Примеры схем Гильберта

1. Схема Гильберта прямых

Вначале обсудим несколько примеров схемы

$$F_1(X) := \mathrm{Hilb}_X^{1+t},$$

параметризующей подсхемы проективной схемы X с многочленом Гильберта $p(t) = 1 + t$ (относительно выбранного очень обильного линейного расслоения). Начнем со случая $X = \mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$. Вначале опишем замкнутые точки схемы Гильберта.

Лемма 1.1. *Пусть поле* k *алгебраически замкнуто и* $Z \subset \mathbb{P}^n$ *— замкнутая подсхема с многочленом Гильберта* $\mathrm{P}_Z(t) = 1 + t$. *Тогда* Z *— прямая, соответствующая точке грассманиана* $\mathrm{Gr}(2, n + 1)$.

Доказательство. Так как многочлен Гильберта имеет степень 1, все компоненты (включая вложенные) схемы Z не более чем одномерны. Пусть $Z' \subset Z$ — чисто одномерная часть (ее структурный пучок является фактором $\mathscr{O}_Z$ по подпучку, порожденному всеми сечениями $\mathscr{O}_Z$ с нульмерным носителем) с приведенной структурой. Заметим, что $\mathrm{P}_{Z'}(t) = t + a$ для некоторого $a \in \mathbb{Z}$. Покажем, что Z' является прямой.

Для каждой гиперплоскости $H \subset \mathbb{P}^n$ умножим комплекс Кошуля $0 \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n} \to \mathscr{O}_H \to 0$ на $\mathscr{O}_{Z'}$:

$$0 \to \mathrm{Tor}_1(\mathscr{O}_{Z'}, \mathscr{O}_H) \to \mathscr{O}_{Z'}(-1) \to \mathscr{O}_{Z'} \to \mathscr{O}_{H\cap Z'} \to 0.$$

Так как пучок $\mathscr{O}_{Z'}$ не имеет кручения, средняя стрелка любо нулевая, либо инъективная. В первом случае, $Z' \subset H$. Во втором случае $\mathrm{Tor}_1(\mathscr{O}_{Z'}, \mathscr{O}_H) = 0$, значит $Z' \cap H$ подсхема в H с многочленом Гильберта

$$\mathrm{P}_{Z'}(t) - \mathrm{P}_{Z'}(t - 1) = 1,$$

то есть точка. Таким образом, мы проверили, что либо $Z' \subset H$, либо $Z' \cap H = \mathrm{Spec}(\mathsf{k})$. Если первый случай реализуется, мы можем заменить $\mathbb{P}^n$ на H и свести вопрос к проективному пространству меньшей размерности, поэтому можно считать, что всегда имеет место второй случай. Покажем тогда, что $n = 1$ и $Z' = \mathbb{P}^1$.

В самом деле, если $n > 1$, выбрем на Z' две точки (Z' не является точкой в силу ее многочлена Гильберта) и проведем через них гиперплоскость. Она не может содержать Z', но и пересекать ее по одной точке тоже не может. Полученное противоречие показывает, что $n = 1$. Но единственная одномерная подсхема в $\mathbb{P}^1$ равна $\mathbb{P}^1$, что завершает доказательство.

Осталось проверить, что $Z = Z'$. Заметим, что по определению Z' имеем точную тройку

$$0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{O}_Z \to \mathscr{O}_{Z'} \to 0.$$

При этом $\mathrm{P}_{Z'}(t) = \mathrm{P}_{\mathbb{P}^1}(t) = t + 1$ (так как $\dim H^0(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(t)) = 1 + t$), значит

$$\mathrm{P}_{\mathscr{F}}(t) = \mathrm{P}_Z(t) - \tilde{P}_{Z'}(t) = 0.$$

Но пучок с нулевым многочленом Гильберта равен нулю (так как при $t \gg 0$ пучок $\mathscr{F}(t)$ порождается глобальными сечениями, а $H^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}(t)) = \mathrm{P}_{\mathscr{F}}(t) = 0$). Значит $\mathscr{F} = 0$ и $Z = Z'$. □

На самом деле, мы доказали даже чуть больше.

