Грассманианы

1. Грассманиан

Пусть W — векторное пространство размерности n. В проективном пространстве $\mathbb{P}(\bigwedge^k W)$ рассмотрим множество поливекторов минимально ранга. Заметим, что для поливектора $\lambda \in \bigwedge^k W$ минимальный ранг равен k, причем он достигается в точности на поливекторах, лежащих в одномерных подпространствах $\bigwedge^k U \subset \bigwedge^k W$, где $U \subset W$ — подпространство размерности k. В самом деле, по определению ранг λ — это ранг r морфизма свертки $W^* \xrightarrow{\lambda} \bigwedge^{k-1} W$, то есть коразмерность его ядра $K = \mathrm{Ker}(\lambda)$. В силу кососимметричности λ, ясно что $\lambda \in \bigwedge^k(K^\perp) \subset \bigwedge^k W$, где $K^\perp \subset W$ — аннулятор K. Поэтому при $\lambda \neq 0$ должно быть $\dim K^\perp \geq k$, откуда $r = \operatorname{codim} K = \dim K^\perp \geq k$, а если достигается равенство, то $\lambda \in \bigwedge^k U$, где $U = K^\perp$.

Рассмотрим множество X всех поливекторов ранга k в пространстве $\mathbb{P}(\bigwedge^k W)$. Тавтологический морфизм $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^k W)}(-1) \to \bigwedge^k W \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^k W)}$ дает морфизм

$$\varphi : \bigwedge\nolimits^{k-1} W^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^k W)}(-1) \to W \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^k W)}$$

(он послойно двойственный к морфизму, рассмотренному выше). Введем на X схемную структуру занулением $\wedge^{k+1}\varphi$ (таким образом, $X = D_k(\varphi)$ — детерминанталь морфизма φ). Ясно, что на X ранг φ постоянен и равен k, поэтому

$$\mathscr{U} = \operatorname{Im}\varphi_{|X}, \qquad W/\mathscr{U} := \operatorname{Coker}\varphi_{|X}, \quad \text{и} \quad \mathscr{U}^\perp := (W/\mathscr{U})^*$$

— расслоения ранга k и $n-k$ соответственно. Многообразие X называется **грассманианом k-мерных подпространств в W** и обозначается $\mathrm{Gr}(k, W)$ или $\mathrm{Gr}(k, n)$. Расслоения $\mathscr{U}$ и $\mathscr{U}^*$ называются **тавтологическим подрасслоением** и **двойственным тавтологическим расслоением**, а расслоения $W/\mathscr{U}$ и $\mathscr{U}^\perp$ — **тавтологическим факторрасслоением** и **расслоением аннуляторов**. По определению на $\mathrm{Gr}(k, W)$ имеем точные последовательности расслоений

$$0 \to \mathscr{U} \to W \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(k,W)} \to W/\mathscr{U} \to 0 \qquad \text{и} \qquad 0 \to \mathscr{U}^\perp \to W^* \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(k,W)} \to \mathscr{U}^* \to 0,$$

называемые **тавтологическими**. Вложение $\mathrm{Gr}(k, W) \to \mathbb{P}(\bigwedge^k W)$ называется **вложением Плюккера**.

Следующее свойство является аналогом универсального свойства проективного пространства.

Предложение 1.1 (Универсальное свойство грассманиана)**.** *Пусть S — произвольная схема. Тогда*

$$\begin{aligned} &\mathrm{Map}(S, \mathrm{Gr}(k, W)) = \\ &\qquad = \{(E, \varepsilon) \mid E \text{ — расслоение ранга } k \text{ на } S,\ \varepsilon : E \to W \otimes \mathscr{O}_S \text{ — вложение расслоений}\} \end{aligned}$$

(пары (E, ε) и (E', ε)) эквивалентны, если существует изоморфизм $\xi : E \to E'$, такой что $\epsilon = \epsilon' \circ \xi$). При этом композиция $S \xrightarrow{(E,\varepsilon)} \mathrm{Gr}(k, W) \longrightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^k W)$ задается вложением $\bigwedge^k E \xrightarrow{\wedge^k \varepsilon} \bigwedge^k W \otimes \mathscr{O}_S$.

