Детерминантали. Многообразия Веронезе и Сегре

1. Напоминание

Два основных базовых класса многообразий в алгебраической геометрии — это аффинные многообразия и проективные многообразия, то есть многообразия, которые можно вложить либо в аффинное либо в проективное пространство подходящей размерности. И те и другие можно описывать в терминах “координатной алгебры” — если X — аффинно, то

$$A_X = \Gamma(X, \mathscr{O}_X),$$

а если X — проективно, то

$$A_X^\bullet = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Gamma(X, \mathscr{O}_X(k)),$$

где $\mathscr{O}_X(1)$ — очень обильное линейное расслоение на X. Вся геометрия многообразия X в этих случаях может быть восстановлена по координатным алгебрам. В частности, по алгебре восстанавливается как само многообразие

$$X = \begin{cases} \operatorname{Spec} A_X, & \text{в аффинном случае,} \\ \operatorname{Proj} A_X^\bullet, & \text{в проективном случае,} \end{cases}$$

так и категории когерентных и квазикогерентных пучков на нем

$$\operatorname{coh} X = \begin{cases} \operatorname{qgr} A_X, & \text{в аффинном случае,} \\ \operatorname{mod} A_X^\bullet, & \text{в проективном случае,} \end{cases} \qquad \operatorname{Qcoh} X = \begin{cases} \operatorname{Mod} A_X, & \text{в аффинном случае,} \\ \operatorname{Qgr} A_X^\bullet, & \text{в проективном случае} \end{cases}$$

(маленькие буквы в обозначениях категорий указывают на конечную порожденность объектов, а эквивалентности задаются формулами $\mathscr{F} \mapsto \Gamma(X, \mathscr{F})$ и $\mathscr{F} \mapsto \oplus_{k=0}^{\infty} \Gamma(X, \mathscr{F}(k))$ соответственно).

Если многообразие X является подмногообразием в аффинном пространстве, $X \subset \mathbb{A}^n$, то

$$A_X \cong \mathsf{k}[x_1, \dots, x_n]/I_X,$$

где I_X — идеал в кольце функций на $\mathbb{A}^n$, состоящий из функций, обращающихся в ноль на X. Аналогично, если многообразие X является подмногообразием в проективном пространстве, $X \subset \mathbb{P}^n$, то

$$A_X^\bullet \cong \mathsf{k}[x_0, x_1, \dots, x_n]/I_X^\bullet,$$

где кольцо многочленов рассматривается как градуированое с естественной градуировкой (а идеал $I_X^\bullet$, состоящий из многочлено обращающихся в ноль на X, автоматически однороден). Образующие идеала I_X (он автоматически конечно порожден в силу нетеровости кольца многочленов) называются уравнениями, задающими многообразие.

Два стандартных типа задач, встречающихся в алгебраической геометрии — по вложению многообразия определить уравнения, его задающие, и наоборот, по данной системе уравнений понять, что за многообразие ими задается. Другой важный вопрос — как строить морфизмы между алгебраическим многообразиями.

2. Многообразие Веронезе

Пусть $X = \mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(U)$ и рассмотрим морфизм $\nu\colon X \to \mathbb{P}(S^dU)$, задаваемый естественной сюръекцией $S^dU^* \otimes \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X(d)$ (получающейся применением симметрической степени к тавтологической сюръекции $U^* \otimes \mathscr{O}_X = \Gamma(X, \mathscr{O}_X(1)) \otimes \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X(1)$).

Для большей наглядности выберем базис u_0, u_1 в U^* (однородные координаты на X) и рассмотрим мономиальный базис в S^dU^*: $x_0 = u_0^d$, $x_1 = u_0^{d-1}u_1$, …, $x_d = u_1^d$. По определению морфизм имеет вид

$$(u_0 : u_1) \mapsto (u_0^d : u_0^{d-1}u_1 : \dots : u_1^d).$$

Попробуем описать идеал I_X для данного вложения. Сразу видно, что $f_{ij}(x) = x_ix_j - x_{i+1}x_{j-1}$ лежит в I_X. В самом деле, подставляя, получаем $f_{ij}(u) = u_0^{d-i}u_1^i \cdot u_0^{d-j}u_1^j - u_0^{d-i-1}u_1^{i+1} \cdot u_0^{d-j+1}u_1^{j-1} = 0$. Покажем, что