Следствие 1.2. *Пусть* $Z \subset \mathbb{P}^n$ *замкнутая подсхема с многочленом Гильберта* $\mathrm{P}_Z(t) = t + a$. *Тогда* $a \geq 1$ *и* Z *является объединением прямой с* $a - 1$ *(возможно вложенными) точками.*

Доказательство. Пусть $Z' \subset Z$ — приведенная одномерная часть. Из доказательства леммы видно, что Z' — прямая, значит $\mathrm{P}_{\mathscr{F}}(t) = a-1$ (пучок $\mathscr{F}$ такой же как и в лемме). Значит $a-1 \geq 0$ и $\mathscr{F}$ артинов пучок длины $a-1$. Отсюда сразу следует необходимое утверждение. $\square$

Упражнение 1. *Пусть $\mathscr{F}$ — пучок на $\mathbb{P}^n$ без нульмерного кручения с многочленом Гильберта $\mathrm{P}_{\mathscr{F}}(t) = t + a$. Тогда $\mathscr{F} \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(a-1)$, где $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^n$ — прямая.*

Теперь мы готовы описать схему Гильберта.

Теорема 1.3. *Существует изоморфизм $\mathrm{Hilb}^{1+t}_{\mathbb{P}(V)} \cong \mathrm{Gr}(2,V)$, такой что универсальная подсхема совпадает с многообразием флагов $\mathrm{Fl}(1,2;V) \subset \mathbb{P}(V) \times \mathrm{Gr}(2,V)$.*

Доказательство. Пусть $Z \subset \mathbb{P}(V) \times S$ подсхема плоская над S, такая что $\mathrm{P}_{Z_s}(t) = 1+t$ для всех точек $s \in S$. Пусть $p\colon Z \to \mathbb{P}(V)$ и $q\colon Z \to S$ — проекции. Рассмотрим на S пучок

$$\mathscr{E} := q_*p^*(\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)).$$

По теореме о плоской замене базы, его слой в точке s изоморфен пространству $H^0(Z_s, \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)|_{Z_s})$. Но как мы доказали в лемме, $Z_s \cong \mathbb{P}^1$, причем $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)|_{Z_s} \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$, поэтому это пространство двумерно. Так как это выполнено для всех точек $s \in S$, пучок $\mathscr{E}$ является расслоением ранга 2 на S. Аналогичное рассуждение показывает, что $q_*p^*(\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}) \cong \mathscr{O}_S$.

Далее, рассмотрим естественный морфизм

$$V^* \otimes \mathscr{O}_S \cong q_*p^*(V^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}) \to q_*p^*(\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)) \cong \mathscr{E}.$$

В слое над точкой $s \in S$ он является отображением $H^0(\mathbb{P}(V), V^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)) \to H^0(Z_s, \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)|_{Z_s})$ и так как $Z_s = \mathbb{P}^1$, легко проверить, что он сюръективен. Значит построенный выше морфизм пучков сюръективен. В силу универсального свойства грассманиана, поучаем морфизм $S \to \mathrm{Gr}(2,V)$. При этом легко видеть, что для всякого отображения $S' \to S$, морфизм, построенный по подсхеме $Z \times_S S' \subset \mathbb{P}(V) \times S'$ совпадает с композицией $S' \to S \to \mathrm{Gr}(2,V)$ (для этого надо еще раз воспользоваться теоремой о замене базы). Это означает, что мы построили морфизм функторов из $\mathbf{Hilb}^{1+t}_{\mathbb{P}(V)}$ в функтор, представленный грассманианом $\mathrm{Gr}(2,V)$. По лемме Ионеды он задает морфизм $\mathrm{Hilb}^{1+t}_{\mathbb{P}(V)} \to \mathrm{Gr}(2,V)$.

Обратный морфизм строится еще проще — многообразие флагов $\mathrm{Fl}(1,2;V) \subset \mathbb{P}(V) \times \mathrm{Gr}(2,V)$ расслоено над $\mathrm{Gr}(2,V)$ со слоем $\mathbb{P}^1$, поэтому является плоским над $\mathrm{Gr}(2,V)$ с многочленом Гильберта $1+t$. Значит оно задает морфизм $\mathrm{Gr}(2,V) \to \mathrm{Hilb}^{1+t}_{\mathbb{P}(V)}$.

