по нашему предположению.

Предложение 25.2. *Если m — кратность D вдоль Z, то $\pi^*(D)$ тоже дивизор Картье, причем*

$$\pi^{-1}(D) = \pi^*(D) + mE.$$

Доказательство. По определенеию $\mathrm{Bl}_Z(X) = \mathrm{Proj}_X(\oplus\mathscr{I}_Z^k)$ и $\mathrm{Bl}_Z(D) = \mathrm{Proj}_D(\oplus\mathscr{I}_{Z,D}^k)$. Кроме того, естественный морфизм $\mathscr{I}_Z \to \mathscr{I}_{Z,D}$ очевидно сюръективен, а его ядро равно $\mathscr{I}_D$. Следовательно, естественный морфизм $\mathscr{I}_Z^k \to \mathscr{I}_{Z,D}^k$ тоже сюръективен, а его ядро равно $\mathscr{I}_Z^k \cap \mathscr{I}_D$. Поэтому собственный прообраз D соответствует градуированному пучку идеалов $\oplus(\mathscr{I}_Z^k \cap \mathscr{I}_D)$. При $k \le m$ очевидно имеем $\mathscr{I}_Z^k \cap \mathscr{I}_D = \mathscr{I}_D$. Покажем, что при $k \ge m$ выполнено

$$\mathscr{I}_Z^k \cap \mathscr{I}_D = \mathscr{I}_D \cdot \mathscr{I}_Z^{k-m}.$$

Вопрос локальный, поэтому можно считать, что идеал $\mathscr{I}_D$ главный и порожден элементом f. Значит, надо проверить, что если $fg \in \mathscr{I}_Z^k$, то $g \in \mathscr{I}_Z^{k-m}$. Применим индукцию по k. При $k = m$ доказывать нечего. Пусть $k > m$. Так как $fg \in \mathscr{I}_Z^k \subset \mathscr{I}_Z^{k-1}$, то по предположению индукции $g \in \mathscr{I}_Z^{k-m-1}$.

Поскольку при этом $f \in \mathscr{I}_Z^m$, то класс $f \cdot g$ в $\mathscr{I}_Z^{k-1}/\mathscr{I}_Z^k$, равный нулю по предположению, равен произведению класса $\bar{f} \in \mathscr{I}_Z^m/\mathscr{I}_Z^{m+1}$ и класса $\bar{g} \in \mathscr{I}_Z^{k-m-1}/\mathscr{I}_Z^{k-m}$ относительно морфизма

$$(\mathscr{I}_Z^m/\mathscr{I}_Z^{m+1}) \otimes (\mathscr{I}_Z^{k-m-1}/\mathscr{I}_Z^{k-m}) = S^m(\mathscr{N}_{Z/X}^*) \otimes S^{k-m-1}(\mathscr{N}_{Z/X}^*) \to S^{k-1}(\mathscr{N}_{Z/X}^*) = \mathscr{I}_Z^{k-1}/\mathscr{I}_Z^k.$$

Так как Z целостна, а $\mathscr{N}_{Z/X}^*$ локально свободен, алгебра $\oplus S^k(\mathscr{N}_{Z/X}^*)$ не имеет делителей нуля, поэтому зануление произведения $\bar{f} \cdot \bar{g}$ означает, что один из множителей равен нулю. Но если $\bar{f} = 0$, то $f \in \mathscr{I}_Z^{m+1}$, что противоречит определению числа m. Значит $\bar{g} = 0$, то есть $g \in \mathscr{I}_Z^{k-m}$, что и требовалось.

Из доказанного равенства $\mathscr{I}_Z^k \cap \mathscr{I}_D = \mathscr{I}_D \cdot \mathscr{I}_Z^{k-m}$ с учетом обратимости идеала $\mathscr{I}_D \cong \mathscr{O}_X(-D)$, следует что идеал собственного прообраза $\pi^*(D)$ изоморфен идеалу $\pi^*\mathscr{O}_X(-D) \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{Bl}_Z(X)}(mE)$ (второй сомножитель отвечает за сдвиг градуировки на m). Этот идеал обратим, значит $\pi^*(D)$ — дивизор Картье. Необходимое равенство тоже следует. $\square$

Упражнение 29. *Пусть* $X \subset \mathbb{P}(V)$ *— целостная схема, а* $\mathrm{Cone}(X) \subset \mathbb{A}(V)$ *— конус над ней с вершиной в точке* $0 \in \mathbb{A}(V)$. *Покажите, что* $\mathrm{Bl}_0(\mathrm{Cone}(X)) \cong \mathbb{A}_X(\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1)|_X)$, *а исключительный дивизор является нулевым сечением.*

Вот еще одно простое, но полезное наблюдение.

Лемма 25.3. *Пусть* $Z \subset X$ *— гладкое подмногообразие в гладком многообразии. Тогда раздутие* $\mathrm{Bl}_Z(X)$ *тоже гладко.*

Доказательство. Так как $\mathrm{Bl}_Z(X) \setminus E = X \setminus Z$, то раздутие гладко вне E. С другой стороны, если дивизор Картье проходит через негладкую точку многообразия, то он и сам не гладок в этой точке (сравните размерности касательных пространств в этой точке). Однако, так как $Z \subset X$ — локально полное пересечение, то $E \cong \mathbb{P}_Z(\mathscr{N}_{Z/X})$ гладко в силу гладкости Z и локальной свободности $\mathscr{N}_{Z/X}$. $\square$

26. Простые примеры

Пусть $X = \mathbb{P}(V)$, $Z = \mathbb{P}(W)$ и $W \subset V$ — линейное подпространство.

Лемма 26.1. *Существует изоморфизм* $\mathrm{Bl}_{\mathbb{P}(W)}(\mathbb{P}(V)) \cong \mathbb{P}_{\mathbb{P}(V/W)}(W \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}(-1))$.

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Bl}_{\mathbb{P}(W)}(\mathbb{P}(V)) \arrow[dl, "\text{раздутие}"'] \arrow[dr, "\text{проективизация}"] & \\ \mathbb{P}(V) & & \mathbb{P}(V/W) \end{tikzcd}$$

Если H *и* $\bar{H}$ *— классы гиперплоских сечений на* $\mathbb{P}(V)$ *и* $\mathbb{P}(V/W)$, *а* E *— исключительный дивизор раздутия, то в группе классов дивизоров выполнено соотношение*

$$E = H - \bar{H},$$

а сам исключительный дивизор изоморфен $E \cong \mathbb{P}(W) \times \mathbb{P}(V/W)$.

Доказательство. Сюръекция $V \to V/W$ индуцирует вложение $(V/W)^* \hookrightarrow V^*$ и задает сечение

$$s \in H^0(\mathbb{P}(V), (V/W) \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)) \cong (V/W) \otimes V^*,$$

схема нулей которого — это в точности подпространство $Z = \mathbb{P}(W)$. Иначе говоря, $\mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(V)$ является полным пересечением $\dim V - \dim W$ гиперплоскостей, а канонически это записывается именно как схема нулей сечения s, которое, кстати, тем самым регулярно. Поэтому, есть вложение

$$\mathrm{Bl}_{\mathbb{P}(W)}(\mathbb{P}(V)) \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{P}(V)}((V/W) \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)) \cong \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V/W),$$

а его образ является схемой нулей сечения $\bar{s}$ расслоения $\bigwedge^2(V/W)\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)\times\mathbb{P}(V/W)}(1,1)$, соответствующего индуцированному вложению $\bigwedge^2(V/W)^*\hookrightarrow V^*\otimes(V/W)^*$. С другой стороны, резольвента

$$\cdots\to\bigwedge^2(V/W)^*\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}(-1)\to V^*\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}\to W^*\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}\oplus\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}(1)\to 0$$

(сумма изоморфизма $W^*\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}\to W^*\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}$ и подкрученного на $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}(1)$ комплекса Кошуля на $\mathbb{P}(V/W)$) задает вложение проективизации $\mathbb{P}_{\mathbb{P}(V/W)}(W\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}\oplus\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}(-1))$ в $\mathbb{P}_{\mathbb{P}(V/W)}(V\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)})\cong\mathbb{P}(V)\times\mathbb{P}(V/W)$ в качестве схемы нулей того же самого сечения того же самого расслоения.

Чтобы описать класс исключительного дивизора E, заметим, что при построенном выше вложении раздутия он отождествляется с классом линейного расслоения $\mathscr{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{P}(V)}((V/W)\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1))/\mathbb{P}(V)}(-1)$, то есть с $H-\bar{H}$, что и требовалось. Отождествление самого дивизора с произведением $\mathbb{P}(W)\times\mathbb{P}(V/W)$ тоже очевидно. $\square$

Несмотря на свою простоту, этот пример весьма полезен, например, для описания линейных проекций гиперповерхностей.

Лемма 26.2. *Пусть $\mathbb{P}^n\cong\mathbb{P}(W)\subset Q\subset\mathbb{P}(V)\cong\mathbb{P}^{2n+1}$, где Q — гладкая квадрика размерности $2n$, а $\mathbb{P}(W)$ — максимальное линейное пространство на ней. Тогда*

$$\mathrm{Bl}_{\mathbb{P}(W)}(Q)\cong\mathbb{P}_{\mathbb{P}(V/W)}(\Omega_{\mathbb{P}(V/W)}(1)\oplus\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}(-1)).$$

Доказательство. Квадрика Q является дивизором типа $2H$ в $\mathbb{P}(V)$. Так как она проходит через центр раздутия в диаграмме Леммы 26.1, то в силу Предложения 25.2 на раздутии ее собственный прообраз является дивизором класса $2H-E=H+\bar{H}$. Рассмотрим его проекцию на $\mathbb{P}(V/W)$. Так как $H+\bar{H}$ ограничивается на слои проективизации как гиперплоскость, и к тому же

$$p_*\mathscr{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{P}(V/W)}(W\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}\oplus\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}(-1))}(H+\bar{H})\cong(W^*\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}\oplus\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}(1))\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}(1),$$

то этот дивизор является проективизацией расслоения $\mathscr{F}$ на $\mathbb{P}(V/W)$ заданного точной тройкой

$$0\to\mathscr{F}\to W\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}\oplus\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}(-1)\xrightarrow{Q}\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}(1)\to 0,$$

где гомоморфизм Q задан уравнением квадрики с учетом отождествления

$$H^0(\mathbb{P}(V/W),W^*\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}(1)\oplus\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}(2))\cong W^*\otimes(V/W)^*\oplus S^2(V/W)^*\cong\mathrm{Ker}(S^2V^*\to S^2W^*).$$

Далее, так как Q гладкая, компонента ее уравнения в $W^*\otimes(V/W)^*$ невырождена и задает изоморфизм $W\cong(V/W)^*$, так что компонента $W\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}\to\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}(1)$ морфизма Q отождествляется с тавтологическим морфизмом $(V/W)^*\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}\to\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}(1)$, ядром которого является расслоение $\Omega_{\mathbb{P}(V/W)}(1)$. Диаграмный поиск дает точную тройку

$$0\to\Omega_{\mathbb{P}(V/W)}(1)\to\mathscr{F}\to\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}(-1)\to 0,$$

которая должна расщепляться, так как соответствующее пространство расширений тривиально. $\square$

Упражнение 30. *Покажите, что $E\cong\mathbb{P}_{\mathbb{P}(V/W)}(\Omega_{\mathbb{P}(V/W)}(1))\cong\mathrm{Fl}(1,n;V/W)$.*

Метод, использованный в доказательстве Леммы 26.1 (вложение раздутия в произведение и реинтерпретация задающих образ уравнений) можно применять и в других ситуациях. Например, так можно описать раздутие $\mathrm{Gr}(2,5)$ в его плюккеровском вложении.

Пусть V — векторное пространство, $\dim V=5$,

$$Z=\mathrm{Gr}(2,V)\subset\mathbb{P}(\bigwedge^2V)=X.$$

Лемма 26.3. *Существует изоморфизм $\mathrm{Bl}_{\mathrm{Gr}(2,V)}(\mathbb{P}(\bigwedge^2V))\cong\mathbb{P}_{\mathbb{P}(V^*)}(\bigwedge^2(\Omega_{\mathbb{P}(V^*)}(1)))$.*

Доказательство. Как нам известно, $\mathrm{Gr}(2,V) = D_2(\varphi)$ является детерминантальным локусом для естественного морфзма

$$\varphi\colon V^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^2 V)}(-1) \to V \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^2 V)}.$$

Рассмотрим также композицию

$$\psi\colon V \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^2 V)} \hookrightarrow V \otimes \bigwedge^2 V \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^2 V)}(1) \hookrightarrow V \otimes \bigwedge^2 V \otimes \bigwedge^2 V \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^2 V)}(2) \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^2 V)}(2),$$

Легко видеть, что $\psi \circ \varphi = 0$ (действительно, в точке, соответствующей бивектору $w \in \bigwedge^2 V$, композиция имеет вид $f \mapsto (f \vee w) \mapsto (f \vee w) \wedge w \wedge w$, и если, например, $w = e_{12} + e_{34}$, то $e \wedge e = e_{1234}$, при этом $f \vee w$ — линейная комбинация векторов e_1, e_2, e_3, e_4, поэтому $(f \vee w) \wedge w \wedge w = 0$). Более того, можно показать, что $\operatorname{Ker} \psi = \operatorname{Im} \varphi$. Наконец, очевидно, что ψ задается плюккеровскими квадриками, которые как нам известно порождают пучок идеалов $\mathrm{Gr}(2,V)$, поэтому имеем точную последовательность

$$V^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^2 V)}(-3) \xrightarrow{\varphi} V \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^2 V)}(-2) \xrightarrow{\psi} \mathscr{I}_{\mathrm{Gr}(2,V)} \to 0.$$

Отсюда следует, что

$$\mathrm{Bl}_Z(X) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{P}(\wedge^2 V)}(V^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^2 V)}(2)) \cong \mathbb{P}(\bigwedge^2 V) \times \mathbb{P}(V^*)$$

и является там схемой нулей сечения $\varphi \in \Gamma(\mathbb{P}(\bigwedge^2 V) \times \mathbb{P}(V^*), V \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^2 V)\times\mathbb{P}(V^*)}(1,1))$.