$$I_X = (f_{ij})_{0 \le i \le j-2 \le d-2}.$$

В данном случае, это равенство легко установить *комбинаторно*. В самом деле, легко видеть, что пространство мономов вида $\langle x_0^p x_i x_d^{k-p-1} \rangle_{0 \le p \le k-1,\ 1 \le i \le d}$ проектируется изоморфно на компоненту степени k в факторкольце $\mathsf{k}[x]/(f_{ij})$. С другой стороны, при гомоморфизме $\mathsf{k}[x]/(f_{ij}) \to \mathsf{k}[u]$, моном $x_0^p x_i x_d^{k-p-1}$ переходит в $u_0^{pd} \cdot u_0^{d-i}u_1^i \cdot u_1^{d(k-p-1)} = u_0^{pd+d-i}u_1^{d(k-p-1)+i}$, а такие мономы составляют базис в компоненте степени dk в $\mathsf{k}[u]$. Следовательно, $\mathsf{k}[x]/(f_{ij})$ изоморфно d-му подкольцу Веронезе в $\mathsf{k}[u]$, и значит $I_X = (f_{ij})$.

Упражнение 1. *Покажите, что аналогичные уравнения задают $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(U)$ при аналогичном вложении (которое, кстати, называется d-*кратным вложением Веронезе*) в $\mathbb{P}(S^dU)$.*

Представим теперь, что мы всего вышесказанного не знаем, и нас интересует обратный вопрос — описать подмногообразие $X \subset \mathbb{P}^d$ заданное уравнениями $f_{ij}(x) = x_ix_j - x_{i+1}x_{j+1}$. Для этого оказывается очень полезной следующая переформулировка условия.

Пусть $V = S^dU$ и заметим, что условия, задающие $X \subset \mathbb{P}(V)$ — это условия на ранг тензора $v \in V = S^dV$. Для этого рассмотрим морфизм пучков

$$U^* \otimes S^{d-1}U^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)} \to S^dU^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)} = V^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$$

(над точкой $P \in \mathbb{P}(V)$ он задается формулами $u_i \otimes (u_0^p u_1^q) \mapsto u_0^{p+\delta_{0i}}u_1^{q+\delta_{1i}} = x_{q+\delta_{1i}} \mapsto x_{q+\delta_{1i}}(P)$). По сопряженности он дает морфизм пучков

$$\varphi\colon U^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)} \to S^{d-1}U \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$$

(задается формулами $u_i \mapsto \sum_{p+q=d-1} x_{q+\delta_{1i}}(P)e_0^pe_1^q$, где e_0, e_1 — двойственный базис в U). Иначе говоря, φ задается матрицей

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{d-2} & x_{d-1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{d-1} & x_d \end{pmatrix}^T,$$

а многочлены f_{ij} — не что иное, как ее миноры. Тем самым, множество нулей миноров — это множество точек, где ранг отображения φ равен 1, то есть множество тензоров ранга 1 в $\mathbb{P}(S^dU)$. Чтобы понять геометрию этого множества полезно воспользоватся следующим утверждением.

Лемма 2.1. *Пусть R — локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m} \subset R$ и полем вычетов $\mathsf{k} = R/\mathfrak{m}$. Пусть $\varphi\colon R^n \to R^m$ — гомоморфизм свободных R-модулей, такой что $\wedge^{r+1}\varphi = 0$ и ранг индуцированного морфизма $\bar\varphi\colon \mathsf{k}^n \to \mathsf{k}^m$ равен r. Тогда ядро, коядро и образ φ — свободные модули ранга $n-r$, r и $m-r$ соответственно.*

Доказательство. Так как ранг морфизма $\bar\varphi$ равен r, один из миноров порядка r его матрицы не равен нулю. Аналогичный минор матрицы φ тогда обратим (элемент локального кольца, не лежащий

в максимальном идеале всегда обратим!), а значит меняя базисы в R^n и R^m можно считать, что матрица φ имеет вид
$$\varphi = \left(\begin{smallmatrix} 1_r & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right).$$
Условие $\wedge^{r+1}\varphi = 0$ влечет $D = CB$ (равенство нулю окаймляющих миноров). Заметим, что
$$\begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ -C & 1_{m-r} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1_r & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1_r & -B \\ 0 & 1_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
значит заменами базисов в R^n и R^m матрица φ приводится к указанному виду. Отсюда лемма следует немедленно. □

Обозначим через L образ ограничения φ на X. Заметим, что по определению X ранг $\varphi_{|X}$ не превосходит 1. С другой стороны, он нигде не равен нулю, поэтому выполнены условия леммы. Значит L — локально свободный пучок ранга 1 (то есть линейное расслоение) на X, причем у нас есть сюръекция $U^* \otimes \mathscr{O}_X \to L$. Такая сюръекция автоматически дает морфизм $\pi\colon X \to \mathbb{P}(U)$, такой что $\pi^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}(U)}(1) = L$.