Проверка того, что построенные морфизмы взаимно обратны достаточно проста. $\square$

Пусть теперь $X \subset \mathbb{P}(V)$ — замкнутая подсхема.

Предложение 1.4. *Если X — схема нулей сечений $f_1, \dots, f_m$ пучков $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(d_1)$, …, $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(d_m)$, то $\mathrm{Hilb}^{1+t}_X \subset \mathrm{Gr}(2,V)$ — схема нулей сечений $f_1, \dots, f_m$ пучков $S^{d_1}\mathscr{U}^*$, …, $S^{d_m}\mathscr{U}^*$, а универсальная подсхема получается из многообразия флагов заменой базы.*

Доказательство. Пусть $Z \subset X \times S \subset \mathbb{P}(V) \times S$ — замкнутая подсхема плоская над S с многочленом Гильберта $1+t$. Пусть $\varphi\colon S \to \mathrm{Gr}(2,V)$ индуцированное отображение. Как показано в доказательстве теоремы, $\varphi^*(\mathscr{U}^*) \cong q_*p^*(\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1))$, а обратный образ тавтологической сюръекции $V^* \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(2,V)} \to \mathscr{U}^*$ совпадает с морфизмом $q_*p^*(V^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}) \to q_*p^*(\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1))$. Следовательно, обратный образ симметрической степени тавтологической сюръекции $S^dV^* \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(2,V)} \to S^d\mathscr{U}^*$ совпадает с естественным морфизмом $q_*p^*(S^dV^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}) \to q_*p^*(\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(d))$. В силу диаграммы

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] & X \times S \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{P}(V) \times S \arrow[d] \\ & X \arrow[r] & \mathbb{P}(V) \end{tikzcd}$$

обратный образ (относительно проекции p) сечения $f_i \in H^0(\mathbb{P}(V), \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(d_i))$ на Z получается вначале ограничением на X, а затем обратным образом относительно проекции $p_X \colon Z \to X$, и значит равен нулю. Это значит, что сечение $f_i \in H^0(\mathrm{Gr}(2,V), S^{d_i}\mathscr{U}^*)$ при ограничении на S (относительно морфизма φ) обращается в нуль. Поскольку это верно для всех $1 \le i \le m$, значит образ $\varphi(S)$ лежит в схеме нулей $H \subset \mathrm{Gr}(2,V)$ сечения $(f_1,\dots,f_m)$.

Обратно, пусть $H \subset \mathrm{Gr}(2,V)$ схема нулей сечения $(f_1,\dots,f_m)$ расслоения $S^{d_1}\mathscr{U}^* \oplus \dots \oplus S^{d_m}\mathscr{U}^*$. Рассмотрим

$$Z := \mathrm{Fl}(1,2;V) \times_{\mathrm{Gr}(2,V)} H \cong \mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(2,V)}(\mathscr{U}) \times_{\mathrm{Gr}(2,V)} H \cong \mathbb{P}_H(\mathscr{U}|_H) \subset \mathbb{P}(V) \times H.$$

Проверим, что проекция $\mathbb{P}_H(\mathscr{U}|_H) \hookrightarrow \mathrm{Fl}(1,2;V) \to \mathbb{P}(V)$ пропускается через $X \subset \mathbb{P}(V)$. Для этого достаточно проверить, что обратный образ каждого из сечений $f_i \in H^0(\mathbb{P}(V), \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(d_i))$ на $\mathbb{P}_H(\mathscr{U}|_H)$ равен нулю. Для этого достаточно убедиться, что прямой образ этого сечения на H равен нулю. Из теоремы о замене базы и диаграммы

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}_H(\mathscr{U}_H) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Fl}(1,2;V) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"] & \mathbb{P}(V) \\ H \arrow[r] & \mathrm{Gr}(2,V) & \end{tikzcd}$$

следует, что этот прямой образ равен ограничению на H сечения $q_*p^*(f_i) \in H^0(\mathrm{Gr}(2,V), S^{d_i}\mathscr{U}^*)$. А оно равно нулю по определению схемы H. Значит схема Z действительно лежит в $X \times H$.