С другой стороны, резольвента

$$0 \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V^*)}(-2) \to V^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V^*)}(-1) \to \bigwedge^2 V^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V^*)} \to \bigwedge^2(\mathscr{T}_{\mathbb{P}(V^*)}(-1)) \to 0$$

(получающаяся из последовательности Эйлера взятием внешнего квадрата) показывает, что проективизация $\mathbb{P}_{\mathbb{P}(V^*)}(\bigwedge^2(\Omega_{\mathbb{P}(V^*)}(1)))$ вкладывается в $\mathbb{P}_{\mathbb{P}(V^*)}(\bigwedge^2 V \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V^*)}) \cong \mathbb{P}(\bigwedge^2 V) \times \mathbb{P}(V^*)$ в качестве схемы нулей того же самого сечения того же самого расслоения. ☐

Упражнение 31. *Докажите, что если H — класс гиперплоскости на $\mathrm{Gr}(2,V)$, а $\bar{H}$ — класс гиперплоскости на $\mathbb{P}(V^*)$, то класс исключительного дивизора E раздутия $\mathrm{Bl}_{\mathrm{Gr}(2,V)}(\mathbb{P}(\bigwedge^2 V))$ равен*

$$E = 2H - \bar{H},$$

и при этом исключительный дивизор изоморфен $E \cong \mathrm{Fl}(2,4;V)$.

Упражнение 32. *Докажите, что $\mathscr{N}^*_{\mathrm{Gr}(2,V)/\mathbb{P}(\wedge^2 V)} \cong V/\mathscr{U}(2)$.*

27. Примеры посложнее

В следующем примере для доказательства применяется другой подход. Пусть A и B — векторные пространства, $\dim A = 2$, $\dim B = n$, $V = A \otimes B$ и

$$Z = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \subset \mathbb{P}(V) = X.$$

Лемма 27.1. *Существует изоморфизм $\mathrm{Bl}_{\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)}(\mathbb{P}(V)) \cong \mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(2,B)}(A \otimes \mathscr{U})$, где $\mathscr{U}$ — тавтологическое расслоение на $\mathrm{Gr}(2,B)$. Если H — класс гиперплоскости на X, а $\bar{H}$ — плюккеровский класс на $\mathrm{Gr}(2,B)$, то*

$$E = 2H - \bar{H}.$$

При этом исключительный дивизор изоморфен $E \cong \mathrm{Fl}(1,2;B) \times \mathbb{P}(A)$.

Доказательство. Как нам известно, $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = D_1(\varphi)$ является детерминантальным локусом для естественного морфзма

$$\varphi\colon B^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(A\otimes B)} \to A \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(A\otimes B)}(1).$$

Его коядро является линейным расслоением на $\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)$ (так как ранг не может быть меньше 1). Более того, при ограничении на $\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)$ морфизм φ раскладывается в композицию

$$B^*\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)}\to\mathscr{O}_{\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)}(0,1)\to A\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)}(1,1),$$

в которой оба морфизма — тавтологические (с точностью до подкрутки). Значит линейное расслоение в коядре изоморфно $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)}(2,1)$ и получаем точную последовательность

$$B^*\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(A\otimes B)}\xrightarrow{\varphi}A\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(A\otimes B)}(1)\to j_*\mathscr{O}_{\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)}(2,1)\to 0,$$

где $j\colon\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)\hookrightarrow\mathbb{P}(A\otimes B)$ — вложение Сегре.

Рассмотрим теперь обратный образ этой последовательности на раздутии:

$$B^*\otimes\mathscr{O}_{\mathrm{Bl}_Z(X)}\xrightarrow{\pi^*\varphi}A\otimes\mathscr{O}_{\mathrm{Bl}_Z(X)}(H)\to i_*p^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)}(2,1)\to 0,$$

где $i\colon E\to\mathrm{Bl}_Z(X)$ — вложение исключительного дивизора, а $p\colon E\to\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)$ — его проекция на центр раздутия. Последний морфизм — сюръекция на линейное расслоение на дивизоре Картье, поэтому его ядро (равное $\mathrm{Im}(\pi^*\varphi)$ в силу точности последовательности) — локально свободно (Лемма 27.2). Значит $\pi^*\varphi$ — сюръекция на векторное расслоение ранга 2, значит в силу универсального свойства грассманиана существует морфизм $g\colon\mathrm{Bl}_Z(X)\to\mathrm{Gr}(2,B)$, такой что морфизм $\pi^*\varphi$ раскладывается в композицию

$$B^*\otimes\mathscr{O}_{\mathrm{Bl}_Z(X)}\twoheadrightarrow g^*\mathscr{U}^*\xrightarrow{\varphi'}A\otimes\mathscr{O}_{\mathrm{Bl}_Z(X)}(H),$$

в которой первая стрелка — обратный образ тавтологической сюръекции. Более того, морфизм φ' дает отображение расслоений

$$\varphi''\colon\mathscr{O}_{\mathrm{Bl}_Z(X)}(-H)\to A\otimes g^*\mathscr{U},$$

которое нигде не обращается в нуль (так как иначе φ', а значит и φ где-то обращаются в нуль, что невозможно). Значит φ'' вложение расслоений, и по универсальному свойству проективизации получаем морфизм $\tilde{g}\colon\mathrm{Bl}_Z(X)\to\mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(2,B)}(A\otimes\mathscr{U})$, такой что φ'' — обратный образ тавтологического вложения.

Построим теперь морфизм в обратном направлении. Пусть $\mathscr{L}:=\mathscr{O}_{\mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(2,B)}(A\otimes\mathscr{U})/\,\mathrm{Gr}(2.B)}(-1)$ — тавтологическое линейное расслоение и $\mathscr{L}\hookrightarrow A\otimes p^*\mathscr{U}$ — тавтологическое вложение. Композиция

$$\mathscr{L}\hookrightarrow A\otimes p^*\mathscr{U}\hookrightarrow A\otimes B\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(2,B)}(A\otimes\mathscr{U})}$$

является вложением расслоений, значит существует морфизм $f\colon\mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(2,B)}(A\otimes\mathscr{U})\to\mathbb{P}(A\otimes B)=X$, такой что $\mathscr{L}\cong f^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}(A\otimes B)}(-1)$. Чтобы поднять его до морфизма $\tilde{f}\colon\mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(2,B)}(A\otimes\mathscr{U})\to\mathrm{Bl}_Z(X)$ достаточно проверить, что схемный прообраз Z является дивизором Картье. Для этого заметим, что морфизм $f^*\varphi$ раскладывается в композицию

$$B^*\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(2,B)}(A\otimes\mathscr{U})}\twoheadrightarrow p^*\mathscr{U}^*\xrightarrow{\psi}A\otimes\mathscr{L}^*.$$

Здесь первая стрелка сюръективна, значит схемный прообраз Z (равный по определению детерминантали $D_1(f^*\varphi)$) равен $D_1(\psi)$. Но ψ — морфизм расслоений ранга 2, значит $D_1(\psi)$ — схема нулей морфизма

$$\wedge^2\psi\colon p^*(\bigwedge\nolimits^2\mathscr{U}^*)\to\bigwedge\nolimits^2 A\otimes(\mathscr{L}^*)^2,$$

то есть схема нулей сечения линейного расслоения $\bigwedge^2 A\otimes(\mathscr{L}^*)^2\otimes p^*(\bigwedge^2\mathscr{U})\cong\mathscr{O}_{\mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(2,B)}(A\otimes\mathscr{U})}(2H-\bar{H})$. Так это сечение не равно нулю тождественно, а $\mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(2,B)}(A\otimes\mathscr{U})$ гладко, это дивизор Картье, значит существует искомое поднятие $\tilde{f}$.

Остается проверить, что построенные морфизмы $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ взаимно обратны, что довольно очевидно. Кроме того, приведенное рассуждение также доказывает искомое выражение для класса исключительного дивизора, а сам исключительный дивизор отождествляется с

$$\mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(2,B)}(p^*\mathscr{U}) \times_{\mathrm{Gr}(2,B)} \mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(2,B)}(A \otimes \mathscr{L}^*) \cong \mathrm{Fl}(1,2;B) \times_{\mathrm{Gr}(2,B)} (\mathrm{Gr}(2,B) \times \mathbb{P}(A)) \cong \mathrm{Fl}(1,2;B) \times \mathbb{P}(A). \quad \square$$

Из построенного выше изоморфизма можно вывести много других.

Упражнение 33. *Пусть $S \subset \mathbb{P}^4$ — кубический скролл. Докажите, что $\mathrm{Bl}_S(\mathbb{P}^4) \cong \mathbb{P}_{\mathbb{P}^2}(\mathscr{F})$, где $\mathscr{F}$ — расслоение ранга 3 на $\mathbb{P}^2$, определяемое последовательностью $0 \to \mathscr{F} \to \Omega_{\mathbb{P}^2}(1)^{\oplus 2} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^2} \to 0$.*

Упражнение 34. *Пусть $C \subset \mathbb{P}^3$ — скрученная кубика. Докажите, что $\mathrm{Bl}_C(\mathbb{P}^3) \cong \mathbb{P}_{\mathbb{P}^2}(\mathscr{F})$, где $\mathscr{F}$ — расслоение ранга 2 на $\mathbb{P}^2$, определяемое последовательностью $0 \to \mathscr{F} \to \Omega_{\mathbb{P}^2}(1)^{\oplus 2} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}^{\oplus 2} \to 0$.*

Докажем лемму, которую мы использовали в доказательстве Леммы 27.1.

Лемма 27.2. *Пусть $\varphi \colon \mathscr{E} \twoheadrightarrow i_*\mathscr{F}$ — сюръекция, где $i \colon D \hookrightarrow X$ — вложение дивизора Картье, $\mathscr{E}$ локально свободен на X, а $\mathscr{F}$ локально свободен на D. Тогда пучок $\mathrm{Ker}\,\varphi$ локально свободен на X.*

Доказательство. Вопрос локальный, поэтому можно считать, что $X = \mathrm{Spec}(R)$, $D = \mathrm{Spec}(R/f)$, где f не является делителем нуля, а $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F}$ свободные модули над R и R/f соответственно. Иначе говоря, задан сюръективный морфизм $\varphi \colon R^{\oplus n} \twoheadrightarrow (R/f)^{\oplus m}$. Заметим, что его ядро и коядро совпадают с ядром и коядром морфизма $(\tilde{\varphi}, f \cdot \mathrm{id}) \colon R^{\oplus(n+m)} \to R^{\oplus m}$, где $\tilde{\varphi}$ — произвольное поднятие φ. Это легко следует из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R^{\oplus m} \arrow[r, "\binom{0}{\mathrm{id}}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & R^{\oplus(n+m)} \arrow[r, "(\mathrm{id},0)"] \arrow[d, "(\tilde{\varphi}, f\cdot\mathrm{id})"] & R^{\oplus n} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & R^{\oplus m} \arrow[r, "f\cdot\mathrm{id}"] & R^{\oplus m} \arrow[r] & (R/f)^{\oplus m} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

В частности, $(\tilde{\varphi}, f \cdot \mathrm{id})$ сюръективен, а значит его ядро локально свободно. Следовательно, равное ему ядро φ также локально свободно. $\square$

Упражнение 35. *Пусть $\dim A = \dim B = 3$. Покажите, что*

$$\mathrm{Bl}_{\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)}(\mathbb{P}(A \otimes B)) \cong \mathrm{Bl}_{\mathbb{P}(A^*)\times\mathbb{P}(B^*)}(\mathbb{P}(A^* \otimes B^*)),$$

причем $E \cong \mathbb{P}_{\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)}(\Omega_{\mathbb{P}(A)}(1) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}(B)}(1))$ и $E = 2H - \bar{H}$.

Упражнение 36. *Пусть $\dim V = 3$. Покажите, что*

$$\mathrm{Bl}_{\mathbb{P}(V)}(\mathbb{P}(S^2V)) \cong \mathrm{Bl}_{\mathbb{P}(V^*)}(\mathbb{P}(S^2V^*)),$$

причем $E \cong \mathbb{P}_{\mathbb{P}(V)}(S^2(\Omega_{\mathbb{P}(V)}(1)))$ и $E = 2H - \bar{H}$.