Чтобы проверить, что π и ν взаимно обратны надо убедиться в том, что $\operatorname{Im}\nu^*\varphi$ — это тавтологический морфизм $U^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(U)} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}(U)}(1)$. В самом деле, применяя ν^* к матрице φ получаем матрицу
$$\begin{pmatrix} u_0^d & u_0^{d-1}u_1 & \dots & u_0^2u_1^{d-2} & u_0u_1^{d-1} \\ u_0^{d-1}u_1 & u_0^{d-2}u_1^2 & \dots & u_0u_1^{d-1} & u_1^d \end{pmatrix}^T = \left(u_0^{d-1} \ u_0^{d-2}u_1 \ \dots \ u_0u_1^{d-2} \ u_1^{d-1} \right)^T \cdot \left(\begin{smallmatrix} u_0 \\ u_1 \end{smallmatrix}\right),$$
а значит морфизм $\nu^*\varphi$ раскладывается в композицию $U^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(U)} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}(U)}(1) \to S^{d-1}U \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(U)}(d)$, причем первый морфизм сюръективен, а второй инъективен. Отсюда следует, что $\pi \circ \nu = \mathrm{id}_{\mathbb{P}(U)}$.

Для доказательства того, что $\nu \circ \pi = \mathrm{id}_X$ достаточно проверить, что X и $\nu(\mathbb{P}(U))$ совпадают теоретико-множественно (что очевидно), и что касательное пространство к X в любой точке одномерно. В силу того, что группа $\mathrm{PGL}(U)$ транзитивно действет на точках $\mathbb{P}(U)$ (а значит и на точках X) достаточно вычислить касательное пространство в точке $\nu(1:0) = (1:0:\dots:0)$. А оно очевидно задается уравнениями $x_2 = \dots = x_d = 0$ (например, в аффинной карте $x_0 = 1$).

Упражнение 2. *Проверьте, что те же рассуждения проходят для пространства U любой размерности.*

3. Схема нулей и детерминантали

Пусть Y — схема, а E — векторное расслоение на Y (локально свободный пучок конечного ранга). Пусть $s \in \Gamma(Y, E)$ — глобальное сечение, а $Z_s \subset Y$ — множество точек, в которых s обращается в нуль (то есть таких точек y, что образ s в $E_{Y,y} = E \otimes \mathscr{O}_{Y,y}$ лежит в $E \otimes \mathfrak{m}_{Y,y}$). Покажем, что на множестве Z_s есть естественная структура замкнутой подсхемы.

В самом деле, рассмотрим морфизм пучков $E^* \to \mathscr{O}_Y$, задаваемый сечением s. Его образ I_s — подпучок в $\mathscr{O}_Y$, то есть пучок идеалов на Y. Заметим, что $\operatorname{supp}(\mathscr{O}_Y/I_s)$ — как раз Z_s. Действительно, это вопрос локальный, поэтому можно считать пучок E тривиальным, то есть $E \cong \mathscr{O}_Y^n$. Тогда $\Gamma(Y, E) = \Gamma(Y, \mathscr{O}_Y)^n$, таким образом сечение s — это набор $(f_1, \dots, f_n)$ функций на Y. Ясно, что $Z_s = \{f_1 = \dots = f_n = 0\}$. С другой стороны, $E^* \cong \mathscr{O}_Y^n$ и морфизм $s\colon E^* \to \mathscr{O}_Y$ задается формулой $(g_1, \dots, g_n) \mapsto f_1g_1 + \dots + f_ng_n$, поэтому его образ — это как раз идеал $(f_1, \dots, f_n)$, носитель фактора по которому совпадает с Z_s.

Таким образом $Z_s \subset Y$ имеет естественную структуру замкнутой подсхемы. Эта подсхема называется схемой нулей сечения s.

Аналогично, пусть вместо сечения расслоения задан морфизм $s\colon E \to F$ расслоений. Так как
$$\operatorname{Hom}(E, F) \cong \Gamma(Y, E^* \otimes F),$$

мы можем рассматривать его как сечение расслоения $E^* \otimes F$. Схема нулей этого сечения также называется схемой нулей мофризма.

Предложение 3.1. *Пусть E — векторное расслоение на Y, $s \in \Gamma(Y, E)$, а S — произвольная схема. Тогда*

$$\mathrm{Map}(S, Z_s) = \{f \in \mathrm{Map}(S, Y) \mid f^*s = 0\},$$

где f^*s рассматривается как сечение расслоения f^*E.