Поскольку она плоская над H (это видно, например, из формулы $Z \cong \mathbb{P}_H(\mathscr{U}|_H)$), она задает морфизм $H \to \mathrm{Hilb}_X^{1+t}$. Построенные морфизмы очевидно взаимно обратны. □

Следствие 1.5. *Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — полное пересечение степени $(d_1,\dots,d_m)$. Для общего такого X схема Гильберта Hilb_X^{1+t} — гладкое многообразие размерности $2(n-1) - m - \sum d_i$.*

Доказательство. Расслоение $S^{d_1}\mathscr{U}^* \oplus \dots \oplus S^{d_m}\mathscr{U}^*$ на $\mathrm{Gr}(2,V)$ глобально порождено пространством сечений $S^{d_1}V^* \oplus \dots \oplus S^{d_m}V^*$, поэтому сечение, определяющее Hilb_X^{1+t} в $\mathrm{Gr}(2,V)$ является общим сечением глобально порожденного расслоения на гладком многообразии $\mathrm{Gr}(2,V)$. Поэтому, в силу леммы доказанной на позапрошлой лекции, его схема нулей гладкая и имеет коразмерность равную рангу расслоения. Так как $\dim \mathrm{Gr}(2,V) = 2(n-1)$, а ранг $S^d\mathscr{U}^*$ равен $d+1$, получаем следствие. □

Эти соображения позволяют также вычислять канонический класс и другие инварианты схемы Гильберта Hilb_X^{1+t}. Вот парочка интересных примеров.

Пример 1.6. Пусть $X \subset \mathbb{P}^5$ — гиперповерхность степени 3. Тогда Hilb_X^{1+t} — четырехмерное гиперкэлерово многообразие.

Пример 1.7. Пусть $X \subset \mathbb{P}^5$ — полное пересечение двух квадрик. Тогда Hilb_X^{1+t} — двумерное абелево многообразие.

В этих двух случаях неявное условие общности достаточно поменять на явное условие гладкости многообразия X.

Упражнение 2. *Докажите, что схема Гильберта $\mathrm{Hilb}_{\mathbb{P}(V)}^{(1+t)\dots(m+t)/m!}$ изоморфна $\mathrm{Gr}(m+1,V)$.*

2. Схема Гильберта коник

Теперь рассмотрим схему Гильберта

$$F_2(X) := \mathrm{Hilb}_X^{1+2t}.$$

Начнем ее изучение опять со случая $X = \mathbb{P}^n$ и замкнутой точки схемы Гильберта.

Лемма 2.1. *Пусть поле* k *алгебраически замкнуто и* $Z \subset \mathbb{P}^n$ *— замкнутая подсхема с многочленом Гильберта* $\mathrm{P}_Z(t) = 1 + 2t$*. Тогда* Z *— коника.*

Доказательство. Так как многочлен Гильберта имеет степень 1, все компоненты (включая вложенные) схемы Z не более чем одномерны. Пусть $Z' \subset Z$ — неприводимая компонента одномерной части Z с приведенной структурой. Тогда $\mathrm{P}_{Z'}(t) = 2t + a$ или $\mathrm{P}_{Z'}(t) = t + a$.

В первом случае, рассуждение Леммы 1.1 показывает, что всякая гиперплоскость в $\mathbb{P}^n$ либо содержит Z', либо пересекает ее по схеме длины 2 и, следовательно, она содержится в плоскости $\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^n$ (проведите плоскость через три точки). Чисто одномерная подсхема в плоскости является гиперповерхностью. Если ее степень равна d, то ее многочлен Гильберта равен

$$\mathrm{P}_{\mathbb{P}^2}(t) - \mathrm{P}_{\mathbb{P}^2}(t-d) = \frac{(t+1)(t+2) - (t-d+1)(t-d+2)}{2} = dt - \frac{d(d-3)}{2}.$$

Значит $d = 2$, откуда $a = 1$. Следовательно, Z' является коникой, а пучок $\mathscr{F} = \mathrm{Ker}(\mathscr{O}_Z \to \mathscr{O}_{Z'})$ имеет нулевой многочлен Гильберта, и значит сам равен нулю, то есть Z тоже коника.