Доказательство. Морфизму $f : S \to \mathrm{Gr}(k, W)$ сопоставим вложение расслоений, являющееся обратным образом тавтологического вложения

$$f^*\mathscr{U} \to f^*(W \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(k,W)}) = W \otimes \mathscr{O}_S.$$

Обратно, пусть (E, ε) расслоение с вложением в $W \otimes \mathscr{O}_S$. Рассмотрим морфизм

$$\wedge^k \varepsilon : \bigwedge\nolimits^k E \to \bigwedge\nolimits^k W \otimes \mathscr{O}_S.$$

Ясно, что $\wedge^k\varepsilon$ — вложение линейного подрасслоения, поэтому по универсальному свойству проективного пространства существует морфизм $\bar f : S \to \mathbb{P}(\bigwedge^k W)$, такой что $\bar f^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^k W)}(-1) \cong \bigwedge^k E$. При этом очевидно, что морфизм $\bar f^*\varphi : \bigwedge^{k-1} W^* \otimes \bigwedge^k E \to W \otimes \mathscr{O}_S$ раскладывается в композицию

$$\bigwedge^{k-1} W^* \otimes \bigwedge^k E \xrightarrow{\wedge^{k-1}\varepsilon^*} \bigwedge^{k-1} E^* \otimes \bigwedge^k E = E \xrightarrow{\varepsilon} W \otimes \mathscr{O}_S$$

Отсюда видно, что $\bar f^*(\wedge^{k+1}\varphi) = 0$, так как $\bar f^*\varphi$ пропускается через расслоение E ранга k, поэтому морфизм $\bar f$ пропускается через морфизм $f : S \to \mathrm{Gr}(k, W)$. Кроме того, ясно, что обратный образ вложения $\mathscr{U} \to W \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(k,W)}$ совпадает с исходным морфизмом $\varepsilon : E \to W \otimes \mathscr{O}_S$. ☐

Следствие 1.2. *Пусть* $\dim W = n$. *Тогда*

$$\mathrm{Gr}(k, W) \cong \mathrm{Gr}(n-k, W^*), \qquad \mathrm{Gr}(1, W) \cong \mathbb{P}(W), \quad \text{и} \quad \mathrm{Gr}(n-1, W) \cong \mathbb{P}(W^*).$$

Доказательство. В самом деле, тавтологическое вложение $\mathscr{U}^\perp \to W^* \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(k,W)}$ задает морфизм $\mathrm{Gr}(k, W) \to \mathrm{Gr}(n-k, W^*)$. Обратный морфизм строится аналогично. Далее, тавтологическое расслоение на $\mathrm{Gr}(1, W)$ линейно, поэтому вложение $\mathscr{U} \to W \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(1,W)}$ задает морфизм $\mathrm{Gr}(1, W) \to \mathbb{P}(W)$, а вложение $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1) \to W \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}$ — морфизм $\mathbb{P}(W) \to \mathrm{Gr}(1, W)$, которые очевидно взаимно обратны. Третий изоморфизм является немедленным следствием двух первых. ☐

2. Уравнения Плюккера

Опишем теперь пучок идеалов грассманиана $X = \mathrm{Gr}(k, W)$ в плюккеровом вложении. По определению, X — схема нулей морфизма

$$\wedge^{k+1}\varphi\colon \bigwedge^{k+1}(\bigwedge^{k-1} W^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^k W)}(-1)) \to \bigwedge^{k+1} W \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^k W)}.$$

Поскольку $\bigwedge^{k+1}(\bigwedge^{k-1} W^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^k W)}(-1)) \cong \bigwedge^{k+1}(\bigwedge^{k-1} W^*) \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^k W)}(-k-1)$, этот морфизм можно рассматривать как матрицу, элементы которой — однородные многочлены степени $k{+}1$ от координат. Иначе говоря, X высекается гиперповерхностями степени $k+1$. Однако, на самом деле можно показать, что X высекается даже квадриками.