Доказательство. Обозначим через i вложение $Z_s \to Y$. Заметим, что $i^*s = 0$. В самом деле, утверждение локально, поэтому можно считать, что $Y = \operatorname{Spec} A$, $E = A^m$, а $s = (s_1, \dots, s_m)$, $s_i \in A$. Тогда утверждение означает, что образы s_i в факторкольце $A/(s_1, \dots, s_m)$ равны нулю, что тавтологично. Отсюда сразу следует, что если $g\colon S \to Z_s$, а $f = i \circ g$, то $f^*s = g^*i^*s = 0$, поэтому $g \mapsto i \circ g$ задает отображение слева направо.

Пусть теперь f — морфизм $S \to Y$, такой что $f^*s = 0$. Покажем, что f единственным образом пропускается через i. Это утверждение также локально и означает следующее: если $A \to B$ — гомоморфизм колец, такой что при естественном морфизме $A^m \to A^m \otimes_A B$ набор $(s_1, \dots, s_m)$ переходит в ноль, то морфизм пропускается через $A/(s_1, \dots, s_m)$, что очевидно. $\square$

Пример 3.2. Пусть $Y = \mathbb{P}^1$ с координатами $(x : y)$, $E = \mathscr{O}(1)$, $s = x$. Тогда Z_s — точка $(0 : 1)$ с приведенной структурой. В самом деле, на аффинной окрестности точки $(1 : 0)$ при стандартной тривиализации сечение s представляется функцией 1 и поэтому нулей не имеет, а на аффинной окрестности точки $(0 : 1)$ с координатой t — функцией t, а факторкольцо $\mathsf{k}[t]/t\mathsf{k}[t]$ целостно.

Пример 3.3. Пусть $Y = \mathbb{P}^1$ с координатами $(x : y)$, $E = \mathscr{O}(2)$, $s = x^2$. Тогда Z_s — точка $(0 : 1)$ с неприведенной структурой. В самом деле, так же как и выше проверяется, что $(0 : 1)$ — единственный ноль s, при этом на аффинной окрестности точки $(0 : 1)$ сечение s представляется функцией t^2, а факторкольцо $\mathsf{k}[t]/t^2\mathsf{k}[t]$ содержит нильпотенты.

Важно понимать следующее. Пусть $Y = \mathbb{P}^n$ и $E = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d)^m$. Тогда $\Gamma(\mathbb{P}^n, E) = \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d))^m$, поэтому сечение s представляется набором $(s_1, \dots, s_m)$ однородных многочленов степени d. Пусть $X = Z_s$. Тогда легко видеть, что $(s_1, \dots, s_m) \subset I_X$. В самом деле, по определению схемной структуры на локусе нулей имеем точную справа последовательность

$$\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-d)^m \xrightarrow{(s_1,\dots,s_m)} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow i_*\mathscr{O}_X$$

где $i\colon X \to \mathbb{P}^n$ — вложение. Подкручивая ее на d и переходя к глобальным сечениям, получаем комплекс

$$\mathsf{k}^m \xrightarrow{(s_1,\dots,s_m)} \mathsf{k}[x_0, \dots, x_n]_d \longrightarrow (A_X)_d$$

значит $s_i \in I_X$. Однако, **не верно**, что идеал I_X порождается многочленами $s_1, \dots, s_m$. Впрочем, на практике знание идеала I_X как правило не слишком важно, вполне достаточно знать образующие пучка идеалов X.

Пример 3.4. Пусть $Y = \mathbb{P}^1$ с координатами $(x : y)$, $E = \mathscr{O}(2)^2$, $s = (x^2, xy)$. Тогда Z_s — точка $(0 : 1)$ с неприведенной структурой, а $I_{Z_s} = x\mathsf{k}[x, y]$. В самом деле, так же как и выше проверяется, что $(0 : 1)$ — единственный ноль s, при этом на аффинной окрестности точки $(0 : 1)$ сечение s представляется функциями (t^2, t), а факторкольцо $k[t]/(t^2, t) = \mathsf{k}[t]/t\mathsf{k}[t]$, так что Z_s имеет приведенную структуру.

Другой способ убедится в этом такой. Заметим, что морфизм $s\colon \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)^2 \xrightarrow{(x^2,xy)} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}$ представляется в виде композиции $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)^2 \xrightarrow{(x,y)} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \xrightarrow{x} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}$, в которой первый морфизм сюръективен. Поэтому его образ равен образу второго морфизма.

Следующий частный случай схемы нулей очень важен и будет часто использоваться.