Упражнение 37. *Пусть $\dim V = 6$. Покажите, что*

$$\mathrm{Bl}_{\mathrm{Gr}(2,V)}(\mathbb{P}(\textstyle\bigwedge^2 V)) \cong \mathrm{Bl}_{\mathrm{Gr}(2,V^*)}(\mathbb{P}(\textstyle\bigwedge^2 V^*)),$$

причем $E \cong \mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(2,V)}(\bigwedge^2 \mathscr{U}^{\perp})$ и $E = 2H - \bar{H}$.

Лекция VIII. Схема Чжоу

В дифференциальной геометрии пространства, параметризующие подмногообразия или отображения многообразий, как правило являются огромными функциональными пространствами, то есть являются объектами совсем другой категории. В алгебраической геометрии, напротив, эти пространства также являются алгебраическими многообразиями (или очень к ним близки).

28. Прямые

Прямой в $\mathbb{P}^n$ называется подмногообразие, изоморфное образу отображения $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n$ степени 1.

Лемма 28.1. *Множество прямых в проективном пространстве* $\mathbb{P}(W)$ *— это* $\mathrm{Gr}(2, W)(\mathsf{k})$.

Доказательство. Пусть $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}(W)$ — отображение степени 1, а $W^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ — соответствующий эпиморфизм. Переходя к глобальным сечениям получаем морфизм $W^* \to \mathsf{k}^2$, который должен быть сюръективным, так как иначе исходный морфизм раскладывался бы в композицию $W^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ и не мог бы быть сюръективен. Такой морфизм дает k-точку грассманиана, причем замена f на другой морфизм с тем же образом равносильна действию группы $\mathrm{Aut}(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) = \mathrm{GL}_2(\mathsf{k})$, то есть замене базиса в k^2, то есть не влияет на полученную k-точку грассманиана.

Обратно, k-точка грассманиана — это сюръекция $W^* \to \mathsf{k}^2$. Отождествляя k^2 с U^*, $\dim U = 2$, получаем на $\mathbb{P}(U)$ морфизм $W^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(U)} \to U^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(U)} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}(U)}(1)$, то есть прямую в $\mathbb{P}(W)$. □

Пусть теперь $X \subset \mathbb{P}(W)$ — замкнутая подсхема. По определению, прямая на X — это прямая в $\mathbb{P}(W)$, лежащая в X.

Лемма 28.2. *Множество прямых на подсхеме* $X \subset \mathbb{P}(W)$ *— это множество* $F_1(X)(\mathsf{k})$ *точек некоторой замкнутой подсхемы в* $F_1(X) \subset \mathrm{Gr}(2, W)$.

Доказательство. Пусть X задается уравнениями $f_1, \dots, f_m$ степеней $d_1, \dots, d_m$ соответственно, то есть $f_i \in S^{d_i} W^*$. Сюръекция $W^* \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(2,W)} \to \mathscr{U}^*$ дает сюръекцию $S^d W^* \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(2,W)} \to S^d \mathscr{U}^*$, что позволяет рассматривать f_i как глобальное сечение расслоения $S^{d_i} \mathscr{U}^*$. Пусть

$$F_1(X) := Z_s$$

схема нулей сечения $s = (f_1, \dots, f_m)$ расслоения $S^{d_1} \mathscr{U}^* \oplus \dots \oplus S^{d_m} \mathscr{U}^*$ на $\mathrm{Gr}(2, W)$. Покажем, что она обладает искомыми свойствами.

Пусть z — k-точка грассманиана $\mathrm{Gr}(2, W)$, то есть сюръекция $W^* \to U^*$, где $\dim U = 2$. Точка $z \in \mathrm{Gr}(2, W)$ лежит в Z_s, если образ каждого из f_i относительно морфизма $S^d W^* \to S^d U^*$ равен нулю. Но ясно, что этот образ — в точности ограничение f_i на нашу прямую — $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(W)$. Поэтому обращение в нуль этих образов равносильно обращению в нуль $s_{|\mathbb{P}(U)}$, то есть как раз тому, что $\mathbb{P}(U) \subset X$ (по универсальному свойству схемы нулей). Иначе говоря, прямая соответствующая точке z лежит на X тогда и только тогда, когда $z \in F_1(X)$. □

Аналогично, m-мерной плоскостью в $\mathbb{P}^n$ называется подмногообразие, изоморфное образу отображения $\mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^n$ степени 1.

Упражнение 38. *Докажите, что множество m-мерных плоскостей на подсхеме $X \subset \mathbb{P}(W)$ — это множество k-точек некоторой замкнутой подсхемы в* $\mathrm{Gr}(m + 1, W)(\mathsf{k})$.

29. Коники

Коникой в $\mathbb{P}^2$ называется кривая, задаваемая однородным уравнением степени 2.

Лемма 29.1. *Пусть характеристика поля* k *не равна 2, а* $C \subset \mathbb{P}^2$ *— коника. Тогда*

- C *— гладкая кривая; или*
- C *— объединение двух пересекающихся прямых (возможно определенных над квадратичным расширением поля* k*), пересекающихся в одной точке; или*
- C *— прямая с неприведенной структурой.*

Доказательство. Уравнение C — квадратичная форма на трехмерном пространстве. Покажем, что невырожденность формы равносильна гладкости кривой. В самом деле, производные уравнения — это линейные формы, являющиеся строками матрицы квадратичной формы, поэтому наличие у них общего нетривиального нуля равносильно тому, что ядро матрицы содержит нетривиальный вектор, то есть вырожденности формы.

Пусть теперь квадратичная форма вырождена. Если ее ядро одномерно, то возникающая на факторе квадратичная форма приводится к виду $x^2 - \lambda y^2$. Переходя в случае необходимости к расширению $\mathsf{k}(\sqrt{\lambda})$, можно считать, что $\sqrt{\lambda} \in \mathsf{k}$. Тогда этот многочлен раскладывается в произведение линейных $(x - \sqrt{\lambda}y)(x + \sqrt{\lambda}y)$, а его схема нулей является объединением двух прямых.

Если же ядро формы двумерно, то форма имеет вид f^2, где f — многочлен степени 1, значит коника является прямой с неприведенной структурой. $\square$

Обозначим линейное расслоение $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(1)_{|C}$ на конике C через $\mathscr{L}_C$. По определению это то самое линейное расслоение на C, которое задает вложение C в $\mathbb{P}^2$.

Упражнение 39. *Покажите, что если* C *— гладкая коника и* $C(\mathsf{k}) \neq \emptyset$*, то* $C \cong \mathbb{P}^1$*, а* $\mathscr{L}_C \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$.

Упражнение 40. *Классифицируйте квадрики любой размерности над полем нечетной характеристики.*

Лемма 29.2. *Если* C *— коника, то* $\Gamma(C, \mathscr{L}_C) = \mathsf{k}^3$.

Доказательство. Если C — гладкая, то $\Gamma(C, \mathscr{L}_C) = \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(2)) = \mathsf{k}^3$.

Если $C = L_1 \sqcup L_2$, то возникает точная последовательность $0 \to \mathscr{O}_{L_1}(-1) \to \mathscr{O}_C \to \mathscr{O}_{L_2} \to 0$. Подкручивая на $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(1)|_C$, получаем $0 \to \mathscr{O}_{L_1} \to \mathscr{L}_C \to \mathscr{O}_{L_2}(1) \to 0$, откуда следует $\dim \Gamma(C, \mathscr{L}_C) = 3$.

Наконец, если C — двойная прямая L, то есть точная тройка $0 \to \mathscr{O}_L(-1) \to \mathscr{O}_C \to \mathscr{O}_L \to 0$, и остается повторить те же аргументы. $\square$

Замечание 29.3. Вообще-то, равенство $\Gamma(C, \mathscr{L}_C) = \mathsf{k}^3$ элементарно доказывается с помощью подкрученной резольвенты Кошуля

$$0 \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(1) \to \mathscr{L}_C \to 0$$

из общих свойств когомологий когерентных пучков и зануления $H^1(\mathbb{P}^2, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(-2))$.

Упражнение 41. *Проверьте, что* $\Gamma(C, \mathscr{L}_C^d) = \mathsf{k}^{2d+1}$ *для любого* $d > 0$.

Коникой в $\mathbb{P}^n$ называется подсхема C, изоморфная плоской конике, так что $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1)_{|C} \cong \mathscr{L}_C$.

Следствие 29.4. *Если* $C \subset \mathbb{P}(W)$ *— коника, то найдется единственная плоскость* $\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}(W)$*, такая что* $C \subset \mathbb{P}^2$.

Доказательство. Вложение $C \to \mathbb{P}(W)$ задается морфизмом $W^* \otimes \mathscr{O}_C \to \mathscr{L}_C$. Ясно, что вложение в $\mathbb{P}(W)$ пропускается через вложение в подпространство $\mathbb{P}(U)$, $U \subset W$, тогда и только тогда, когда морфизм $W^* \otimes \mathscr{O}_C \to \mathscr{L}_C$ пропускается через $U^* \otimes \mathscr{O}_C$. Ясно, что $\dim U$ не может быть равно 2, так как иначе вложение $C \to \mathbb{P}(W)$ пропускалось бы через вложение $C \to \mathbb{P}^1$, что невозможно. Значит морфизм $W^* \to \Gamma(C, \mathscr{L}_C) = \mathsf{k}^3$ сюръективен (иначе мы могли бы взять в качестве U^* образ этого морфизма), значит единственная возможность выбрать U с $\dim U = 3$ — это взять в качестве U^* образ. $\square$

Следствие 29.5. *Всякая коника в $\mathbb{P}^n$ — это пересечение $\mathbb{P}^2$ и квадрики.*

Если мы хотим описать множество всех коник в $\mathbb{P}(W)$ — первое, что можно сделать — это рассмотреть множество всех пар плоскость-квадрика, то есть $\mathrm{Gr}(3, W) \times \mathbb{P}(S^2W^*)$. Однако, это не годится, так как квадрика определена коникой неоднозначно, то есть разным квадрикам могут соответствовать одинаковые коники. Более того, если квадрика содержит плоскость, то их пересечение вообще не является коникой (а является плоскостью).

Упражнение 42. *Множество коник в $\mathbb{P}(W)$ — это $\mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(3,W)}(S^2\mathscr{U}^*)(\mathsf{k})$.*

Упражнение 43. *Множество гладких коник в $\mathbb{P}(W)$ — это множество k-точек некоторой открытой подсхемы в $\mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(3,W)}(S^2\mathscr{U}^*)$ (опишите дополнение как схему нулей явного сечения явного линейного расслоения).*

Упражнение 44. *Множество неприведенных коник в $\mathbb{P}(W)$ — это множество k-точек некоторой замкнутой подсхемы в $\mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(3,W)}(S^2\mathscr{U}^*)$, которая изоморфна многообразию флагов $\mathrm{Fl}(2, 3; W)$.*

Упражнение 45. *Множество коник в подсхеме $X \subset \mathbb{P}(W)$ — это множество k-точек некоторой замкнутой подсхемы в $\mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(3,W)}(S^2\mathscr{U}^*)$.*

30. Параметризация Чжоу

Докажем результат о параметризации произвольных семейств подмногообразий в $\mathbb{P}^n$ (а значит и в произвольных проективных многообразиях) с помощью так называемых "координат Чжоу".

Начнем с подготовки. Пусть E — расслоение на схеме X. Говорят, что X **порождается глобальными сечениями**, если естественное отображение вычисления $\Gamma(X, E) \otimes \mathscr{O}_X \xrightarrow{\mathrm{ev}} E$ сюръективно.

Лемма 30.1. *Пусть X — целостная схема, E — расслоение на X, порожденное глобальными сечениями. Тогда для общего сечения $s \in \Gamma(X, E)$ либо $Z_s = \emptyset$, либо $\dim Z_s = \dim X - r(E)$. Иначе говоря, существует непустое открытое подмножество $U \subset \mathbb{P}(\Gamma(X, E))$, такое что это свойство выполнено для всякого $s \in U$. Более того, если X гладкое, то U можно выбрать так, что для всякого $s \in U$ схема $Z_s \subset X$ тоже гладкая.*

Доказательство. Обозначим $W := \Gamma(X, E)$ и пусть $F = \mathrm{Ker}(W \otimes \mathscr{O}_X \to E)$. Рассмотрим произведение $X \times \mathbb{P}(W)$ и проекции $p_1 \colon X \times \mathbb{P}(W) \to X$ и $p_2 \colon X \times \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(W)$. Рассмотрим также естественный морфизм пучков $f : p_2^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1) \hookrightarrow W \otimes \mathscr{O}_{X \times \mathbb{P}(W)} \xrightarrow{\mathrm{ev}} p_1^*E$ — композицию тавтологического вложения и морфизма вычисления (это "универсальное сечение" расслоения E). Покажем, что схема нулей $Z_f \subset X \times \mathbb{P}(W)$ совпадает с проективизацией $\mathbb{P}_X(F)$. Для этого рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & & p_2^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1) \arrow[dl, dashed] \arrow[d, hook] \arrow[dr, "f"] & & \\
0 \arrow[r] & p_1^*F \arrow[r] & W \otimes \mathscr{O}_{X \times \mathbb{P}(W)} \arrow[r, "\mathrm{ev}"] & p_1^*E \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

На схеме Z_f морфизм f равен нулю, поэтому существует пунктирная стрелка, задающая отображение $Z_f \to \mathbb{P}_X(F)$. Обратно, на схеме $\mathbb{P}_X(F) \subset X \times \mathbb{P}(W)$ вложение, соответствующее вертикальной стрелке пропускается через тавтологическое вложение, обозначенное пунктирной стрелкой, значит ограничение f равно нулю, значит $\mathbb{P}_X(F) \subset Z_f$. Отсюда следует искомое равенство.

