Дифференциалы

1. Кэлеровы дифференциалы

Определение 1.1. Дифференцированием кольца A со значениями в A-модуле M называется гомоморфизм абелевых групп $D\colon A \to M$, удовлетворяющий правилу Лейбница

$$D(ab) = aD(b) + bD(a).$$

Если A — алгебра над кольцом R, то дифференцирование называется R-линейным, если $D(r) = 0$ для всех $r \in R$. Множество всех R-линейных дифференцирований $A \to M$ обозначается $\mathrm{Diff}(A/R, M)$.

Заметим, что всякое дифференцирование $\mathbb{Z}$-линейно, так как $D(1) = D(1\cdot 1) = D(1)+D(1)$, откуда $D(1) = 0$.

Пример 1.2. Всякое k-линейное дифференцирование кольца многочленов $D \in \mathrm{Diff}(\mathsf{k}[x]/\mathsf{k}, M)$ задается формулой $D(f) = df/dx\cdot m_0$, где $m_0 \in M$. В самом деле, пусть $m_0 = D(x)$. Тогда $D(x^2) = 2xD(x)$ и по индукции $D(x^n) = nx^{n-1}D(x)$, откуда в силу линейности вытекает приведенная формула.

Ясно, что если $f\colon M \to N$ — гомоморфизм A-модулей, а $D\colon A \to M$ — дифференцирование, то $f \circ D\colon A \to N$ — тоже дифференцирование. В самом деле

$$f(D(ab)) = f(aD(b) + bD(a)) = af(D(b)) + b(fD(a)).$$

В частности, если в качестве f взять умножение на элемент кольца (здесь важна коммутативность кольца!), получится что $\mathrm{Diff}(A/R, M)$ — A-модуль. Аналогично, если $g\colon B \to A$ — гомоморфизм R-алгебр, то $D \circ g\colon B \to M$ — дифференцирование кольца B.

Теорема 1.3. *Пусть A — коммутативная алгебра над R. Существует A-модуль $\Omega_{A/R}$ и дифференцирование $d : A \to \Omega_{A/R}$, обладающее следующим универсальным свойством — сопоставление $(f\colon \Omega_{A/R} \to M) \mapsto (f \circ d\colon A \to M)$ задает изоморфизм A-модулей*

$$\mathrm{Hom}(\Omega_{A/R}, M) \cong \mathrm{Diff}(A/R, M).$$

Доказательство. Умножение задает эпиморфизм колец $A \otimes_R A \to A$. Обозначим через I идеал, являющийся его ядром. Заметим сразу, что I является A-бимодулем и как левый A-модуль порождается элементами вида $1 \otimes a - a \otimes 1$. В самом деле, пусть $\sum a_i \otimes b_i \in I$ (то есть $\sum a_i b_i = 0$). Тогда

$$\sum a_i \otimes b_i = \sum a_i(1 \otimes b_i - b_i \otimes 1).$$

Отсюда сразу следует, что идеал I^2 порождается как левый A-модуль элементами

$$(1 \otimes a - a \otimes 1)(1 \otimes b - b \otimes 1) = (1 \otimes ab - a \otimes b - b \otimes a + ab \otimes 1).$$

Положим $\Omega_{A/R} := I/I^2$, а в качестве отображения d рассмотрим $d(a) = 1 \otimes a - a \otimes 1$. Во-первых, проверим, что d — дифференцирование. В самом деле

$$\begin{aligned} d(ab) - ad(b) - bd(a) &= 1 \otimes ab - ab \otimes 1 - a(1 \otimes b - b \otimes 1) - b(1 \otimes a - a \otimes 1) = \\ &= 1 \otimes ab - ab \otimes 1 - a \otimes b + ab \otimes 1 - b \otimes a + ab \otimes 1 = (1 \otimes a - a \otimes 1)(1 \otimes b - b \otimes 1) \equiv 0 \pmod{I^2}. \end{aligned}$$

Кроме того, d — R-линейно, так как $1 \otimes r - r \otimes 1 = 0$ в $A \otimes_R A$. Осталось проверить биективность соответствия.