Внешней степенью свободного модуля над коммутативным кольцом называется подмодуль в его тензорной степени, состоящий из антиинвариантных тензоров. Ясно, что если $f\colon V \to W$ — линейное отображение, то отображение $f^{\otimes n}\colon V^{\otimes n} \to W^{\otimes n}$ коммутирует с действием симметрической группы, и поэтому переводит антиинвариантные тензоры в антиинвариантные тензоры, то есть индуцирует отображение $\wedge^n f\colon \bigwedge^n V \to \bigwedge^n W$. При этом ясно, что матрица отображения $\wedge^n f$ состоит из миноров матрицы f.

Если $s\colon E \to F$ — морфизм векторных расслоений, то схема нулей его $(r+1)$-ой внешней степени $\wedge^{r+1}s\colon \bigwedge^{r+1}E \to \bigwedge^{r+1}F$ называется r-ой детерминанталью мофризма s и обозначается $D_r(s)$. Например, подмногообразие Веронезе является детерминанталью $D_1(\varphi)$.

Следствие 3.5. *Пусть $s\colon E \to F$ — морфизм векторных расслоений на Y, а S — любая схема. Тогда*

$$\operatorname{Map}(S, D_k(s)) = \{f \in \operatorname{Map}(S, Y) \mid \wedge^{k+1} f^*s = 0\}.$$

4. Многообразие Сегре

Рассмотрим множество X тензоров ранга 1 в $\mathbb{P}(U \otimes W)$. Покажем, что оно изоморфно произведению $\mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(W)$. Вначале построим морфизм $X \to \mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(W)$. Для этого заметим, что тавтологический морфизм $U^* \otimes W^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(U\otimes W)} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}(U\otimes W)}(1)$ дает морфизм

$$\varphi\colon U^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(U\otimes W)} \to W \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(U\otimes W)}(1).$$

Введем на X схемную структуру как $X = D_1(\varphi)$. Ясно, что на X ранг φ постоянен и равен единице, поэтому $L = \operatorname{Im}\varphi_{|X}$ — линейное расслоение. При этом имеем сюръекцию $U^* \otimes \mathscr{O}_X \to L$ и вложение $L \to W \otimes \mathscr{O}_X(1)$, которое после дуализации и подкрутки дает сюръекцию $W^* \otimes \mathscr{O}_X \to L^* \otimes \mathscr{O}_X(1)$. Получаем морфизмы $p\colon X \to \mathbb{P}(U)$, $q\colon X \to \mathbb{P}(W)$, такие что

$$p^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}(U)}(1) = L \qquad \text{и} \qquad q^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(1) = L^* \otimes \mathscr{O}_X(1).$$

Произведение морфизмов p и q дает морфизм $p \times q\colon X \to \mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(W)$.

Теперь построим морфизм в обратную сторону. Для этого заметим поднимем тавтологические морфизмы $U^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(U)} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}(U)}(1)$ и $W^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(1)$ на произведение и тензорно перемножим. Получим сюръекцию

$$(U \otimes W)^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(U)\times\mathbb{P}(W)} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}(U)\times\mathbb{P}(W)}(1,1) := p^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}(U)}(1) \otimes q^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(1),$$

которая задает морфизм $s\colon \mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(U \otimes W)$, который называется морфизмом Сегре. При этом ясно, что морфизм $s^*\varphi$ раскладывается в композицию

$$U^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(U)\times\mathbb{P}(W)} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}(U)\times\mathbb{P}(W)}(1,0) \to W \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(U)\times\mathbb{P}(W)}(1,1)$$

(где первый морфизм — это поднятие тавтологического морфизма на $\mathbb{P}(U)$, а второй — это подкрученное на $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(U)\times\mathbb{P}(W)}(0,1)$ поднятие тавтологического морфизма на $\mathbb{P}(W)$). Поэтому $p \circ s$ и $q \circ s$ — это проекции $\mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(W)$ на сомножители, а $(p \times q) \circ s = \mathrm{id}$.

Для доказательства того, что $s \circ (p \times q) = \mathrm{id}_X$ достаточно проверить, что X и $s(\mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(W))$ совпадают теоретико-множественно (что очевидно), и что касательное пространство к X в любой точке имеет размерность $\dim(\mathbb{P}(U)) + \dim(\mathbb{P}(W))$. В силу того, что группа $\mathrm{PGL}(U) \times \mathrm{PGL}(W)$ транзитивно действет на точках $\mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(W)$ (а значит и на точках X) достаточно вычислить касательное пространство в точке $s((1:0:\cdots:0),(1:0:\cdots:0)) = (1:0:\cdots:0)$. А оно очевидно задается уравнениями $x_{ij} = 0$ для $i, j \geq 1$ (например, в аффинной карте $x_{00} = 1$).