Рассмотрим теперь проекцию $p_2 : Z_f \to \mathbb{P}(W)$. Заметим, что слой этой проекции над точкой $w \in \mathbb{P}(W)$ — это схема нулей в X соответствующего сечения расслоения E, а схема Z_f целостная (а в случае гладкого X — гладкая). Поэтому осталось заметить, что у морфизма целостных многообразий общий слой либо пуст, либо имеет размерность, равную разности размерностей этих многообразий, то есть $\dim Z_f - \dim \mathbb{P}(W)$, причем так как

$$\dim Z_f = \dim X + r(F) - 1 = \dim X + \dim W - r(E) - 1 = \dim X - r(E) + \dim \mathbb{P}(W),$$

она равна в точности $\dim X - r(E)$. Кроме того, у морфизма (сепарабельного) гладких многообразий общий слой гладок. □

Упражнение 46. *Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ замкнутая подсхема,* $\operatorname{codim} X = m$. *Проверьте, что для общей плоскости $\mathbb{P}^m \subset \mathbb{P}^n$ пересечение $X \cap \mathbb{P}^m$ — артинова подсхема, причем* $\dim \Gamma(X \cap \mathbb{P}^m, \mathscr{O}_{X\cap\mathbb{P}^m})$ *не зависит от выбора плоскости.*

Определение 30.2. Число $\dim \Gamma(X \cap \mathbb{P}^m, \mathscr{O}_{X\cap\mathbb{P}^m})$ для общей плоскости $\mathbb{P}^m \subset \mathbb{P}^n$ называется степенью подсхемы $X \subset \mathbb{P}^n$.

Также нам понадобится описание группы классов дивизоров на грассманиане.

Лемма 30.3. *Имеем* $\operatorname{Pic} \operatorname{Gr}(m, W) \cong \mathbb{Z}$, *причем образующей является линейное расслоение* $\bigwedge^m \mathscr{U}^*$.

Доказательство. Выберем разложение $W = V_0 \oplus V_1$, $\dim V_0 = m$. Подмногообразие

$$D = \{U \in \operatorname{Gr}(m, W) \mid U \cap V_0 \neq 0\} \subset \operatorname{Gr}(m, W)$$

является простым дивизором (морфизм $\operatorname{Gr}_{\mathbb{P}(V_1)}(m-1, (W \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V_1)})/\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V_1)}(-1)) \to \operatorname{Gr}(m, W)$ имеет D своим образом, значит D неприводимо). При этом, как мы уже проверяли, дополнение к D — аффинное пространство $\mathbb{A}(\operatorname{Hom}(V_0, V_1))$. Из точной последовательности

$$\mathbb{Z}D \to \operatorname{Pic} \operatorname{Gr}(m, V) \to \operatorname{Pic}(\operatorname{Gr}(m, W) \setminus D) \to 0$$

следует, что D порождает группу $\operatorname{Pic}(\operatorname{Gr}(m, W))$. Остается заметить, что D является схемой нулей сечения расслоения $\bigwedge^m \mathscr{U}^*$, соответствующего вложению $\bigwedge^m V_0^* \subset \bigwedge^m W^* = \Gamma(\operatorname{Gr}(m, W), \bigwedge^m \mathscr{U}^*)$, следовательно дивизору D соответствует расслоение $\bigwedge^m \mathscr{U}^*$. □

Линейное расслоение $\bigwedge^m \mathscr{U}^*$ на $\operatorname{Gr}(m, W)$ обозначается $\mathscr{O}_{\operatorname{Gr}(m,W)}(1)$, а его d-ая тензорная степень обозначается $\mathscr{O}_{\operatorname{Gr}(m,W)}(d)$.

Упражнение 47. *Пусть $0 \subset V_2 \subset V_1 \subset W$,* $\dim V_2 < m < \dim V_1$. *Проверьте, что функтор обратного образа для вложения* $\operatorname{Gr}(k, V_1/V_2) \to \operatorname{Gr}(m, W)$ *(где $k = m - \dim V_2$) переводит* $\mathscr{O}_{\operatorname{Gr}(m,W)}(d)$ *в* $\mathscr{O}_{\operatorname{Gr}(k,V_1/V_2)}(d)$.

Теперь все готово для конструкции.

Пусть $X \subset \mathbb{P}(W)$ — неприводимая подсхема коразмерности m и степени d. Пусть $\dim W = n$. Рассмотрим грассманиан $\operatorname{Gr}(m, W)$ и многообразие флагов $\operatorname{Fl}(1, m; W) \subset \mathbb{P}(W) \times \operatorname{Gr}(m, W)$ и пусть p и q — проекции $\operatorname{Fl}(1, m; W)$ на $\mathbb{P}(W)$ и $\operatorname{Gr}(m, W)$ соответственно. Положим

$$Z_X = \operatorname{Gr}_X(m-1, (W \otimes \mathscr{O}_X)/\mathscr{O}_X(-1)) \cong X \times_{\mathbb{P}(W)} \operatorname{Fl}(1, m; W) = p^{-1}(X) \subset X \times \operatorname{Gr}(m, W).$$

Наконец, пусть $D_X = q(Z_X) \subset \operatorname{Gr}(m, W)$. Ясно, что D_X — неприводимое замкнутое подмножество.

Теорема 30.4. *Подсхема $D_X \subset \operatorname{Gr}(m, W)$ — схема нулей сечения расслоения $\mathscr{O}_{\operatorname{Gr}(m,W)}(d)$. Если подсхема $X \subset \mathbb{P}(W)$ приведена, то она однозначно восстанавливается по D_X.*

Доказательство. Во-первых, заметим, что морфизм p — локально тривиальное расслоение со слоем $\mathrm{Gr}(m-1,n-1)$. Поэтому $\operatorname{codim}_{\mathrm{Fl}(1,m;W)} Z_X = \operatorname{codim} X = m$. Значит

$$\dim D_X \le \dim Z_X = \dim \mathrm{Gr}(m,W) + (m-1) - m = \dim \mathrm{Gr}(m,W) - 1.$$

Выберем теперь общее подпространство $U_1 \subset W$ размерности $m+1$ (так чтобы $X \cap \mathbb{P}(U_1)$ было артиновой подсхемой), и общее подпространство $U_2 \subset U_1$ размерности $m-1$ (так чтобы $X \cap \mathbb{P}(U_2) = \varnothing$). Тогда рассмотрим $L_{U_1,U_2} = \{U \in \mathrm{Gr}(m,W) \mid U_2 \subset U \subset U_1\} \cong \mathbb{P}(U_1/U_2)$. Ясно, что $D_X \cap L_{U_1,U_2}$ — подсхема длины d. Отсюда следует, что D_X дивизор. В самом деле, заметим, что $\mathrm{Gr}(m,U_1) \subset \mathrm{Gr}(m,W)$ — схема нулей сечения расслоения $(\mathscr{U}^*)^{\oplus(n-m-1)}$, которое порождается глобальными сечениями, а $L_{U_1,U_2} \subset \mathrm{Gr}(m,U_1)$ — схема нулей сечения расслоения $(U_1/\mathscr{U})^{\oplus(m-1)}$, которое тоже порождается глобальными сечениями, поэтому $\operatorname{codim}_{L_{U_1,U_2}}(D_X \cap L_{U_1,U_2}) = \operatorname{codim} D_X$. Остается заметить, что если $\mathscr{O}(k)$ — линейное расслоение, соответствующее дивизору D_X, то дивизору $D_X \cap L_{U_1,U_2}$ на L_{U_1,U_2} также соответствует расслоение $\mathscr{O}(k)$, поэтому $k = d$.

Покажем теперь, как X восстановить по D_X. Заметим для этого, что если $x \in \mathbb{P}(W) \setminus X$ — произвольная точка, то для общего $U \in q(p^{-1}(x))$ пересечение $\mathbb{P}(U) \cap X$ пусто, то есть $q(p^{-1}(x)) \not\subset D_X$, в то время как для $x \in X$ имеем $q(p^{-1}(x)) \subset D_X$ по построению. Значит

$$X = \{x \in X \mid q(p^{-1}(x)) \subset D_X\}.$$

Если X приведена, то схемная структура на X восстанавливается однозначно. $\square$

Упражнение 48. *Покажите, что L_{U_1,U_2} — прямая на грассманиане $\mathrm{Gr}(m,W)$ и что всякая прямая на $\mathrm{Gr}(m,W)$ имеет такой вид. Иначе говоря, $F_1(\mathrm{Gr}(m,W)) = \mathrm{Fl}(m-1,m+1;W)$.*

Остается заметить, что множество всех дивизоров, соответствующих расслоению $\mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(m,W)}(d)$ — это проективное пространство $\mathbb{P}(V)$, $V = \Gamma(\mathrm{Gr}(m,W), \mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(m,W)}(d))$. Мы показали, что всякая подсхема $X \subset \mathbb{P}(W)$ коразмерности m и степени d соответствует точке в нем. Отдельно можно проверить, что в $\mathbb{P}(V)$ существует локально замкнутое подмножество $C_{n-1,n-1-m,d}$ (которое называется схема Чжоу) такое что подсхемы X соответствуют его k-точкам. Однородные координаты на $\mathbb{P}(V)$ дают систему координат на $C_{n-1,n-1-m,d}$, которые называются координаты Чжоу.

Упражнение 49. *Покажите, что $C_{n,n-1,d} = \mathbb{P}(S^d W^*)$.*

Упражнение 50. *Покажите, что $C_{n,k,1} = \mathrm{Gr}(k+1,n+1)$.*

Пример 30.5. Рассмотрим нульмерные подсхемы степени 2 в $\mathbb{P}^n$. Тогда $m = n$, $\mathrm{Gr}(m,n+1) = \mathbb{P}^n$ (двойственное проективное пространство), а D_X — объединение двух гиперплоскостей (если X — две различные точки), либо двойная плоскость (если X — подсхема длины 2, сосредоточенная в одной точке). На этом примере хорошо видно, что приведенность X необходима для восстановления X по D_X.

Упражнение 51. *Покажите, что $C_{n,0,2} = D_2(\varphi)$, где $\varphi : W \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(S^2W^*)} \to W^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(S^2W^*)}$. Проверьте, что для $n = 2$ — это гиперповерхность степени 3 в $\mathbb{P}^5$.*

Упражнение 52. *Опишите схему Чжоу $C_{3,1,2}$ кривых степени 2 в $\mathbb{P}^3$.*

Лекция IX. Многообразия модулей

31. Функторы точек

На прошлой лекции мы установили, что множества различных алгебро-геометрических объектов часто находятся в биекции с множеством точек некоторых алгебраических многообразий. Естественно, хотелось бы, чтобы эти многообразия не падали с неба, а определялись однозначно изучаемыми множествами объектов. При этом очевидно, что множество k-точек схемы X не может определять схему однозначно — ясно, что на почти всех схемах множества k-точек равномощны. Поэтому нужна какая-то дополнительная структура. Наиболее удобной, оказывается структура "функтора точек".

Пусть X — произвольная схема. Напомним, что k-точка схемы X — это морфизм $\operatorname{Spec}\mathsf{k} \to X$. Аналогично, S-**точкой схемы** X (где S — произвольная схема), называется морфизм $S \to X$. Множество S-точек схемы X обозначается $X(S)$. Таким образом, $X(S) = \operatorname{Map}(S, X)$.

Заметим, что сопоставление $S \mapsto X(S)$ является контравариантным функтором на категории схем — морфизму $f\colon S' \to S$ очевидно сопоставляется морфизм $f^*\colon X(S) \to X(S')$, переводящий S-точку $S \to X$ в S'-точку $S' \xrightarrow{f} S \to X$. Обозначим этот функтор h_X. Итак,

$$h_X\colon \operatorname{Sch}^{\text{opp}} \to \operatorname{Sets}, \qquad h_X(S) = X(S).$$

где Sch — категория схем, а Sets — категория множеств. Оказывается, по функтору точек схема восстанавливается однозначно.

Предложение 31.1. *Если функторы точек h_X и h_Y изоморфны, то и схемы X и Y изоморфны. Более того, для любого функтора $F\colon \operatorname{Sch}^{\text{opp}} \to \operatorname{Sets}$ имеется изоморфизм*

$$\operatorname{Hom}(h_X, F) \cong F(X).$$

В частности, $\operatorname{Hom}(h_X, h_Y) = h_Y(X) = Y(X) = \operatorname{Map}(X, Y)$.