Пусть $D\colon A \to M$ — дифференцирование. Рассмотрим отображение $F^D\colon A \otimes_R A \to M$, задаваемое формулой $a \otimes b \mapsto aD(b)$. Оно очевидно является гомоморфизмом, причем $F^D(I^2) = 0$. В самом деле,

$$F^D((1 \otimes a - a \otimes 1)(1 \otimes b - b \otimes 1)) = F^D(1 \otimes ab - a \otimes b - b \otimes a + ab \otimes 1) = D(ab) - aD(b) - bD(a) = 0.$$

Значит F^D индуцирует морфизм $f^D : I/I^2 \to M$. При этом

$$f^D(d(a)) = F^D(1 \otimes a - a \otimes 1) = D(a) - aD(1) = D(a).$$

Обратно, если $f\colon I/I^2 \to M$ — морфизм, а $D(a) = f(d(a))$, то

$$F^D(1 \otimes a - a \otimes 1) = D(a) = f(d(a)) = f(1 \otimes a - a \otimes 1),$$

то есть $F^D = f$. □

2. Вычисление

Вычислим модуль дифференциалов для кольца многочленов.

Лемма 2.1. *Пусть R — произвольное кольцо. Тогда $\Omega_{R[x_1,\ldots,x_n]/R} \cong R[x_1, \ldots, x_n]^{\oplus n}$.*

Доказательство. Пусть $A = R[x_1, \ldots, x_n]$, тогда $A \otimes_R A = R[x'_1, \ldots, x'_n, x''_1, \ldots, x''_n]$, а морфизм умножения переводит x'_i и x''_i в x_i. Легко видеть, что идеал I порожден элементами $x'_i - x''_i$, а идеал I^2 — элементами $(x'_i - x''_i)(x'_j - x''_j)$. Рассмотрим гомоморфизм $F^D : I/I^2 \to A^n$, соответствующий дифференцированию

$$D\colon A \to A^n, \qquad f(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n)$$

(он переводит образующую $x'_i - x''_i = d(x_i)$ в $e_i := (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, где 1 стоит на i-ом месте). Обратно, рассмотрим морфизм $g\colon A^n \to I/I^2$, переводящий e_i в $x'_i - x''_i$. Очевидно, что они взаимно обратны. □

Замечание 2.2. Более инвариантная форма записи данного изоморфизма такова. Пусть V — свободный R-модуль, а $A = S^\bullet_R V^*$ — его симметрическая алгебра. Тогда $\Omega_{A/R} \cong V^* \otimes_R A$, причем универсальное дифференцирование $d\colon S^\bullet_R V^* \to V^* \otimes_R S^\bullet_R V^*$ — поляризация многочлена.

Лемма 2.3. *Если $S \subset A$ — мультипликативная система, то $\Omega_{S^{-1}A/A} = 0$.*

Доказательство. Пусть $D\colon S^{-1}A \to M$ — дифференцирование, такое что $D(A) = 0$. Тогда

$$0 = D(1) = D(s^{-1}s) = s^{-1}D(s) + sD(s^{-1}) = sD(s^{-1}),$$

значит $D(s^{-1}) = 0$ для всех $s \in S$, следовательно $D \equiv 0$. □

Лемма 2.4. *Пусть A и R' — алгебры над R. Тогда $\Omega_{A \otimes_R R'/R'} = \Omega_{A/R} \otimes_R R'$.*

Доказательство. По определению достаточно проверить, что $\mathrm{Diff}(A \otimes_R R'/R', M) \cong \mathrm{Diff}(A/R, M)$ (так как $\mathrm{Hom}_{A \otimes_R R'}(\Omega_{A/R} \otimes_R R', M) \cong \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/R}, M)$). Пусть $D\colon A \to M$ — дифференцирование. Положим тогда $D'(a \otimes r') = r'D(a)$. Ясно, что это R'-линейное дифференцирование кольца $A \otimes_R R'$. Обратно, если $D'\colon A \otimes_R R' \to M$ — дифференцирование, а $i\colon A \to A \otimes_R R'$ — естественный гомоморфизм, то $D' \circ i\colon A \to M$ — R-линейное дифференцирование, причем построенные соответствия взаимно обратны. □

Основной способ вычисления дифференциалов — следующая точная последовательность.

Предложение 2.5. *Пусть $B = A/J$. Тогда точна последовательность B-модулей*

$$J/J^2 \to \Omega_{A/R} \otimes_A B \to \Omega_{B/R} \to 0, \tag{1}$$

где левый морфизм индуцирован композицией $J \to A \xrightarrow{d} \Omega_{A/R} \to \Omega_{A/R} \otimes_A B$, а правый — дифференцированием $A \to B \xrightarrow{d} \Omega_{B/R}$.