Предложение 2.1. *Грассманиниан* $\mathrm{Gr}(k, W)$ *в* $\mathbb{P}(\bigwedge^k W)$ *является схемой нулей композиции морфизмов*

$$\psi : \bigwedge^{k-1} W^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^k W)}(-1) \xrightarrow{\varphi} W \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^k W)} \xrightarrow{\varphi'} \bigwedge^{k+1} W \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^k W)}(1),$$

где морфизм φ' *получается из тавтологического морфизма* $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^k W)}(-1) \to \bigwedge^k W \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^k W)}$ *подкруткой и умножением на* W.

Доказательство. Основой доказательства является следующий факт. Пусть $\lambda \in \bigwedge^k W$. Тогда отображение умножения на λ из W в $\bigwedge^{k+1} W$ имеет ранг не меньше $n-k$, причем ранг $n-k$ достигается ровно для разложимых поливекторов. В самом деле, пусть вектор w лежит в ядре умножения на λ, то есть $w \wedge \lambda = 0$. Пусть $W' = W/\mathsf{k}w$, то есть существует точная последовательность $0 \to \mathsf{k}w \to W \to W' \to 0$. Переходя к внешним степеням, получаем последовательность $0 \to \bigwedge^{k-1} W' \wedge w \to \bigwedge^k W \to \bigwedge^k W' \to 0$ (морфизм $- \wedge w : \bigwedge^{k-1} W \to \bigwedge^k W$ очевидно пропускается через $\bigwedge^{k-1} W'$, на котором является вложением). Таким образом имеем диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \bigwedge^{k-1} W' \wedge w \arrow[r] & \bigwedge^k W \arrow[r] \arrow[d, "\wedge w"] & \bigwedge^k W' \arrow[r] \arrow[dll, dotted] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bigwedge^k W' \wedge w \arrow[r] & \bigwedge^{k+1} W \arrow[r] & \bigwedge^{k+1} W' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Согласно сделанным выше замечаниям ядро морфизма $\wedge w$ равно $\bigwedge^{k-1} W' \wedge w$, поэтому равенство $\lambda \wedge w = 0$ означает существование $\lambda' \in \bigwedge^{k-1} W$, такого что $\lambda = \lambda' \wedge w$. Пользуясь этим фактом заключаем, что если $K = \operatorname{Ker}(- \wedge \lambda)$ имеет размерность k, то $\lambda \in \bigwedge^k K \subset \bigwedge^k W$, и кроме того, больше чем k размерность K быть не может.

Тем самым докачзано, что размерность ядра морфизма φ' не превосходит k, то есть его ранг не ниже чем $n-k$, то есть $D_{n-k-1}(\varphi') = \emptyset$. Поэтому, согласно лемме 2.2, приведенной ниже, имеем $D_k(\varphi|_{Z_\psi}) = Z_\psi$, то есть $Z_\psi \subset D_k(\varphi) = \operatorname{Gr}(k, W)$.

Наоборот, как мы видели при ограничении на $\operatorname{Gr}(k, W)$ первый из морфизмов, входящих в определение ψ, факторизуется как $\bigwedge^{k-1} W^* \otimes \mathscr{O}_{\operatorname{Gr}(k,W)}(-1) \to \mathscr{U} \to W \otimes \mathscr{O}_{\operatorname{Gr}(k,W)}$. С другой стороны, из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{U} \arrow[r] \arrow[d] & W \otimes \mathscr{O}_{\operatorname{Gr}(k,W)} \arrow[d] \\
\bigwedge^{k+1} \mathscr{U} \otimes \mathscr{O}_{\operatorname{Gr}(k,W)}(1) \arrow[r] & \bigwedge^{k+1} W \otimes \mathscr{O}_{\operatorname{Gr}(k,W)}(1)
\end{tikzcd}$$