Доказательство. Это совершенно общекатегорное утверждение известное как лемма Ионеды. Докажем его. Пусть $\alpha\colon h_X \to F$ — морфизм функторов, то есть набор морфизмов $\alpha_S\colon h_X(S) \to F(S)$ для всех схем S, таких что квадраты

$$\begin{tikzcd} h_X(S) \arrow[r, "\alpha_S"] \arrow[d, "h_X(\varphi)"'] & F(S) \arrow[d, "F(\varphi)"] \\ h_X(S') \arrow[r, "\alpha_{S'}"] & F(S') \end{tikzcd}$$

коммутативны для всех морфизмов $\varphi\colon S' \to S$. В частности он дает морфизм $\alpha_X\colon h_X(X) \to F(X)$. Но $h_X(X) = \operatorname{Map}(X, X)$ содержит выделенный элемент, id_X. Положим

$$f_\alpha := \alpha_X(\mathrm{id}_X) \in F(X).$$

Обратно, пусть $f \in F(X)$. Каждой схеме S и каждому морфизму $\varphi\colon S \to X$ сопоставим элемент $F(\varphi)(f) \in F(S)$ — образ f под действием морфизма $F(\varphi)\colon F(X) \to F(S)$. Тем самым получаем сопоставление $\varphi \mapsto F(\varphi)(f)$, то есть отображение $h_X(S) \to F(S)$. Оно является морфизмом функторов $h_X \to F$, так как коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} h_X(S) \arrow[r] \arrow[d, "h_X(g)"'] & F(S) \arrow[d, "F(g)"] \\ h_X(S') \arrow[r] & F(S') \end{tikzcd}$$

для всякого морфизма $g\colon S' \to S$ очевидна. Действительно, в одном случае $\varphi\colon S \to X$ переходит сначала в $h_X(g)(\varphi) = \varphi \circ g\colon S' \to X$, а затем в $F(\varphi \circ g)(f)$, а в другом — сначала в $F(\varphi)(f)$, а затем в $F(g)(F(\varphi)(f))$. Но $F(\varphi \circ g)(f) = F(g)(F(\varphi)(f))$ в силу функториальности F.

Обозначим полученный морфизм функторов через $\alpha_f\colon h_X \to F$. Тогда ясно, что

$$\alpha_{f_\alpha}(\varphi) = F(\varphi)(f_\alpha) = F(\varphi)(\alpha_X(\mathrm{id}_X)) = \alpha_S(h_X(\varphi)(\mathrm{id}_X)) = \alpha_S(\mathrm{id}_X \circ \varphi) = \alpha_S(\varphi),$$

так что $\alpha_{f_\alpha} = \alpha$. Обратно,

$$f_{\alpha_f} = \alpha_f(\mathrm{id}_X) = F(\mathrm{id}_X)(f) = \mathrm{id}_{F(X)}(f) = f.$$

Таким образом, мы убедились, что $\mathrm{Hom}(h_X, F) = F(X)$. Равенство $\mathrm{Hom}(h_X, h_Y) = \mathrm{Map}(X, Y)$ сразу отсюда следует. Наконец, если $h_X \cong h_Y$, то взаимно обратные морфизмы $h_X \to h_Y$ и $h_Y \to h_X$ обязаны происходить из морфизмов $X \to Y$ и $Y \to X$, которые в силу доказанного равенства обязаны быть взаимно обратными. $\square$

Доказанное утверждение на самом деле довольно удивительно. Оно говорит о том, что хотя знания множества k-точек схемы совершенно недостаточно, для того чтобы эту схему описать, но знания всех S-точек для всех S (как функтора из категории схем) уже вполне достаточно. Иначе говоря, топология и кольцо функций закодированы в функториальности этого соответствия.

32. Представимые функторы и универсальные семейства

Пусть теперь задан произвольный функтор $F\colon \mathrm{Sch}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Sets}$.

Определение 32.1. Функтор F называется представимым, если существует схема M и изоморфизм функторов $h_M \cong F$. В этом случае говорят, что M — тонкое многообразие модулей, соответствующее функтору F.

Пример 32.2. Пусть W — векторное пространство. Рассмотрим такой функтор $F\colon \mathrm{Sch}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Sets}$. Каждой схеме S сопоставим множество линейных подрасслоений $\epsilon\colon \mathscr{L} \subset W \otimes \mathscr{O}_S$, с точностью до эквивалентности $(\mathscr{L}, \epsilon) \sim (\mathscr{L}', \epsilon')$, если существует изоморфизм $\varphi\colon \mathscr{L}' \to \mathscr{L}$, такой что $\epsilon' = \epsilon \circ \varphi$. Тогда функтор F представим, а соответствующее тонкое многообразие модулей — $\mathbb{P}(W)$.

Пример 32.3. Пусть W — векторное пространство. Рассмотрим такой функтор $F\colon \mathrm{Sch}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Sets}$. Каждой схеме S сопоставим множество подрасслоений $\epsilon\colon \mathscr{E} \subset W \otimes \mathscr{O}_S$ ранга r, с точностью до эквивалентности $(\mathscr{E}, \epsilon) \sim (\mathscr{E}', \epsilon')$, если существует изоморфизм $\varphi\colon \mathscr{E}' \to \mathscr{E}$, такой что $\epsilon' = \epsilon \circ \varphi$. Тогда функтор F представим, а соответствующее тонкое многообразие модулей — $\mathrm{Gr}(r, W)$.

Упражнение 53. *Напишите функтор, чье тонкое многообразие модулей — многообразие флагов.*

Пример 32.4. Пусть E — векторное расслоение на схеме X. Рассмотрим функтор $F\colon \mathrm{Sch}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Sets}$, сопоставляющий схеме S множество морфизмов $f\colon S \to X$ и линейных подрасслоений $\epsilon\colon \mathscr{L} \subset f^*E$, с точностью до эквивалентности $(f, \mathscr{L}, \epsilon) \sim (f', \mathscr{L}', \epsilon')$, если $f' = f$ и существует изоморфизм расслоений $\varphi\colon \mathscr{L}' \to \mathscr{L}$, такой что $\epsilon' = \epsilon \circ \varphi$. Тогда функтор F представим, а соответствующее тонкое многообразие модулей — $\mathbb{P}_X(E)$.

Упражнение 54. *Напишите функтор, тонкое многообразие модулей которого — это* $\mathrm{Gr}_X(r, E)$.

Пусть функтор F представим, а соответствующее тонкое многообразие модулей — M. Тогда в множестве $F(M)$ есть выделенный элемент — элемент, соответствующий тождественному морфизму $\mathrm{id}_M \in \mathrm{Map}(M, M) = h_M(M)$ при изоморфизме $F \cong h_M$. Этот элемент называется универсальным семейством на M.

Пример 32.5. В примере 32.2 универсальное семейство — это тавтологическое вложение

$$\mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1) \hookrightarrow W \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}.$$

Пример 32.6. В примере 32.3 универсальное семейство — это тавтологическое вложение

$$\mathscr{U} \hookrightarrow W \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(r,W)}.$$

Пример 32.7. В примере 32.4 универсальное семейство — это проекция $p\colon \mathbb{P}_X(\mathscr{E}) \to X$ и тавтологическое вложение $\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(E)}(-1) \hookrightarrow p^*E$.

Полезно понимать, что на языке многообразий модулей и универсальных семейств лемма Ионеды имеет следующую переформулировку.

Предложение 32.8. *Пусть $F\colon \mathrm{Sch}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Sets}$ — функтор, обладающий тонким многообразием модулей M, а $\mathfrak{u} \in F(M)$ — соответствующее универсальное семейство. Тогда морфизмы $S \to M$ находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами множества $F(S)$, причем если $\varphi\colon S \to M$ соответствует элементу $f \in F(S)$, то $f = F(\varphi)(\mathfrak{u})$.*

33. Функтор подсхем, многочлен Гильберта и плоские пучки

Вернемся к вопросу о параметризации семейств замкнутых подсхем в фиксированном многообразии X. Попробуем определить подходящий функтор $F\colon \mathrm{Sch}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Sets}$. Представим себе, что существует алгебраическое многообразие H_X, параметризующее все замкнутые подсхемы в X. Ясно, что соответствующим универсальным семейстом должна быть замкнутая подсхема $Z_X \subset X \times H_X$ — действительно, если такая подсхема задана, то точкам из H_X можно сопоставлять слои Z_X, которые естественным образом являются замкнутыми подсхемами в X. Аналогично, для каждой S-точки схемы H_X, то есть морфизма $S \to H_X$, можно будет рассмотреть расслоенное произведение $Z_X \times_{H_X} S$ — это будет подсхема в $(X \times H_X) \times_{H_X} S = X \times S$. Таким образом, естественно определить $F(S)$ как множество замкнутых подсхем в $Z \subset X \times S$, возможно с какими-то ограничениями.

Естественное ограничение — слои морфизма $Z \to S$ должны быть “похожими”. Например, если общий слой — точка, то специальный слой тоже должен быть точкой, а не двумя точками. Или, например, если общий слой — коника, то и специальный слой должен быть коникой. Вопрос — как такого рода ограничения сформулировать математически.

Можно, например, рассматривать только такие подсхемы $Z \subset X \times S$, что морфизм $Z \to S$ является локально тривиальным расслоением. Это было бы вполне разумным условием в дифференциальной геометрии, но в алгебраической геометрии — это слишком сильное условие. Конечно, оно запрещает появление лишних точек в слоях, но также оно запрещает и вырождения коник. Поэтому условие локальной тривиальности не годится.

Достаточно разумным со всех точек зрения условием оказывается условие сохранения всех численных инвариантов слоев, в конце концов приводящие к понятию плоскости.

Лемма 33.1. *Пусть $\mathscr{F}$ — когерентный пучок на проективном пространстве $\mathbb{P}^n$. Существует единственный многочлен $\mathrm{P}_{\mathscr{F}}(t) \in \mathbb{Q}[t]$ с рациональными коэфициентыми степени не выше n, так что*

$$\mathrm{P}_{\mathscr{F}}(t) = \dim(H^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}(t))) \qquad \text{для всех целых } t \gg 0.$$

Доказательство. Положим

$$\mathrm{P}_{\mathscr{F}}(t) := \chi(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}(t)) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim(H^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}(t))).$$

Ясно, что правая часть равенства определена при всех $t \in \mathbb{Z}$, причем при $t \gg 0$ старшие когомологии зануляются, поэтому она совпадает с размерностью H^0. Таким образом, достаточно проверить, что это выражение полиномиально зависит от t. Будем доказывать это индукцией по n.

База индукции — $n = 0$ — очевидна, так как в этом случае $\mathscr{F}$ является векторным пространством, подкрутка никак его не меняет, и значит $\mathrm{P}_{\mathscr{F}}(t)$ — константа, равная размерности $\mathscr{F}$.

Пусть теперь $n > 0$. Рассмотрми линейную функцию f на $\mathbb{P}^n$, которая не аннулирует никакое локальное сечение $\mathscr{F}$ (иначе говоря, соответствующая гиперплоскость $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$ не содержит носитель никакой ассоциированной точки пучка $\mathscr{F}$). Получим точную последовательность

$$0 \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \xrightarrow{f} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{n-1}} \to 0.$$

Домножим ее на $\mathscr{F}(t)$, получим точную тройку

$$0 \to \mathscr{F}(t-1) \xrightarrow{f} \mathscr{F}(t) \to \mathscr{F}|_{\mathbb{P}^{n-1}}(t) \to 0.$$

Рассматривая длинную точную последовательность когомологий и альтернированную сумму их размерностей, получаем равенство

$$\mathrm{P}_{\mathscr{F}|_{\mathbb{P}^{n-1}}}(t) = \mathrm{P}_{\mathscr{F}}(t) - \mathrm{P}_{\mathscr{F}}(t-1).$$

Левая часть, по предположению индукции, является многочленом от t (степени не выше $n-1$). Легко видеть, что тогда существует единственный многочлен от t (на единицу большей степени), равный в целых точках $\mathrm{P}_{\mathscr{F}}(t)$. □

Многочлен $\mathrm{P}_{\mathscr{F}}(t)$, описанный в предыдущей лемме называется многочленом Гильберта пучка $\mathscr{F}$. Теорема Римана–Роха позволяет его явно вычислить в терминах характера Черна $\mathrm{ch}(\mathscr{F})$ пучка $\mathscr{F}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_{\mathscr{F}}(t) &= \deg((\exp(tH)\,\mathrm{ch}(\mathscr{F})\,\mathrm{Td}(\mathbb{P}^n)) \\ &= \deg\left(\left(1 + tH + \dots + \frac{t^n}{n!}H^n\right)(r(\mathscr{F}) + \mathrm{ch}_1(\mathscr{F}) + \dots + \mathrm{ch}_n(\mathscr{F}))(1 + \mathrm{Td}_1 + \dots + \mathrm{Td}_n)\right),\end{aligned}$$

где H — класс гиперплоскости, Td_i — коэффициенты класса Тодда проективного пространства $\mathbb{P}^n$, а $\deg$ — функция степени на старших когомологиях.

Пусть теперь X — проективное многообразие, а $\mathscr{L}$ — очень обильный пучок на X. Тогда существует естественное вложение $i\colon X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$, такое что $\mathscr{L} \cong i^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$. По формуле проекции

$$H^p(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^t) \cong H^p(\mathbb{P}^n, i_*(\mathscr{F} \otimes i^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(t))) \cong H^p(\mathbb{P}^n, i_*\mathscr{F}(t)),$$

поэтому при всех $t \gg 0$

$$\dim H^0(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^t) = \mathrm{P}_{i_*\mathscr{F}}(t)$$

является многочленом, который называется многочленом Гильберта пучка $\mathscr{F}$ относительно линейного расслоения $\mathscr{L}$. Он существенно зависит от выбора линейного расслоения.