Доказательство. Рассмотрим B-модуль M и применим к последовательности функтор $\mathrm{Hom}(-, M)$:

$$0 \to \mathrm{Diff}(B/R, M) \to \mathrm{Diff}(A/R, M) \to \mathrm{Hom}(J/J^2, M)$$

(мы воспользовались тем, что $\mathrm{Hom}_B(\Omega_{A/R} \otimes_A B, M) \cong \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/R}, M)$). Нам достаточно проверить ее точность для любого M.

Заметим, что первый морфизм задается формулой $D \mapsto D \circ \pi$, где $\pi\colon A \to B$ — проекция, и в силу сюръективности π является вложением. Второй морфизм задается формулой $D \mapsto D \circ j$, где $j\colon J \to A$ — вложение (заметим, что если $a_1, a_2 \in J$, то $D(j(a_1a_2)) = D(a_1a_2) = a_1D(a_2) + a_2D(a_1) = 0$, так как M, будучи B-модулем, аннулируется идеалом J, значит $D \circ j$ пропускается через J^2; то же рассуждение с $a_1 \in A$, $a_2 \in J$ показывает, что $D \circ j$ — гомоморфизм B-модулей). Пусть теперь $D \circ j = 0$. Значит D индуцирует гомоморфизм абелевых групп $D'\colon B \to M$, такой что $D = D' \circ \pi$. Остается заметить, что D' — дифференцирование. □

Пример 2.6. Пусть $f_1, \dots, f_m \in A = \mathsf{k}[x_1, \dots, x_n]$ и $B = A/(f_1, \dots, f_m)$. Найдем $\Omega_{B/\mathsf{k}}$. Воспользуемся точной последовательностью (1) и леммой 2.1. Средний член имеет вид B^n, а сюръекции $A^m \xrightarrow{f_1,\dots,f_m} J \to J/J^2$ показывают, что образ левого морфизма порожден df_1, df_2, …, df_m. Иначе говоря, получаем точную последовательность

$$B^m \xrightarrow{(\partial f_i/\partial x_j)} B^n \longrightarrow \Omega_{B/R} \longrightarrow 0.$$

Есть еще одна важная последовательность — связанная с заменой скаляров.

Предложение 2.7. *Пусть $A \to B \to C$ — гомоморфизмы колец. Тогда существует точная последовательность C-модулей*

$$\Omega_{B/A} \otimes_B C \to \Omega_{C/A} \to \Omega_{C/B} \to 0 \tag{2}$$

в которой первый морфизм индуцирован дифференцированием $B \to C \xrightarrow{d} \Omega_{C/A}$, а второй — дифференцированием $C \xrightarrow{d} \Omega_{C/B}$.

Доказательство. Достаточно проверить точность последуовательности

$$0 \to \mathrm{Diff}(C/B, M) \to \mathrm{Diff}(C/A, M) \to \mathrm{Diff}(B/A, M),$$

где M — произвольный C-модуль. Первый морфизм — очевидное вложение (дифференцирования над B также являются дифференцированиями над A), а второй задается формулой $D \mapsto D \circ f$, где $f : B \to C$. Но если $D \circ f = 0$, то дифференцирование D аннулирует B, а значит является дифференцированием над B. □

Следствие 2.8. *Пусть B_1, B_2 — A-алгебры, а $C = B_1 \otimes_A B_2$. Тогда*

$$\Omega_{C/A} = \Omega_{B_1/A} \otimes_A B_2 \oplus B_1 \otimes_A \Omega_{B_2/A}.$$

Доказательство. Имеем точные последовательности

$$\Omega_{B_1/A} \otimes_{B_1} C \to \Omega_{C/A} \to \Omega_{C/B_1} \to 0, \qquad \Omega_{B_2/A} \otimes_{B_2} C \to \Omega_{C/A} \to \Omega_{C/B_2} \to 0$$

и изоморфизмы $\Omega_{C/B_1} = \Omega_{B_2/A} \otimes_A B_1 = \Omega_{B_2/A} \otimes_{B_2} C$ и аналогично для Ω_{C/B_2}. Остается проверить, что композиция морфизмов $\Omega_{B_2/A} \otimes_{B_2} C \to \Omega_{C/A} \to \Omega_{C/B_1}$ — изоморфизм, что очевидно. □

Упражнение 1. *Пусть K/k — расширение полей. Покажите, что*
(a) если $K = \mathsf{k}(x_1, \dots, x_n)$, то $\Omega_{K/\mathsf{k}} = K^n$;
(b) если K/k — сепарабельное расширение, то $\Omega_{K/\mathsf{k}} = 0$.
(c) А если K/k — несепарабельное?