Пусть теперь $\mathrm{P}_{Z'}(t) = t + a$. Так как Z' чисто одномерная, в силу Следствия 1.2 имеем $a = 1$ и Z' — прямая. Если $\mathscr{F} = \mathrm{Ker}(\mathscr{O}_Z \to \mathscr{O}_{Z'})$, то $\mathrm{P}_{\mathscr{F}}(t) = t$, поэтому в силу Упражнения 1 существует сюръекция $\mathscr{F} \twoheadrightarrow \mathscr{O}_{Z''}(b)$ с артиновым ядром, где Z'' — еще одна прямая. При этом, так как $\mathscr{O}_Z$ — фактор $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}$, то $\mathscr{F}$ — фактор пучка идеалов $\mathscr{I}_{Z'}$. Но так как прямая является полным пересечением гиперплоскостей, то пучок $\mathscr{I}_{Z'}(1)$ глобально порожден. Следовательно, пучок $\mathscr{F}(1)$ тоже глобально порожжден, а значит и пучок $\mathscr{O}_{Z''}(b+1)$. Поэтому $b \ge -1$. Однако, если $\mathscr{G} = \mathrm{Ker}(\mathscr{F} \to \mathscr{O}_{Z''}(b))$, то

$$\mathrm{P}_{\mathscr{G}}(t) = \mathrm{P}_{\mathscr{O}_Z}(t) - \mathrm{P}_{\mathscr{O}_{Z'}} - \mathrm{P}_{\mathscr{O}_{Z''}(b)}(t) = (2t+1) - (t+1) - (t+b+1) = -b - 1 \le 0.$$

Отсюда следует, что $\mathscr{G} = 0$ и $b = -1$.

Итак, мы убедились в том, что $\mathscr{O}_Z$ является расширением

$$0 \to \mathscr{O}_{Z''}(-1) \to \mathscr{O}_Z \to \mathscr{O}_{Z'} \to 0.$$

Отсюда следует, что $\dim H^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_Z(1)) = 3$, значит морфизм $H^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \to H^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_Z(1))$ имеет ранг не больше трех, а значит $Z \subset \mathbb{P}^2$. Отсюда также как и выше следует, что Z — коника. $\square$

Теорема 2.2. *Существует изоморфизм* $\mathrm{Hilb}^{1+2t}_{\mathbb{P}(V)} \cong \mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(3,V)}(S^2\mathscr{U}^*)$.

Доказательство. Ограничимся наброском. Пусть $Z \subset \mathbb{P}(V) \times S$ — плоская над S подсхема с многочленом Гильберта $1 + 2t$. Рассмотрим вначале пучок $\mathscr{E} := q_*p^*(\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1))$. Пользуясь леммой, можно проверить, что это расслоение ранга 3, а морфизм

$$V^* \otimes \mathscr{O}_S \cong q_*p^*(V^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}) \to q_*p^*(\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)) \cong \mathscr{E}$$

сюръективен. Он задает отображение $\varphi\colon S \to \mathrm{Gr}(3, V)$, причем так что

$$Z \subset \mathbb{P}_S(\varphi^*\mathscr{U}) \cong \mathrm{Fl}(1, 3; V) \times_{\mathrm{Gr}(3,V)} S.$$

Пусть $\mathscr{I}_Z$ — пучок идеалов Z внутри $\mathbb{P}_S(\varphi^*\mathscr{U})$. Если $r\colon \mathbb{P}_S(\varphi^*\mathscr{U}) \to S$ — проекция, то пользуясь описанием слоев Z, заключаем, что

$$\mathscr{L} := r_*(\mathscr{I}_Z \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}_S(\varphi^*\mathscr{U})/S}(2))$$

является линейным расслоением, а индуцированный вложением $\mathscr{I}_Z \hookrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}_S(\varphi^*\mathscr{U})}$ морфизм

$$\mathscr{L} = r_*(\mathscr{I}_Z \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}_S(\varphi^*\mathscr{U})/S}(2)) \to r_*(\mathscr{O}_{\mathbb{P}_S(\varphi^*\mathscr{U})/S}(2)) \cong \varphi^*(S^2\mathscr{U}^*)$$

является вложением расслоений. Он задает морфизм $S \to \mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(3,V)}(S^2\mathscr{U}^*)$. Так же как и в случае прямых проверяется его функториальность, а значит из тех же соображений получается отображение $\mathrm{Hilb}^{1+2t}_{\mathbb{P}(V)} \to \mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(3,V)}(S^2\mathscr{U}^*)$.