Теорема 33.2. *Пусть $f\colon X \to S$ проективный морфизм на связную приведенную схему S, $\mathscr{L}$ — относительно очень обильное линейное расслоение на X, а $\mathscr{F}$ — когерентный пучок на X. Каждой точке $s \in S$ сопоставим многочлен Гильберта*

$$p_{\mathscr{F},s}(t) := \mathrm{P}_{\mathscr{F}|_{X_s}}(t),$$

где $X_s = f^{-1}(s)$ — слой схемы X над точкой s. Следующие условия эквивалентны:

(1) *многочлен $p_{\mathscr{F},s}(t) \in \mathbb{Q}[t]$ не зависит от точки s;*
(2) *для всякой точки $x \in X$ выполнено $\mathrm{Tor}_{>0}^{\mathscr{O}_{S,s}}(\mathscr{F}_{X,x}, -) = 0$, где $s = f(x)$.*

Доказывать эту теорему мы не будем (ее доказательство легко найти в любом учебнике). Для нас она, скорее, является мотивацией для следующего определения.

Определение 33.3. Пусть X — схема над S, а $\mathscr{F}$ — квазикогерентный пучок на X. Пучок $\mathscr{F}$ — плоский над S, если для всех точек $x \in X$ выполнено условие $\mathrm{Tor}_{>0}^{\mathscr{O}_{S,s}}(\mathscr{F}_{X,x}, -) = 0$, где $s = f(x)$. Аналогично, схема X — плоская над S, если ее структурный пучок $\mathscr{O}_X$ — плоский над S.

В общем случае, плоскость пучка и постоянность многочлена Гильберта не эквивалентны.

Пример 33.4. Пусть $X = (\mathbb{P}^1 \times S) \setminus \{x\}$, где x — замкнутая точка, а $\mathscr{F} = \mathscr{O}_X$. Тогда $\mathscr{F}$ плоский над S, хотя $p_{\mathscr{F},s}(t) = 1 + t$ при $s \neq f(x)$, но $p_{\mathscr{F},s}(t) = t$ при $s = f(x)$.

Пример 33.5. Пусть $X = S = S_1 \sqcup S_2$ — несвязное объединение двух компонент, $\mathscr{F} = \mathscr{O}_{S_1} \oplus \mathscr{O}_{S_2}^{\oplus 2}$. Тогда $\mathscr{F}$ плоский над S, хотя $p_{\mathscr{F},s}(t) = i$ при $s \in S_i$.

Если $\mathscr{F}$ не когерентен, то его многочлен Гильберта не вполне определен, поэтому и говорить о равносильности не приходится. Наконец, если S не приведена, то многочлен Гильберта пучка не содержит никакой информации о действии нильпотентов и не может контролировать плоскость.

Пример 33.6. Пусть $X = S = \mathrm{Spec}(\mathsf{k}[u]/u^2)$, $\mathscr{F} = \mathsf{k}[u]/u^2$ и $\mathscr{G} = \mathsf{k}$. Тогда для единственной точки $s \in S$ имеем $\mathscr{F}_s \cong \mathscr{G}_s \cong \mathsf{k}$, поэтому $p_{\mathscr{F},s} = p_{\mathscr{G},s} = 1$, но при этом пучок $\mathscr{F}$ плоский, а пучок $\mathscr{G}$ — нет.

Упражнение 55. *Покажите, что если $X = S$ и $\mathscr{F}$ — когерентен, то $\mathscr{F}$ плоский над S тогда и только тогда, когда $\mathscr{F}$ локально свободен.*

Упражнение 56. *Пусть $f\colon X \to S$ — проективный морфизм, а $\mathscr{F}$ — когерентный пучок на X, плоский над S. Тогда существует покрытие S непересекающимися открытыми подсхемами*

$$S = \bigsqcup_{p \in \mathbb{Q}[t]} S_p,$$

так что для всякой точки $s \in S_p$ выполнено $p_{\mathscr{F},s} = p$.

34. Функтор Hilb и функтор Quot

Пусть X — схема. Определим функтор **Hilb** формулой

$$\mathbf{Hilb}_X(S) = \{Z \subset X \times S \mid Z \text{ — замкнутая подсхема, плоская над } S\},$$

причем, если $f\colon S' \to S$ — морфизм, и $Z \in \mathbf{Hilb}_X(S)$, положим $\mathbf{Hilb}_X(f)(Z) := Z \times_S S'$. Легко видеть, что схема $Z \times_S S'$ плоская над S', поэтому определение корректно и задает контравариантный функтор их категории схем в категорию множеств.

Если схема X проективна (и на ней фиксировано очень обильное линейное расслоение, задающее ее вложение в проективное пространство), то также можно определить функтор

$$\mathbf{Hilb}_X^p(S) = \{Z \subset X \times S \mid Z \text{ — замкнутая подсхема, плоская над } S, \text{ причем } p_{\mathscr{O}_Z,s} = p \text{ для всех } s \in S\},$$

где p — произвольный многочлен с рациональными коэффициентами, принимающий целые значения в целых точках.

Следующая важная теорема, доказанная Гротендиком, является основой доказательства представимости разных алгебро-геометрических функторов.

Теорема 34.1. *Пусть X — проективная схема, и p — многочлен с рациональными коэффициентами, принимающий целые значения в целых точках. Тогда функтор $\mathbf{Hilb}_X^p$ представим проективной схемой Hilb_X^p.*

Следствие 34.2. *Если X — проективная схема, то функтор $\mathbf{Hilb}_X$ представим схемой*

$$\mathrm{Hilb}_X := \bigsqcup_{p \in \mathbb{Q}[t]} \mathrm{Hilb}_X^p,$$

где объединение берется по всем целозначным многочленам.

Доказательство. Пусть S — схема и $Z \in \mathbf{Hilb}_X(S)$, то есть $Z \subset X \times S$ — замкнутая подсхема плоская над S. В силу Упражнения 56 существует разбиение $S = \bigsqcup S_p$, такое что многчлен Гильберта подсхемы $Z \times_S S_p \subset X \times S_p$ равен p, то есть $Z \times_S S_p \in \mathbf{Hilb}^p_X(S_p)$. По теореме Гротендика существует единственное отображение $f_p \colon S_p \to \mathrm{Hilb}^p_X$, такое что $Z \times_S S_p$ индуцировано универсальной подсхемой. Положим

$$f_Z = \sqcup_p f_p \colon S = \bigsqcup_p S_p \to \bigsqcup_p \mathrm{Hilb}^p_X .$$

Сопоставление $Z \mapsto f_Z$ задает мофризм функторов $\mathbf{Hilb}_X \to h_{\sqcup_p \mathrm{Hilb}^p_X}$. Легко видеть, что этот морфизм является изоморфизмом. $\square$

На самом деле, мы только что проверили, что функтор $\mathbf{Hilb}_X$ является несвязным объединением функторов $\mathbf{Hilb}^p_X$ по всем целозначным многочленам $p(t)$ в следующем смысле. Несвязным объединением функторов $F_i \colon \mathrm{Sch}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Sets}$, $i \in I$ называется функтор

$$\left(\bigsqcup_{i\in I} F_i\right)(S) = \bigsqcup_{\varphi\colon S\to I} \left(\prod_{i\in I} F_i(\varphi^{-1}(i))\right),$$

где φ пробегает множество всех непрерывных отображений $S \to I$ (I рассматривается с дискретной топологией), а произведение берется по тем i, для которых $\varphi^{-1}(i)$ непусто.

Упражнение 57. *Покажите, что функтор $\bigsqcup F_i$ представим тогда и только тогда, когда каждый из функторов F_i представим, причем многообразие модулей функтора $\bigsqcup F_i$ — несвязное объединению многообразий модулей функторов F_i.*

Следующее важное обобщение функтора **Hilb** тоже довольно полезно. Пусть X — схема, а $\mathscr{E}$ — когерентный пучок на X. Обределим функтор **Quot** формулой

$$\mathbf{Quot}^{\mathscr{E}}_X(S) = \{(\mathscr{F}, \varphi) \mid \mathscr{F} \in \mathrm{coh}(X \times S),\ \mathscr{F} \text{ — плоский над } S, \text{ а } \varphi \colon \mathscr{E} \boxtimes \mathscr{O}_S \twoheadrightarrow \mathscr{F} \text{ — эпиморфизм}\}.$$

Лемма 34.3. *Имеется изоморфизм функторов $\mathbf{Hilb}_X \cong \mathbf{Quot}^{\mathscr{O}_X}_X$.*

Доказательство. Пусть дана $Z \in \mathrm{Hilb}_X(S)$ — плоская над S замкнутая подсхема в $X \times S$. Сопоставим ей пучок $\mathscr{O}_Z \in \mathrm{coh}(X \times S)$ вместе с естественной сюръекцией $\varphi_Z \colon \mathscr{O}_X \boxtimes \mathscr{O}_S = \mathscr{O}_{X\times S} \twoheadrightarrow \mathscr{O}_Z$. Очевидно, $(\mathscr{O}_Z, \varphi_Z) \in \mathbf{Quot}^{\mathscr{O}_X}_X(S)$. Аналогично, если $(\mathscr{F}, \varphi) \in \mathbf{Quot}^{\mathscr{O}_X}_X(S)$, то сюръекция $\varphi \colon \mathscr{O}_{X\times S} \twoheadrightarrow \mathscr{F}$ определяет подсхему $Z \subset X \times S$, такую что $\mathscr{O}_Z = \mathscr{F}$. Ясно, что $Z \in \mathbf{Hilb}_X(S)$. Более того, построенные соответствия очевидно биективны и функториальны. $\square$

Упражнение 58. *Покажите, что функтор $\mathbf{Quot}^{\mathscr{E}}_X$ является несвязным объединением $\bigsqcup \mathbf{Quot}^{\mathscr{E},p}_X$.*

Упражнение 59. *Покажите, что $\mathbf{Hilb}^p_X = \mathbf{Quot}^{\mathscr{O}_X,p}_X$.*

Теорема о представимости функтора **Hilb** является частным случаем более общей теоремы о представимости функтора **Quot**, также доказанной Гротендиком.

Теорема 34.4. *Пусть X — проективная схема, $\mathscr{E}$ — когерентный пучок на X, а p — многочлен с рациональными коэффициентами, принимающий целые значения в целых точках. Тогда функтор $\mathbf{Quot}^{\mathscr{E},p}_X$ представим проективной схемой $\mathrm{Quot}^{\mathscr{E},p}_X$.*

Упражнение 60. *Покажите, что*

(а) *функтор $\mathbf{Hilb}^1_X$ представляется схемой X;*
(б) *функтор $\mathbf{Hilb}^{1+m}_{\mathbb{P}^n}$ представляется схемой $\mathrm{Gr}(2, n+1)$;*
(в) *функтор $\mathbf{Quot}^{W,r}_{\mathrm{Spec}\,\mathsf{k}}$ представляется схемой $\mathrm{Gr}(r, W^*)$.*

Во всех случаях опишите универсальные семейства.

Лекция X. Примеры схем Гильберта

35. Схема Гильберта прямых

Вначале обсудим несколько примеров схемы

$$F_1(X) := \mathrm{Hilb}_X^{1+t},$$

параметризующей подсхемы проективной схемы X с многочленом Гильберта $p(t) = 1 + t$ (относительно выбранного очень обильного линейного расслоения). Начнем со случая $X = \mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$. Вначале опишем замкнутые точки схемы Гильберта.

Лемма 35.1. *Пусть поле* k *алгебраически замкнуто и* $Z \subset \mathbb{P}^n$ *— замкнутая подсхема с многочленом Гильберта* $\mathrm{P}_Z(t) = 1 + t$*. Тогда* Z *— прямая, соответствующая точке грассманиана* $\mathrm{Gr}(2, n+1)$.

Доказательство. Так как многочлен Гильберта имеет степень 1, все компоненты (включая вложенные) схемы Z не более чем одномерны. Пусть $Z' \subset Z$ — чисто одномерная часть (ее структурный пучок является фактором $\mathscr{O}_Z$ по подпучку, порожденному всеми сечениями $\mathscr{O}_Z$ с нульмерным носителем) с приведенной структурой. Заметим, что $\mathrm{P}_{Z'}(t) = t + a$ для некоторого $a \in \mathbb{Z}$. Покажем, что Z' является прямой.

Для каждой гиперплоскости $H \subset \mathbb{P}^n$ умножим комплекс Кошуля $0 \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n} \to \mathscr{O}_H \to 0$ на $\mathscr{O}_{Z'}$:

$$0 \to \mathrm{Tor}_1(\mathscr{O}_{Z'}, \mathscr{O}_H) \to \mathscr{O}_{Z'}(-1) \to \mathscr{O}_{Z'} \to \mathscr{O}_{H \cap Z'} \to 0.$$

Так как пучок $\mathscr{O}_{Z'}$ не имеет кручения, средняя стрелка любо нулевая, либо инъективная. В первом случае, $Z' \subset H$. Во втором случае $\mathrm{Tor}_1(\mathscr{O}_{Z'}, \mathscr{O}_H) = 0$, значит $Z' \cap H$ подсхема в H с многочленом Гильберта

$$\mathrm{P}_{Z'}(t) - \mathrm{P}_{Z'}(t-1) = 1,$$

то есть точка. Таким образом, мы проверили, что либо $Z' \subset H$, либо $Z' \cap H = \mathrm{Spec}(\mathsf{k})$. Если первый случай реализуется, мы можем заменить $\mathbb{P}^n$ на H и свести вопрос к проективному пространству меньшей размерности, поэтому можно считать, что всегда имеет место второй случай. Покажем тогда, что $n = 1$ и $Z' = \mathbb{P}^1$.