Следствие 2.9. *Если A — локализация конечнопорожденной R-алгебры, то $\Omega_{A/R}$ конечно порожден.*

Доказательство. По условию $A = S^{-1}B$, где $B = R[x_1, \dots, x_n]/J$. Из (1) следует, что $\Omega_{B/R}$ — фактормодуль свободного модуля конечного ранга, то есть конечно порожден. Далее, рассмотрим цепочку $R \to B \to A$. Из (2) получаем точную последовательность $\Omega_{B/R} \otimes A \to \Omega_{A/R} \to \Omega_{A/B}$. В ней $\Omega_{A/B} = 0$, значит $\Omega_{A/R}$ — фактормодуль конечнопорожденного модуля $\Omega_{B/R} \otimes_B A$, и значит сам конечно порожден. $\square$

3. Пучок дифференциалов

Пусть теперь X — схема над R. Определим пучок дифференциалов на X. Для этого для каждого аффинного подмножества $\operatorname{Spec} A = U \subset X$ рассмотрим пучок на U, соответствующий модулю $\Omega_{A/R}$, а для каждого вложения $\operatorname{Spec} B = V \subset U$ (соответствующего гомоморфизму $A \to B$) морфизм $\Omega_{A/R} \to \Omega_{B/R}$, построенный по дифференцированию $A \to B \xrightarrow{d} \Omega_{B/R}$.

Лемма 3.1. *Существует единственный квазикогерентный пучок $\Omega_{X/R}$ на X, такой что для аффинных $\operatorname{Spec} A = U \subset X$ выполнено $\Omega_{X/R}(U) = \Omega_{A/R}$, а морфизмы ограничения для аффинных вложений такие же как и выше.*

Доказательство. Прямолинейный способ состоит в том, что на каждой из аффинных карт рассмотреть квазикогерентный пучок, соответствующий модулю дифференциалов, и склеить из них квазикогерентный пучок на всем X (иначе говоря, для каждой схемной точки $x \in X$ рассмотреть модуль $\Omega_{\mathscr{O}_{X,x}/R}$ и каждому $U \subset X$ сопоставить множество всех $\{s_x \in \Omega_{\mathscr{O}_{X,x}/R}\}_{x \in U}$, которые локально происходят из элементов модуля дифференциалов). Но мы применим другйо способ.

Предположим вначале, что X отделима (то есть диагональное вложение $\Delta\colon X \to X \times X$ является замкнутым вложением). Пусть $\mathscr{I} \subset \mathscr{O}_{X \times X}$ — пучок идеалов диагонали. Рассмотрим пучок $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$. Заметим, что он анулируется умножением на $\mathscr{I}$, следовательно является пучком $\mathscr{O}_{X \times X}/\mathscr{I}$-модулей, то есть его можно рассматривать как пучок на диагонали. Определим пучок $\Omega_{X/R}$ равенством

$$\mathscr{I}/\mathscr{I}^2 = \Delta_* \Omega_{X/R}.$$

Проверим, что построенный пучок локально устроен как модуль дифференциалов. В самом деле, если $U = \operatorname{Spec} A \subset X$, то $U \times U \subset X \times X$ и диагональное вложение соответствует морфизму умножения $A \otimes A \to A$, поэтому пучок $\mathscr{I}$ соответствует идеалу I из теоремы 1.3. Значит пучок $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ соответствует модулю $I/I^2 = \Omega_{A/R}$, что и требовалось.

Если же схема X не является отделимой, то диагональ не замкнута, но зато локально замкнута, то есть замкнута в некотором открытом подмножестве $V \subset X \times X$. Поэтому можно проделать все те же рассуждения, что и раньше, заменив $X \times X$ на V. $\square$

Упражнение 2. *Покажите, что локальные дифференцирования $d : A \to \Omega_{A/R}$ склеиваются в глобальный морфизм пучков $d : \mathscr{O}_X \to \Omega_{X/R}$. Заметьте, что он* **не является морфизмом пучков $\mathscr{O}_X$-модулей!**

Лемма 3.2. $\Omega_{X/R} = \Delta^*(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2) = \Delta^*\mathscr{I}$.