и равенства $\bigwedge^{k+1} \mathscr{U} = 0$ (ввиду того, что ранг $\mathscr{U}$ равен k), следует, что $\psi_{|\operatorname{Gr}(k,W)} = 0$. Тем самым плюккерово вложение $\operatorname{Gr}(k, W) \to \mathbb{P}(\bigwedge^k W)$ пропускается через Z_ψ, то есть $\operatorname{Gr}(k, W) \subset Z_\psi$. Вместе со вложением, доказанным раньше, это дает равенство $\operatorname{Gr}(k, W) = Z_\psi$. $\square$

Лемма 2.2. *Пусть Z — схема, а $\mathscr{E} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{F} \xrightarrow{\varphi'} \mathscr{G}$ — комплекс морфизмов векторных расслоений, то есть $\varphi' \circ \varphi = 0$. Пусть ранг $\mathscr{F}$ равен n, и для некоторого $0 \le k \le n$ выполнено равенство $D_{n-k-1}(\varphi') = \emptyset$. Тогда $D_k(\varphi) = Z$.*

Доказательство. Вопрос локальный, поэтому можно считать, что Z — спектр локального кольца R с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$, то есть все расслоения тривиальны и морфизмы φ и φ' задаются матрицами с коэффициентами из R. Условие $D_{n-k-1}(\varphi') = \emptyset$ означает, что идеал порожденный всеми минорами размера $n-k$ матрицы φ' является единичным идеалом, следовательно по крайней мере один из миноров не лежит в $\mathfrak{m}$, а значит обратим. Поэтому матрицу φ' заменой базисов можно привести к виду

$$\varphi' = \left(\begin{smallmatrix} 1_{n-k} & 0 \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)$$

Если теперь записать матрицу φ в блочном виде

$$\varphi = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right),$$

то условие $\varphi' \circ \varphi = 0$ влечет $a = b = 0$, то есть φ имеет лишь k ненулевых строк. В частности, все миноры размера $k+1$ в матрице φ равны нулю, а значит $D_k(\varphi) = X$. $\square$

Морфизм ψ соответствует сечению расслоения $\bigwedge^{k-1} W \otimes \bigwedge^{k+1} W \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^k W)}(2)$, то есть набору квадрик, являющихся образами отображения $\bigwedge^{k-1} W^* \otimes \bigwedge^{k+1} W^* \to S^2(\bigwedge^2 W^*)$. Согласно определению морфизма ψ, оно задается как композиция отображений

$$\bigwedge^{k-1} W^* \otimes \bigwedge^{k+1} W^* \to \bigwedge^{k-1} W^* \otimes W^* \otimes \bigwedge^k W^* \to \bigwedge^k W^* \otimes \bigwedge^k W^* \to S^2(\bigwedge^k W^*)$$

(первое отображение — естественное вложение $\bigwedge^{k+1} W^* \hookrightarrow W^* \otimes \bigwedge^k W^*$, второе — внешнее произведение $\bigwedge^{k-1} W^* \otimes W^* \to \bigwedge^k W^*$, а третье — симметризация $\bigwedge^k W^* \otimes \bigwedge^k W^* \to S^2(\bigwedge^2 W^*)$). В частности, это отображение легко вычислить на произведениях базисных векторов:

$$\begin{aligned} x_{i_1 \dots i_{k-1}} \otimes x_{j_1 \dots j_{k+1}} &\mapsto x_{i_1 \dots i_{k-1}} \otimes \sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s-1} (x_{j_s} \otimes x_{j_1 \dots j_{s-1} j_{s+1} \dots j_{k+1}}) \\ &\mapsto \sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s-1} x_{i_1 \dots i_{k-1} j_s} x_{j_1 \dots j_{s-1} j_{s+1} \dots j_{k+1}} =: Q_{i_1, \dots, i_{k-1}; j_1, \dots, j_{k+1}}(x). \end{aligned}$$

Квадрики $Q_{i_1, \dots, i_{k-1}; j_1, \dots, j_{k+1}}(x)$ называются квадриками Плюккера.