В самом деле, если $n > 1$, выбрем на Z' две точки (Z' не является точкой в силу ее многочлена Гильберта) и проведем через них гиперплоскость. Она не может содержать Z', но и пересекать ее по одной точке тоже не может. Полученное противоречие показывает, что $n = 1$. Но единственная одномерная подсхема в $\mathbb{P}^1$ равна $\mathbb{P}^1$, что завершает доказательство.

Осталось проверить, что $Z = Z'$. Заметим, что по определению Z' имеем точную тройку

$$0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{O}_Z \to \mathscr{O}_{Z'} \to 0.$$

При этом $\mathrm{P}_{Z'}(t) = \mathrm{P}_{\mathbb{P}^1}(t) = t + 1$ (так как $\dim H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(t)) = 1 + t$), значит

$$\mathrm{P}_{\mathscr{F}}(t) = \mathrm{P}_Z(t) - \tilde{P}_{Z'}(t) = 0.$$

Но пучок с нулевым многочленом Гильберта равен нулю (так как при $t \gg 0$ пучок $\mathscr{F}(t)$ порождается глобальными сечениями, а $H^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}(t)) = \mathrm{P}_{\mathscr{F}}(t) = 0$). Значит $\mathscr{F} = 0$ и $Z = Z'$. ☐

На самом деле, мы доказали даже чуть больше.

Следствие 35.2. *Пусть* $Z \subset \mathbb{P}^n$ *замкнутая подсхема с многочленом Гильберта* $\mathrm{P}_Z(t) = t + a$*. Тогда* $a \geq 1$ *и* Z *является объединением прямой с* $a - 1$ *(возможно вложенными) точками.*

Доказательство. Пусть $Z' \subset Z$ — приведенная одномерная часть. Из доказательства леммы видно, что Z' — прямая, значит $\mathrm{P}_{\mathscr{F}}(t) = a - 1$ (пучок $\mathscr{F}$ такой же как и в лемме). Значит $a - 1 \geq 0$ и $\mathscr{F}$ артинов пучок длины $a - 1$. Отсюда сразу следует необходимое утверждение. $\square$

Упражнение 61. *Пусть $\mathscr{F}$ — пучок на $\mathbb{P}^n$ без нульмерного кручения с многочленом Гильберта $\mathrm{P}_{\mathscr{F}}(t) = t + a$. Тогда $\mathscr{F} \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(a-1)$, где $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^n$ — прямая.*

Теперь мы готовы описать схему Гильберта.

Теорема 35.3. *Существует изоморфизм $\mathrm{Hilb}^{1+t}_{\mathbb{P}(V)} \cong \mathrm{Gr}(2, V)$, такой что универсальная подсхема совпадает с многообразием флагов $\mathrm{Fl}(1, 2; V) \subset \mathbb{P}(V) \times \mathrm{Gr}(2, V)$.*

Доказательство. Пусть $Z \subset \mathbb{P}(V) \times S$ подсхема плоская над S, такая что $\mathrm{P}_{Z_s}(t) = 1 + t$ для всех точек $s \in S$. Пусть $p\colon Z \to \mathbb{P}(V)$ и $q\colon Z \to S$ — проекции. Рассмотрим на S пучок

$$\mathscr{E} := q_*p^*(\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)).$$

По теореме о плоской замене базы, его слой в точке s изоморфен пространству $H^0(Z_s, \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)|_{Z_s})$. Но как мы доказали в лемме, $Z_s \cong \mathbb{P}^1$, причем $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)|_{Z_s} \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$, поэтому это пространство двумерно. Так как это выполнено для всех точек $s \in S$, пучок $\mathscr{E}$ является расслоением ранга 2 на S. Аналогичное рассуждение показывает, что $q_*p^*(\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}) \cong \mathscr{O}_S$.

Далее, рассмотрим естественный морфизм

$$V^* \otimes \mathscr{O}_S \cong q_*p^*(V^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}) \to q_*p^*(\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)) \cong \mathscr{E}.$$

В слое над точкой $s \in S$ он является отображеним $H^0(\mathbb{P}(V), V^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)) \to H^0(Z_s, \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)|_{Z_s})$ и так как $Z_s = \mathbb{P}^1$, легко проверить, что он сюръективен. Значит построенный выше морфизм пучков сюръективен. В силу универсального свойства грассманиана, поучаем морфизм $S \to \mathrm{Gr}(2, V)$. При этом легко видеть, что для всякого отображения $S' \to S$, морфизм, построенный по подсхеме $Z \times_S S' \subset \mathbb{P}(V) \times S'$ совпадает с композицией $S' \to S \to \mathrm{Gr}(2, V)$ (для этого надо еще раз воспользоваться теоремой о замене базы). Это означает, что мы построили морфизм функторов из $\mathbf{Hilb}^{1+t}_{\mathbb{P}(V)}$ в функтор, представленный грассманианом $\mathrm{Gr}(2, V)$. По лемме Ионеды он задает морфизм $\mathrm{Hilb}^{1+t}_{\mathbb{P}(V)} \to \mathrm{Gr}(2, V)$.

Обратный морфизм строится еще проще — многообразие флагов $\mathrm{Fl}(1, 2; V) \subset \mathbb{P}(V) \times \mathrm{Gr}(2, V)$ расслоено над $\mathrm{Gr}(2, V)$ со слоем $\mathbb{P}^1$, поэтому является плоским над $\mathrm{Gr}(2, V)$ с многочленом Гильберта $1 + t$. Значит оно задает морфизм $\mathrm{Gr}(2, V) \to \mathrm{Hilb}^{1+t}_{\mathbb{P}(V)}$.

Проверка того, что построенные морфизмы взаимно обратны достаточно проста. $\square$

Пусть теперь $X \subset \mathbb{P}(V)$ — замкнутая подсхема.

Предложение 35.4. *Если X — схема нулей сечений $f_1, \ldots, f_m$ пучков $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(d_1), \ldots, \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(d_m)$, то $\mathrm{Hilb}^{1+t}_X \subset \mathrm{Gr}(2, V)$ — схема нулей сечений $f_1, \ldots, f_m$ пучков $S^{d_1}\mathscr{U}^*, \ldots, S^{d_m}\mathscr{U}^*$, а универсальная подсхема получается из многообразия флагов заменой базы.*

Доказательство. Пусть $Z \subset X \times S \subset \mathbb{P}(V) \times S$ — замкнутая подсхема плоская над S с многочленом Гильберта $1+t$. Пусть $\varphi\colon S \to \mathrm{Gr}(2, V)$ индуцированное отображение. Как показано в доказательстве теоремы, $\varphi^*(\mathscr{U}^*) \cong q_*p^*(\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1))$, а обратный образ тавтологической сюръекции $V^* \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(2,V)} \to \mathscr{U}^*$ совпадает с морфизмом $q_*p^*(V^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}) \to q_*p^*(\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1))$. Следовательно, обратный образ симметрической степени тавтологической сюръекции $S^dV^* \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(2,V)} \to S^d\mathscr{U}^*$ совпадает с естественным морфизмом $q_*p^*(S^dV^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}) \to q_*p^*(\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(d))$. В силу диаграммы

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] & X \times S \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{P}(V) \times S \arrow[d] \\ & X \arrow[r] & \mathbb{P}(V) \end{tikzcd}$$

обратный образ (относительно проекции p) сечения $f_i \in H^0(\mathbb{P}(V), \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(d_i))$ на Z получается вначале ограничением на X, а затем обратным образом относительно проекции $p_X\colon Z \to X$, и значит равен нулю. Это значит, что сечение $f_i \in H^0(\mathrm{Gr}(2,V), S^{d_i}\mathscr{U}^*)$ при ограничении на S (относительно морфизма φ) обращается в нуль. Поскольку это верно для всех $1 \le i \le m$, значит образ $\varphi(S)$ лежит в схеме нулей $H \subset \mathrm{Gr}(2,V)$ сечения $(f_1,\dots,f_m)$.

Обратно, пусть $H \subset \mathrm{Gr}(2,V)$ схема нулей сечения $(f_1,\dots,f_m)$ расслоения $S^{d_1}\mathscr{U}^* \oplus \dots \oplus S^{d_m}\mathscr{U}^*$. Рассмотрим

$$Z := \mathrm{Fl}(1,2;V) \times_{\mathrm{Gr}(2,V)} H \cong \mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(2,V)}(\mathscr{U}) \times_{\mathrm{Gr}(2,V)} H \cong \mathbb{P}_H(\mathscr{U}|_H) \subset \mathbb{P}(V) \times H.$$

Проверим, что проекция $\mathbb{P}_H(\mathscr{U}|_H) \hookrightarrow \mathrm{Fl}(1,2;V) \to \mathbb{P}(V)$ пропускается через $X \subset \mathbb{P}(V)$. Для этого достаточно проверить, что обратный образ каждого из сечений $f_i \in H^0(\mathbb{P}(V), \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(d_i))$ на $\mathbb{P}_H(\mathscr{U}|_H)$ равен нулю. Для этого достаточно убедиться, что прямой образ этого сечения на H равен нулю. Из теоремы о замене базы и диаграммы

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}_H(\mathscr{U}_H) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Fl}(1,2;V) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"] & \mathbb{P}(V) \\ H \arrow[r] & \mathrm{Gr}(2,V) & \end{tikzcd}$$

следует, что этот прямой образ равен ограничению на H сечения $q_*p^*(f_i) \in H^0(\mathrm{Gr}(2,V), S^{d_i}\mathscr{U}^*)$. А оно равно нулю по определению схемы H. Значит схема Z действительно лежит в $X \times H$.

Поскольку она плоская над H (это видно, например, из формулы $Z \cong \mathbb{P}_H(\mathscr{U}|_H)$), она задает морфизм $H \to \mathrm{Hilb}^{1+t}_X$. Построенные морфизмы очевидно взаимно обратны. □

Следствие 35.5. *Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — полное пересечение степени $(d_1,\dots,d_m)$. Для общего такого X схема Гильберта Hilb^{1+t}_X — гладкое многообразие размерности $2(n-1) - m - \sum d_i$.*

Доказательство. Расслоение $S^{d_1}\mathscr{U}^* \oplus \dots \oplus S^{d_m}\mathscr{U}^*$ на $\mathrm{Gr}(2,V)$ глобально порождено пространством сечений $S^{d_1}V^* \oplus \dots \oplus S^{d_m}V^*$, поэтому сечение, определяющее Hilb^{1+t}_X в $\mathrm{Gr}(2,V)$ является общим сечением глобально порожденного расслоения на гладком многообразии $\mathrm{Gr}(2,V)$. Поэтому, в силу леммы доказанной на позапрошлой лекции, его схема нулей гладкая и имеет коразмерность равную рангу расслоения. Так как $\dim \mathrm{Gr}(2,V) = 2(n-1)$, а ранг $S^d\mathscr{U}^*$ равен $d+1$, получаем следствие. □

Эти соображения позволяют также вычислять канонический класс и другие инварианты схемы Гильберта Hilb^{1+t}_X. Вот парочка интересных примеров.

Пример 35.6. Пусть $X \subset \mathbb{P}^5$ — гиперповерхность степени 3. Тогда Hilb^{1+t}_X — четырехмерное гиперкэлерово многообразие.

Пример 35.7. Пусть $X \subset \mathbb{P}^5$ — полное пересечение двух квадрик. Тогда Hilb^{1+t}_X — двумерное абелево многообразие.

В этих двух случаях неявное условие общности достаточно поменять на явное условие гладкости многообразия X.

Упражнение 62. *Докажите, что схема Гильберта $\mathrm{Hilb}^{(1+t)\dots(m+t)/m!}_{\mathbb{P}(V)}$ изоморфна $\mathrm{Gr}(m+1,V)$.*

36. Схема Гильберта коник

Теперь рассмотрим схему Гильберта
$$F_2(X) := \mathrm{Hilb}_X^{1+2t}.$$
Начнем ее изучение опять со случая $X = \mathbb{P}^n$ и замкнутой точки схемы Гильберта.

Лемма 36.1. *Пусть поле* k *алгебраически замкнуто и* $Z \subset \mathbb{P}^n$ *— замкнутая подсхема с многочленом Гильберта* $\mathrm{P}_Z(t) = 1 + 2t$. *Тогда* Z *— коника.*

Доказательство. Так как многочлен Гильберта имеет степень 1, все компоненты (включая вложенные) схемы Z не более чем одномерны. Пусть $Z' \subset Z$ — неприводимая компонента одномерной части Z с приведенной структурой. Тогда $\mathrm{P}_{Z'}(t) = 2t + a$ или $\mathrm{P}_{Z'}(t) = t + a$.