Для построения обратного отображения достаточно построить плоское семейство коник в произведении $\mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(3,V)}(S^2\mathscr{U}^*)$, что тоже не сложно. $\square$

Можно также изучать схемы Гильберта коник на произвольных проективных многообразиях, но это заметно сложнее чем в случае с прямыми. Кроме того, можно рассматривать и схемы Гильберта более сложных подсхем. Как правило, они имеют несколько компонент, причем некоторые из компонент параметризуют весьма вырожденные подсхемы. Например, схема Гильберта $\mathrm{Hilb}^{1+3t}_{\mathbb{P}^3}$ имеет две компоненты. Первая параметризует рациональные скрученные кубики (и их вырождения), а вторая — объединение плоских кубических кривых с точкой.

3. Схемы Гильберта точек

Схема Hilb^m_X параметризует нульмерные подсхемы длины m в X. Заметим, что в отличие от предыдущих примеров, схема Гильберта Hilb^m_X не зависит от выбора очень обильного линейного расслоения на X.

Лемма 3.1. *$\mathrm{Hilb}^m(\mathbb{P}^1) \cong \mathbb{P}^m$.*

Доказательство. Нульмерная подсхема $Z \subset \mathbb{P}^1$ является дивизором, поэтому $\mathscr{I}_Z \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-m)$. Пусть теперь $Z \subset \mathbb{P}^1 \times S$ плоская над S подсхема с полиномом Гильберта m. Тогда пучок

$$\mathscr{L} := q_*(\mathscr{I}_Z \otimes p^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(m))$$

является линейным расслоением, а морфизм

$$\mathscr{L} = q_*(\mathscr{I}_Z \otimes p^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(m)) \to q_*p^*(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(m)) \cong \mathsf{k}^{m+1} \otimes \mathscr{O}_S$$

является вложением расслоений, значит задает морфизм $S \to \mathbb{P}^m$. Дальше, аналогично приведенным выше рассуждениям. $\square$

Вообще, если C — гладкая кривая, то $\mathrm{Hilb}^m_C \cong S^m(C)$ — гладкое m-мерное многообразие. Причем при $m \geq 2g-1$ оно изоморфно расслоению над якобианом $J(C)$ со слоем $\mathbb{P}^{m-g}$ (при меньших m по-прежнему есть морфизм $\mathrm{Hilb}^m_X \to J(C)$, но его слои над разными точками якобиана имеют различную размерность).

Очень важной темой является изучение схем Гильберта Hilb^m_S точек на гладких поверхностях. Они тоже глакие многобразия размерности $2m$ и имеют на удивление богатую структуру. Например, если S — поверхность типа $K3$, то Hilb^m_S является гиперкэлеровым многообразием размерности $2m$, причем таким образом получается половина известных примеров деформационных классов гиперкэлеровых многобразий. Вторая половина, кстати, получается небольшой модификацией из схем Гильберта Hilb^m_S для абелевых поверхностей.

Схемы Гильберта $\mathrm{Hilb}^m(X)$ при больших m и $\dim(X) \geq 3$ особы (и даже приводимы). Однако при малых m они гладкие. При $m = 1$ очевидно $\mathrm{Hilb}^1_X \cong X$. При $m = 2$ тоже ответ несложно описать.

Попробуем вначале в качестве “наивного приближения” рассмотреть схему $X \times X$ (вне диагонали она как раз параметризует все подсхемы длины 2, но каждую два раза). Если бы она была схемой Гильберта, то универсальной подсхемой была бы схема

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \subset X \times (X \times X),$$

где Γ_i — график проекции произведения на i-ый сомножитель. Иначе говоря

$$\Gamma_1 = \{(x_1, x_1, x_2) \in X \times (X \times X)\}, \qquad \Gamma_2 = \{(x_2, x_1, x_2) \in X \times (X \times X)\}.$$