Доказательство. Первое равенство следует из приведенной ниже Леммы 3.3. Второе получается так. Примененяя функтор Δ^* к точной последовательности $0 \to \mathscr{I}^2 \to \mathscr{I} \to \mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \to 0$, получаем

$$\Delta^*(\mathscr{I}^2) \to \Delta^*\mathscr{I} \to \Delta^*(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2) \to 0.$$

Остается заметить, что первый морфизм соответствует морфизму $I^2 \otimes_A (A/I) \to I \otimes_A (A/I)$, который очевидно равен нулю. Значит второй морфизм — изоморфизм. □

Лемма 3.3. *Пусть* $i\colon Y \to X$ *— замкнутое вложение, а* $\mathscr{J}$ *— пучок идеалов* Y *в* X*. Тогда функтор* $i_* : \mathrm{Qcoh}(Y) \to \mathrm{Qcoh}(X)$ *— эквивалентность на подкатегорию пучков, анллуируемых пучком идеалов* $\mathscr{J}$*. Обратный функтор —* i^**.*

Доказательство. Во-первых, проверим, что $i^*i_*F \cong F$ для всякого $F \in \mathrm{Qcoh}(Y)$. Для этого заметим, что по сопряженности $\mathrm{Hom}(i^*i_*F, F) \cong \mathrm{Hom}(i_*F, i_*F)$, значит сущесвует канонический морфизм $i^*i_*F \to F$ и нам достаточно проверить, что он является изоморфизмом. Это вопрос локальный, так что можно считать, что $X = \mathrm{Spec}\,A$ — аффинно, $\mathscr{J}$ соответствует идеалу $J \subset A$, а $Y = \mathrm{Spec}(A/J)$. Тогда функтор i_* — это естественный функтор $\mathrm{Mod}(A/J) \to \mathrm{Mod}\,A$, а функтор i^* — это функтор $- \otimes_A (A/J) : \mathrm{Mod}\,A \to \mathrm{Mod}(A/J)$. В частности, если M — A/J-модуль, соответствующий пучку F, то пучку i^*i_*F соответствует модуль $M \otimes_A (A/J)$, а наш морфизм $M \otimes_A (A/J) \to M$ индуцирован действием A/J на M. Остается заметить, что это — изоморфизм, так как J действует на M тривиально.

Обратно, для всякого пучка G на X есть естественный морфизм $G \to i_*i^*G$, который локально соответсвует естественному морфизму $N \to N \otimes_A (A/J)$ для A-модуля N. Ясно, что он изоморфизм в точности для тех N, которые аннулируются идеалом J, так что i_* — эквивалентность на подкатегорию пучков, которые аннулируются идеалом $\mathscr{J}$. □

Аналогично определяется пучок относительных дифференциалов. Пусть X — схема над S. Рассмотрим диагональ в расслоенном квадрате $\Delta : X \to X \times_S X$ и положим $\Omega_{X/S} = \Delta^*\mathscr{I}$, где $\mathscr{I}$ — пучок идеалов диагонали, если X отделима над S, а если не отделима, то аналогично заменив расслоенный квадрат на открытое подмножество, в котором диагональ замкнута. Ясно, что если $\mathrm{Spec}\,A \subset X$, $\mathrm{Spec}\,R \subset S$ — аффинные открытые подмножества, такие что $\pi(\mathrm{Spec}\,A) \subset \mathrm{Spec}\,R$, где $\pi\colon X \to S$ (так что A — R-алгебра), то $\Omega_{X/S}$ над $\mathrm{Spec}\,A$ соответствует модулю $\Omega_{A/R}$.

Ясно, что если X — схема над кольцом R, то $\Omega_{X/R} = \Omega_{X/\mathrm{Spec}\,R}$.

Лемма 3.4. *Пучок дифференциалов* $\Omega_{X/S}$ *конечно порожден. В частности, если* X *— локально нетерова, то* $\Omega_{X/S}$ *когерентен.*

Эта лемма сразу следует из 2.9.