В первом случае, рассуждение Леммы 35.1 показывает, что всякая гиперплоскость в $\mathbb{P}^n$ либо содержит Z', либо пересекает ее по схеме длины 2 и, следовательно, она содержится в плоскости $\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^n$ (проведите плоскость через три точки). Чисто одномерная подсхема в плоскости является гиперповерхностью. Если ее степень равна d, то ее многочлен Гильберта равен
$$\mathrm{P}_{\mathbb{P}^2}(t) - \mathrm{P}_{\mathbb{P}^2}(t-d) = \frac{(t+1)(t+2) - (t-d+1)(t-d+2)}{2} = dt - \frac{d(d-3)}{2}.$$
Значит $d = 2$, откуда $a = 1$. Следовательно, Z' является коникой, а пучок $\mathscr{F} = \mathrm{Ker}(\mathscr{O}_Z \to \mathscr{O}_{Z'})$ имеет нулевой многочлен Гильберта, и значит сам равен нулю, то есть Z тоже коника.

Пусть теперь $\mathrm{P}_{Z'}(t) = t + a$. Так как Z' чисто одномерная, в силу Следствия 35.2 имеем $a = 1$ и Z' — прямая. Если $\mathscr{F} = \mathrm{Ker}(\mathscr{O}_Z \to \mathscr{O}_{Z'})$, то $\mathrm{P}_{\mathscr{F}}(t) = t$, поэтому в силу Упражнения 61 существует сюръекция $\mathscr{F} \twoheadrightarrow \mathscr{O}_{Z''}(b)$ с артиновым ядром, где Z'' — еще одна прямая. При этом, так как $\mathscr{O}_Z$ — фактор $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}$, то $\mathscr{F}$ — фактор пучка идеалов $\mathscr{I}_{Z'}$. Но так как прямая является полным пересечением гиперплоскостей, то пучок $\mathscr{I}_{Z'}(1)$ глобально порожден. Следовательно, пучок $\mathscr{F}(1)$ тоже глобально порожжден, а значит и пучок $\mathscr{O}_{Z''}(b+1)$. Поэтому $b \geq -1$. Однако, если $\mathscr{G} = \mathrm{Ker}(\mathscr{F} \to \mathscr{O}_{Z''}(b))$, то
$$\mathrm{P}_{\mathscr{G}}(t) = \mathrm{P}_{\mathscr{O}_Z}(t) - \mathrm{P}_{\mathscr{O}_{Z'}} - \mathrm{P}_{\mathscr{O}_{Z''}(b)}(t) = (2t+1) - (t+1) - (t+b+1) = -b - 1 \leq 0.$$
Отсюда следует, что $\mathscr{G} = 0$ и $b = -1$.

Итак, мы убедились в том, что $\mathscr{O}_Z$ является расширением
$$0 \to \mathscr{O}_{Z''}(-1) \to \mathscr{O}_Z \to \mathscr{O}_{Z'} \to 0.$$
Отсюда следует, что $\dim H^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_Z(1)) = 3$, значит морфизм $H^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \to H^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_Z(1))$ имеет ранг не больше трех, а значит $Z \subset \mathbb{P}^2$. Отсюда также как и выше следует, что Z — коника. $\square$

Теорема 36.2. *Существует изоморфизм* $\mathrm{Hilb}_{\mathbb{P}(V)}^{1+2t} \cong \mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(3,V)}(S^2\mathscr{U}^*)$.

Доказательство. Ограничимся наброском. Пусть $Z \subset \mathbb{P}(V) \times S$ — плоская над S подсхема с многочленом Гильберта $1 + 2t$. Рассмотрим вначале пучок $\mathscr{E} := q_*p^*(\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1))$. Пользуясь леммой, можно проверить, что это расслоение ранга 3, а морфизм
$$V^* \otimes \mathscr{O}_S \cong q_*p^*(V^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}) \to q_*p^*(\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)) \cong \mathscr{E}$$
сюръективен. Он задает отображение $\varphi\colon S \to \mathrm{Gr}(3, V)$, причем так что
$$Z \subset \mathbb{P}_S(\varphi^*\mathscr{U}) \cong \mathrm{Fl}(1, 3; V) \times_{\mathrm{Gr}(3,V)} S.$$
Пусть $\mathscr{I}_Z$ — пучок идеалов Z внутри $\mathbb{P}_S(\varphi^*\mathscr{U})$. Если $r\colon \mathbb{P}_S(\varphi^*\mathscr{U}) \to S$ — проекция, то пользуясь описанием слоев Z, заключаем, что
$$\mathscr{L} := r_*(\mathscr{I}_Z \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}_S(\varphi^*\mathscr{U})/S}(2))$$

является линейным расслоением, а индуцированный вложением $\mathscr{I}_Z \hookrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}_S(\varphi^*\mathscr{U})}$ морфизм

$$\mathscr{L} = r_*(\mathscr{I}_Z \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}_S(\varphi^*\mathscr{U})/S}(2)) \to r_*(\mathscr{O}_{\mathbb{P}_S(\varphi^*\mathscr{U})/S}(2)) \cong \varphi^*(S^2\mathscr{U}^*)$$

является вложением расслоений. Он задает морфизм $S \to \mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(3,V)}(S^2\mathscr{U}^*)$. Так же как и в случае прямых проверяется его функториальность, а значит из тех же соображений получается отображение $\mathrm{Hilb}^{1+2t}_{\mathbb{P}(V)} \to \mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(3,V)}(S^2\mathscr{U}^*)$.

Для построения обратного отображения достаточно построить плоское семейство коник в произведении $\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(3,V)}(S^2\mathscr{U}^*)$, что тоже не сложно. $\square$

Можно также изучать схемы Гильберта коник на произвольных проективных многообразиях, но это заметно сложнее чем в случае с прямыми. Кроме того, можно рассматривать и схемы Гильберта более сложных подсхем. Как правило, они имеют несколько компонент, причем некоторые из компонент параметризуют весьма вырожденные подсхемы. Например, схема Гильберта $\mathrm{Hilb}^{1+3t}_{\mathbb{P}^3}$ имеет две компоненты. Первая параметризует рациональные скрученные кубики (и их вырождения), а вторая — объединение плоских кубических кривых с точкой.

37. Схемы Гильберта точек

Схема Hilb^m_X параметризует нульмерные подсхемы длины m в X. Заметим, что в отличие от предыдущих примеров, схема Гильберта Hilb^m_X не зависит от выбора очень обильного линейного расслоения на X.

Лемма 37.1. $\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}^1) \cong \mathbb{P}^m$.

Доказательство. Нульмерная подсхема $Z \subset \mathbb{P}^1$ является дивизором, поэтому $\mathscr{I}_Z \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-m)$. Пусть теперь $Z \subset \mathbb{P}^1 \times S$ плоская над S подсхема с полиномом Гильберта m. Тогда пучок

$$\mathscr{L} := q_*(\mathscr{I}_Z \otimes p^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(m))$$

является линейным расслоением, а морфизм

$$\mathscr{L} = q_*(\mathscr{I}_Z \otimes p^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(m)) \to q_*p^*(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(m)) \cong \mathsf{k}^{m+1} \otimes \mathscr{O}_S$$

является вложением расслоений, значит задает морфизм $S \to \mathbb{P}^m$. Дальше, аналогично приведенным выше рассуждениям. $\square$

Вообще, если C — гладкая кривая, то $\mathrm{Hilb}^m_C \cong S^m(C)$ — гладкое m-мерное многообразие. Причем при $m \geq 2g-1$ оно изоморфно расслоению над якобианом $J(C)$ со слоем $\mathbb{P}^{m-g}$ (при меньших m по-прежнему есть морфизм $\mathrm{Hilb}^m_X \to J(C)$, но его слои над разными точками якобиана имеют различную размерность).

Очень важной темой является изучение схем Гильберта Hilb^m_S точек на гладких поверхностях. Они тоже глакие многобразия размерности $2m$ и имеют на удивление богатую структуру. Например, если S — поверхность типа $K3$, то Hilb^m_S является гиперкэлеровым многообразием размерности $2m$, причем таким образом получается половина известных примеров деформационных классов гиперкэлеровых многобразий. Вторая половина, кстати, получается небольшой модификацией из схем Гильберта Hilb^m_S для абелевых поверхностей.

Схемы Гильберта $\mathrm{Hilb}^m(X)$ при больших m и $\dim(X) \geq 3$ особы (и даже приводимы). Однако при малых m они гладкие. При $m = 1$ очевидно $\mathrm{Hilb}^1_X \cong X$. При $m = 2$ тоже ответ несложно описать.

Попробуем вначале в качестве “наивного приближения” рассмотреть схему $X \times X$ (вне диагонали она как раз параметризует все подсхемы длины 2, но каждую два раза). Если бы она была схемой Гильберта, то универсальной подсхемой была бы схема

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \subset X \times (X \times X),$$

где Γ_i — график проекции произведения на i-ый сомножитель. Иначе говоря

$$\Gamma_1 = \{(x_1, x_1, x_2) \in X \times (X \times X)\}, \qquad \Gamma_2 = \{(x_2, x_1, x_2) \in X \times (X \times X)\}.$$

Заметим, что $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \Delta := \{(x, x, x) \in X \times (X \times X)\}$. Поэтому структурный пучок подсхемы $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ имеет резольвенту

$$0 \to \mathscr{O}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \to \mathscr{O}_{\Gamma_1} \oplus \mathscr{O}_{\Gamma_2} \to \mathscr{O}_{\Delta} \to 0$$

(аналогично структурному пучку приводимой коники). Проверим, что при $\dim(X) \geq 2$ он не плоский над $X \times X$. Для этого перепишем резольвенту в виде

$$0 \to \mathscr{I}_{\Delta, \Gamma_2} \to \mathscr{O}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \to \mathscr{O}_{\Gamma_1} \to 0$$

и заметим, что правый член плоский над $X \times X$ (поскольку подсхема Γ_1 изоморфно проектируется на $X \times X$, а структурный пучок локально свободен на ней), поэтому средний член плоский тогда и только тогда, когда левый член плоский. Но так как Γ_2 тоже изоморфно проектируется на $X \times X$, это равносильно плоскости пучка $\mathscr{I}_\Delta$ над $\mathscr{O}_{X \times X}$. Как мы обсуждали, когерентный пучок является плоским тогда и только тогда, когда он локально свободен, а пучок идеалов подсхемы локально свободен, только если эта подсхема — дивизор Картье. Остается заметить, что диагональ в $X \times X$ не является дивизором при $\dim(X) \geq 2$.

Мы видим, что главная проблема в том, что диагональ не является дивизором Картье. Но эту проблему легко решить раздутием!

Итак, заменим $X \times X$ на $\mathrm{Bl}_{\Delta(X)}(X \times X)$ и рассмотрим аналогичную подсхему

$$\tilde{\Gamma}_1 \cup \tilde{\Gamma}_2 \subset X \times \mathrm{Bl}_{\Delta(X)}(X \times X),$$

где $\tilde{\Gamma}_i$ — график композиции $\mathrm{Bl}_{\Delta(X)}(X \times X) \to X \times X \to X$, в которой второй морфизм — проекция на i-ый сомножитель. Резольвента ее структурного пучка выглядит как

$$0 \to \mathscr{I}_{\tilde{\Delta}, \tilde{\Gamma}_2} \to \mathscr{O}_{\tilde{\Gamma}_1 \cup \tilde{\Gamma}_2} \to \mathscr{O}_{\tilde{\Gamma}_1} \to 0,$$

где $\tilde{\Delta}$ — исключительный дивизор раздутия. Пучок $\mathscr{I}_{\tilde{\Delta}, \tilde{\Gamma}_2} \cong \mathscr{O}_{\tilde{\Gamma}_2}(-\tilde{\Delta})$ обратим на $\tilde{\Gamma}_2$, отсюда сразу следует требуемая плоскость. Получаем морфизм $\mathrm{Bl}_{\Delta(X)}(X \times X) \to \mathrm{Hilb}^2_X$. Он очевидно эквивариантен относительно действия группы $\mathfrak{S}_2$ на раздутии индуцированого ее действием на $X \times X$ перестановкой множителей, поэтому морфизм пропускается через фактор по этому действию

$$\mathrm{Bl}_{\Delta(X)}(X \times X)/\mathfrak{S}_2 \to \mathrm{Hilb}^2_X.$$

Можно проверить, что полученный морфизм является изоморфизмом. Тем самым доказано

Предложение 37.2. *Если X — гладкое многообразие, то* $\mathrm{Hilb}^2_X \cong \mathrm{Bl}_{\Delta(X)}(X \times X)/\mathfrak{S}_2$.

Замечание 37.3. Можно было бы поступить наоборот, вначале взять фактор $(X \times X)/\mathfrak{S}_2 =: S^2X$, а потом раздуть диагональ на нем. В результате тоже получилась бы схема Гильберта Hilb^2_X.

Упражнение 63. *Покажите, что* $\mathrm{Hilb}^2_{\mathbb{P}(V)} \cong \mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(2,V)}(S^2\mathscr{U})$.

Упражнение 64. *Покажите, что если $Q \subset \mathbb{P}(V)$ — гладкая квадрика, то* $\mathrm{Hilb}^2_Q \cong \mathbb{P}_{\mathrm{Hilb}^{1+t}_Q}(\mathrm{Gr}(2,V))$.