Заметим, что $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \Delta := \{(x, x, x) \in X \times (X \times X)\}$. Поэтому структурный пучок подсхемы $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ имеет резольвенту

$$0 \to \mathscr{O}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \to \mathscr{O}_{\Gamma_1} \oplus \mathscr{O}_{\Gamma_2} \to \mathscr{O}_\Delta \to 0$$

(аналогично структурному пучку приводимой коники). Проверим, что при $\dim(X) \geq 2$ он не плоский над $X \times X$. Для этого перепишем резольвенту в виде

$$0 \to \mathscr{I}_{\Delta, \Gamma_2} \to \mathscr{O}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \to \mathscr{O}_{\Gamma_1} \to 0$$

и заметим, что правый член плоский над $X \times X$ (поскольку подсхема Γ_1 изоморфно проектируется на $X \times X$, а структурный пучок локально свободен на ней), поэтому средний член плоский тогда и только тогда, когда левый член плоский. Но так как Γ_2 тоже изоморфно проектируется на $X \times X$, это равносильно плоскости пучка $\mathscr{I}_\Delta$ над $\mathscr{O}_{X \times X}$. Как мы обсуждали, когерентный пучок является плоским тогда и только тогда, когда он локально свободен, а пучок идеалов подсхемы локально свободен, только если эта подсхема — дивизор Картье. Остается заметить, что диагональ в $X \times X$ не является дивизором при $\dim(X) \geq 2$.

Мы видим, что главная проблема в том, что диагональ не является дивизором Картье. Но эту проблему легко решить раздутием!

Итак, заменим $X \times X$ на $\mathrm{Bl}_{\Delta(X)}(X \times X)$ и рассмотрим аналогичную подсхему

$$\tilde{\Gamma}_1 \cup \tilde{\Gamma}_2 \subset X \times \mathrm{Bl}_{\Delta(X)}(X \times X),$$

где $\tilde{\Gamma}_i$ — график композиции $\mathrm{Bl}_{\Delta(X)}(X \times X) \to X \times X \to X$, в которой второй морфизм — проекция на i-ый сомножитель. Резольвента ее структурного пучка выглядит как

$$0 \to \mathscr{I}_{\tilde{\Delta}, \tilde{\Gamma}_2} \to \mathscr{O}_{\tilde{\Gamma}_1 \cup \tilde{\Gamma}_2} \to \mathscr{O}_{\tilde{\Gamma}_1} \to 0,$$

где $\tilde{\Delta}$ — исключительный дивизор раздутия. Пучок $\mathscr{I}_{\tilde{\Delta}, \tilde{\Gamma}_2} \cong \mathscr{O}_{\tilde{\Gamma}_2}(-\tilde{\Delta})$ обратим на $\tilde{\Gamma}_2$, отсюда сразу следует требуемая плоскость. Получаем морфизм $\mathrm{Bl}_{\Delta(X)}(X \times X) \to \mathrm{Hilb}^2_X$. Он очевидно эквивариантен относительно действия группы $\mathfrak{S}_2$ на раздутии индуцированого ее действием на $X \times X$ перестановкой множителей, поэтому морфизм пропускается через фактор по этому действию

$$\mathrm{Bl}_{\Delta(X)}(X \times X)/\mathfrak{S}_2 \to \mathrm{Hilb}^2_X.$$

Можно проверить, что полученный морфизм является изоморфизмом. Тем самым доказано

Предложение 3.2. *Если X — гладкое многообразие, то* $\mathrm{Hilb}^2_X \cong \mathrm{Bl}_{\Delta(X)}(X \times X)/\mathfrak{S}_2$.

Замечание 3.3. Можно было бы поступить наоборот, вначале взять фактор $(X \times X)/\mathfrak{S}_2 =: S^2X$, а потом раздуть диагональ на нем. В результате тоже получилась бы схема Гильберта Hilb^2_X.

Упражнение 3. *Покажите, что* $\mathrm{Hilb}^2_{\mathbb{P}(V)} \cong \mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(2,V)}(S^2\mathscr{U})$.

Упражнение 4. *Покажите, что если $Q \subset \mathbb{P}(V)$ — гладкая квадрика, то* $\mathrm{Hilb}^2_Q \cong \mathbb{P}_{\mathrm{Hilb}^{1+t}_Q}(\mathrm{Gr}(2,V))$.