Пример 2.3. Пусть $k = 2$, $n = 4$. Тогда

$$Q_{1;2,3,4} = x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23}, \qquad Q_{2;1,3,4} = -x_{12}x_{34} - x_{23}x_{14} + x_{24}x_{13} = -Q_{1;2,3,4}$$

Аналогично $Q_{3;1,2,4} = -Q_{4;1,2,3} = Q_{1;2,3,4}$. С другой стороны, $Q_{1;1,2,3} = 0 - x_{12}x_{13} + x_{13}x_{12} = 0$. Аналогично равны нулю и все остальные квадрики. Таким образом $\mathrm{Gr}(2,4) \subset \mathbb{P}^5$ — квадрика.

Кстати, любая невырожденная квадрика в $\mathbb{P}^5$ над алгебраически замкнутым полем характеристики большей двух приводится к плюккеровому виду, так что любая такая квадрика изоморфна грассманиану $\mathrm{Gr}(2,4)$.

Замечание 2.4. Легко видеть, что если $\{i_1, \dots, i_{k-1}\} \subset \{j_1, \dots, j_{k+1}\}$, то $Q_{i_1,\dots,i_{k-1};j_1,\dots,j_{k+1}} = 0$.

Пример 2.5. Пусть $k = 2$, $n = 5$. Тогда

$$Q_{1;2,3,4} = x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23},\ Q_{1;2,3,5} = x_{12}x_{35} - x_{13}x_{25} + x_{15}x_{23},\ Q_{1;2,4,5} = x_{12}x_{45} - x_{14}x_{25} + x_{15}x_{24},$$
$$Q_{1;3,4,5} = x_{13}x_{45} - x_{14}x_{35} + x_{15}x_{34}, \qquad Q_{2;3,4,5} = x_{23}x_{45} - x_{24}x_{35} + x_{25}x_{34}.$$

Остальные квадрики либо совпадают с этими, либо нулевые, т.е. $\mathrm{Gr}(2,5) \subset \mathbb{P}^9$ — пересечение пяти квадрик.

Важно понимать, что за исключением тривиальных случаев $\mathrm{Gr}(2,4)$, $\mathrm{Gr}(1,n)$ и $\mathrm{Gr}(n-1,n)$, грассманиан *не является* полным пересечением содержащих его квадрик (и вообще не является полным пересечением).

3. Локальная структура и дифференциалы

Опишем теперь локальное строение грассманиана. Для этого рассмотрим пересечение $\mathrm{Gr}(k,W)$ с аффинной картой в $\mathbb{P}(\bigwedge^k W)$, заданной неравенством $x_{12\dots k} \neq 0$. Нам понадобится

Лемма 3.1 (Универсальное свойство аффинного пространства)**.** *Пусть V — векторное пространство, а $\mathbb{A}(V) = \operatorname{Spec} S^\bullet(V^*)$ — соответствующее аффинное пространство. Тогда*

$$\mathrm{Map}(S, \mathbb{A}(V)) = \Gamma(S, V \otimes \mathscr{O}_S).$$

Доказательство. Так как $\mathbb{A}(V)$ аффинно, $\mathrm{Map}(S, \mathbb{A}(V)) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{alg}}(S^\bullet(V^*), \Gamma(S, \mathscr{O}_S))$. Так как $S^\bullet(V^*)$ является свободной коммутативной алгеброй, имеем

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{alg}}(S^\bullet(V^*), \Gamma(S, \mathscr{O}_S)) = \mathrm{Hom}(V^*, \Gamma(S, \mathscr{O}_S)) = V \otimes \Gamma(S, \mathscr{O}_S) = \Gamma(S, V \otimes \mathscr{O}_S),$$

что и требовалось. $\square$

В частности, на $\mathbb{A}(V)$ имеется “тавтологическое сечение” $s \in \Gamma(\mathbb{A}(V), V \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{A}(V)})$, соответствующее согласно лемме тождественному морфизму $\mathbb{A}(V) \to \mathbb{A}(V)$.