4. Дифференциалы на проективном пространстве

Теорема 4.1. *Пусть* W *— векторное пространтсво над* k *размерности* n*. Тогда существует точная последовательность*

$$0 \to \Omega_{\mathbb{P}(W)} \to W^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1) \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)} \to 0, \qquad \text{(последовательность Эйлера)}$$

в которой правый морфизм индуцирован естественным отображением $W^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(1)$*.*

Доказательство. Обозначим ядро отображения $\alpha : W^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(1)$ через K (если рассматривать $\mathbb{P}(W)$ как грассманиан $\mathrm{Gr}(1, W)$, то это расслоение $\mathscr{U}^{\perp}$). Получим морфизм расслоений $\beta : K \to W^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}$. Поднимем α и β на $\mathbb{P}(W) \times \mathbb{P}(W)$ и прокомпонируем — получим морфизм

$$\varphi : p_1^*K \xrightarrow{p_1^*\beta} W^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)\times\mathbb{P}(W)} \xrightarrow{p_2^*\alpha} p_2^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(1).$$

Покажем, что $Z_\varphi = \Delta(\mathbb{P}(W))$ — диагональ. В самом деле, чтобы проверить, что $Z_\varphi \subset \Delta(\mathbb{P}(W))$ надо убедиться в том, что $p_{1|Z_\varphi} = p_{2|Z_\varphi}$. Для этого заметим, что эти отображения определяются ограничениями морфизмов $W^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)\times\mathbb{P}(W)} \to p_i^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(1)$ на Z_φ. Рассмотрим коммутатиыную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & p_1^*K_{|Z_\varphi} \arrow[r, "p_1^*\beta"] \arrow[dr, "\varphi_{|Z_\varphi}"'] & W^* \otimes \mathscr{O}_{Z_\varphi} \arrow[r, "p_1^*\alpha"] \arrow[d, "p_2^*\alpha"] & p_1^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(1)_{|Z_\varphi} \arrow[r] \arrow[dl, dashed] & 0 \\
& & p_2^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(1)_{|Z_\varphi} & &
\end{tikzcd}$$

Так как $\varphi_{|Z_\varphi} = 0$, получаем пунктирную стрелку, которая должна быть сюръективна в силу сюръективности вертикальной стрелки. Но заметим, что сюръективный морфизм локально свободных пучков одинакового ранга — изоморфизм. В самом деле, у него постоянный ранг, значит по лемме из первой лекции его ядро — локально свободно ранга ноль, значит равно нулю. Таким образом, пунктирная стрелка — изоморфизм, что и означает равенство отображений $p_{1|Z_\varphi} = p_{2|Z_\varphi}$.

Чтобы построить обратное вложение $\Delta(\mathbb{P}(W)) \subset Z_\varphi$, заметим, что при диагональном вложении $\Delta : \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(W) \times \mathbb{P}(W)$ имеем $\Delta^*\varphi = \alpha \circ \beta = 0$, значит Δ пропускается через Z_φ.

Итак, $Z_\varphi = \Delta(\mathbb{P}(W))$ и значит $\mathscr{I}_{Z_\varphi}$ — идеал диагонали. Вспоминая определение схемы нулей, получаем сюръекцию $K \boxtimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1) \to \mathscr{I}$. Применяя функтор Δ^* получаем эпиморфизм $\Delta^*(K \boxtimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1)) = K(-1) \to \Delta^*\mathscr{I} = \Omega_{\mathbb{P}(W)}$. Но и $K(-1)$ и $\Omega_{\mathbb{P}(W)}$ являются локально свободными пучками ранга $n-1$ (для первого это верно по определению, а для второго следует из того, что проективное пространство покрывается аффинными пространствами, а на аффинном пространстве пучок дифференциалов локально свободен), значит этот морфизм — изоморфизм. Теперь вспоминая определение пучка K, получаем искомую точную последовательность. □

Упражнение 3. *Проверьте, что для грассманиана* $\mathrm{Gr}(k, W)$
(*a*) *существует эпиморфизм* $\mathscr{U}^\perp \boxtimes \mathscr{U} \to \mathscr{I}$, *где* $\mathscr{I}$ *— пучок идеалов диагонали;*
(*b*) *он индуцирует изоморфизм* $\Omega_{\mathrm{Gr}(k,W)} \cong \mathscr{U}^\perp \otimes \mathscr{U}$.