Предложение 3.2. *Открытое подмножество* $\mathrm{Gr}(k,W) \cap \{x_{12\dots k} \neq 0\}$ *в* $\mathrm{Gr}(k,W)$ *изоморфно аффинному пространству* $\mathbb{A}^{k(n-k)}$.

Доказательство. Пусть $U_1 \subset W$ — подпространство в W, задаваемое как $U_1 = \{x_1 = \dots = x_k = 0\}$. Выберем дополнительное к нему подпространство $U_0 \subset W$ размерности k, так что $W = U_0 \oplus U_1$. Построим морфизм $\mathbb{A}^{k(n-k)} = \mathbb{A}(\mathrm{Hom}(U_0, U_1)) \to \mathrm{Gr}(k,W)$. Для этого рассмотрим тавтологическое сечение $s : \mathscr{O}_{\mathbb{A}(\mathrm{Hom}(U_0,U_1))} \to \mathrm{Hom}(U_0,U_1) \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{Hom}(U_0,U_1)}$. Оно индуцирует морфизм векторных расслоений $U_0 \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{A}(\mathrm{Hom}(U_0,U_1))} \to U_1 \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{A}(\mathrm{Hom}(U_0,U_1))}$ и далее морфизм

$$U_0 \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{A}(\mathrm{Hom}(U_0,U_1))} \xrightarrow{(1,s)^T} (U_0 \oplus U_1) \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{A}(\mathrm{Hom}(U_0,U_1))} = W \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{A}(\mathrm{Hom}(U_0,U_1))}.$$

Ясно, что ранг этого морфизма во всех точках равен k, так что в силу универсального свойства грассманниана он задает морфизм $\mathbb{A}(\mathrm{Hom}(U_0,U_1)) \to \mathrm{Gr}(k,W)$. При этом композиция этого морфизма с плюккеровым вложением задается минорами матрицы $(1, s)^T$. Первый из этих миноров равен 1, поэтому образ отображения содержится в $\mathrm{Gr}(k, W) \cap \{x_{12\ldots k} \neq 0\}$.

Обратно, пусть $X = \mathrm{Gr}(k, W) \cap \{x_{12\ldots k} \neq 0\}$. Очевидно, что детерминант композиции морфизмов $\mathscr{U}_{|X} \to W \otimes \mathscr{O}_X \to U_0 \otimes \mathscr{O}_X$ равен $x_{12\ldots k}$, поэтому она является изоморфизмом. Пользуясь этим изоморфизмом, получим морфизм $U_0 \otimes \mathscr{O}_X \cong \mathscr{U}_{|X} \to W \otimes \mathscr{O}_X \to U_1 \otimes \mathscr{O}_X$, то есть сечение расслоения $\mathrm{Hom}(U_0, U_1) \otimes \mathscr{O}_X$. В силу леммы 3.1 оно дает морфизм $X \to \mathbb{A}(\mathrm{Hom}(U_0, U_1)) = \mathbb{A}^{k(n-k)}$.

Построенные отображения очевидно взаимно обратны. □

Поскольку множества $x_{i_1 i_2 \ldots i_k} \neq 0$ покрывают все $\mathbb{P}(\bigwedge^k W)$, заключаем что $\mathrm{Gr}(k, W)$ покрывается открытыми подмножествами, каждое из которых изоморфно аффинному пространству.

Следствие 3.3. *Грассманиан $\mathrm{Gr}(k, n)$ является гладким многообразием размерности $k(n-k)$.*

Теперь вычислим на $\mathrm{Gr}(k, W)$ пучок дифференциалов.

Теорема 3.4. *Пусть W — векторное пространтсво над k размерности n. Тогда*

$$\Omega_{\mathrm{Gr}(k,W)} \cong \mathscr{U} \otimes \mathscr{U}^{\perp}.$$

Доказательство. Рассуждение аналогично вычислению дифференциалов проективного пространства. Пусть $p_1, p_2 \colon \mathrm{Gr}(k, W) \times \mathrm{Gr}(k, W) \to \mathrm{Gr}(k, W)$ — проекции, а α и β — тавтологические морфизмы

$$0 \to \mathscr{U} \xrightarrow{\alpha} W \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(k,W)} \xrightarrow{\beta} W/\mathscr{U} \to 0$$

На $\mathrm{Gr}(k, W) \times \mathrm{Gr}(k, W)$ рассмотрим композицию морфизмов

$$p_1^* \mathscr{U} \xrightarrow{p_1^* \alpha} W \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(k,W) \times \mathrm{Gr}(k,W)} \xrightarrow{p_2^* \beta} p_2^*(W/\mathscr{U}).$$

Покажем, что ее схема нулей Z_φ совпадает с диагональю $\Delta = \Delta(\mathrm{Gr}(k, W))$.

В самом деле, чтобы проверить, что $Z_\varphi \subset \Delta$ надо убедиться в том, что $p_{1|Z_\varphi} = p_{2|Z_\varphi}$. Для этого заметим, что проекции p_1 и p_2 определяются (в смысле универсального свойства грассманиана) ограничениями на Z_φ морфизмов $p_i^* \alpha \colon p_i^* \mathscr{U} \to W \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(k,W) \times \mathrm{Gr}(k,W)}$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & & p_1^*\mathscr{U}_{|Z_\varphi} \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "p_1^*\alpha_{|Z_\varphi}"] \arrow[dr, "\varphi_{|Z_\varphi}"] & & \\
0 \arrow[r] & p_2^*\mathscr{U}_{|Z_\varphi} \arrow[r, "p_2^*\alpha_{|Z_\varphi}"] & W \otimes \mathscr{O}_{Z_\varphi} \arrow[r, "p_2^*\beta_{|Z_\varphi}"] & p_2^*(W/\mathscr{U})_{|Z_\varphi} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Так как $\varphi_{|Z_\varphi} = 0$, получаем пунктирную стрелку. Так как $p_1^* \alpha$ и $p_2^* \alpha$ являются вложениями расслоений ранга k, эта стрелка тоже везде имеет ранг k. Следовательно, в силу леммы с первой лекции пунктирная стрелка является изоморфизмом расслоений (так как ее ядро и коядро — расслоения ранга 0). Значит отображения $p_1|_{Z_\varphi}$ и $p_2|_{Z_\varphi}$ задаются эквивалентными (в смысле универсального свойства грассманиана) данными, значит $p_1|_{Z_\varphi} = p_2|_{Z_\varphi}$, то есть $Z_\varphi \subset \Delta$.

Чтобы проверить обратное вложение $\Delta \subset Z_\varphi$, заметим, что $\Delta^* \varphi = \beta \circ \alpha = 0$, значит Δ пропускается через Z_φ.

Итак, $Z_\varphi = \Delta(\mathrm{Gr}(k, W))$ и значит $\mathscr{I}_{Z_\varphi}$ — идеал диагонали. Вспоминая определение схемы нулей, получаем сюръекцию $p_1^* \mathscr{U} \otimes p_2^* \mathscr{U}^{\perp} \to \mathscr{I}_\Delta$. Применяя функтор Δ^* получаем эпиморфизм

$$\mathscr{U} \otimes \mathscr{U}^{\perp} = \Delta^*(p_1^* \mathscr{U} \otimes p_2^* \mathscr{U}^{\perp}) \twoheadrightarrow \Delta^* \mathscr{I}_\Delta = \Omega_{\mathrm{Gr}(k,W)}.$$

Но пучки $\mathscr{U} \otimes \mathscr{U}^{\perp}$ и $\Omega_{\mathrm{Gr}(k,W)}$ являются локально свободными пучками ранга $k(n-k)$ (для первого это верно по определению, а для второго следует Предложения 3.2), значит этот морфизм — изоморфизм. □