Относительные конструкции

1. Аффинизация и проективизация расслоения

Пусть X — алгебраическое многообразие, а $\mathscr{E}$ — векторное расслоение ранга n на нем. Определим

$$\mathbb{A}_X(\mathscr{E}) := \operatorname{Spec}_X\left(\bigoplus_{i=0}^{\infty} S^i\mathscr{E}^*\right), \qquad \mathbb{P}_X(\mathscr{E}) := \operatorname{Proj}_X\left(\bigoplus_{i=0}^{\infty} S^i\mathscr{E}^*\right),$$

где $\bigoplus_{i=0}^{\infty} S^i\mathscr{E}^*$ — симметрическая алгебра, порожденная двойственным расслоением $\mathscr{E}^*$.

В случае, когда X — точка, а значит $\mathscr{E}$ — векторное пространство, эти формулы определяют аффинное и проективное пространства, ассоциированные с векторным. В общем же случае они называются **аффинизацией** и **проективизацией векторного расслоения** соответственно. Еще иногда **аффинизацию** называют тотальным пространством векторного расслоения.

По определению аффинизация и проективизация снабжены морфизмами

$$a\colon \mathbb{A}_X(\mathscr{E}) \to X \qquad \text{и} \qquad p\colon \mathbb{P}_X(\mathscr{E}) \to X.$$

Лемма 1.1. *Морфищмы $a\colon \mathbb{A}_X(\mathscr{E}) \to X$ и $p\colon \mathbb{P}_X(\mathscr{E}) \to X$ являются локально тривиальными расслоениями в топологии Зариского со слоем $\mathbb{A}^n$ и $\mathbb{P}^{n-1}$ соответственно.*

Доказательство. По определению относительный (проективный) спектр получаются склейкой обычных (проективных) спектров над открытыми аффинными подмножествами в X. Поэтому достаточно проверить, что у X есть такое открытое покрытие, над каждым элементом которого у нас получается декартово произведение. Поскольку пучок $\mathscr{E}$ локально свободен, у X есть такое покрытие, над каждым элементом которого пучок $\mathscr{E}$ тривиален. Поэтому достаточно проверить, что если $\mathscr{E}$ тривиален (то есть $\mathscr{E} \cong V \otimes \mathscr{O}_X$, где V — векторное пространство), то $\mathbb{A}_X(\mathscr{E}) \cong \mathbb{A}(V) \times X$ и $\mathbb{P}_X(\mathscr{E}) \cong \mathbb{P}(V) \times X$. Но очевидно, что в этом случае

$$\bigoplus_{i=0}^{\infty} S^i\mathscr{E}^* = \bigoplus_{i=0}^{\infty} S^i(V \otimes \mathscr{O}_X)^* = \left(\bigoplus_{i=0}^{\infty} S^iV^*\right) \otimes \mathscr{O}_X,$$

откуда сразу следуют искомые формулы. $\square$

2. Универсальное свойство аффинизации

Так же как и в “абсолютном случае”, на $\mathbb{A}_X(\mathscr{E})$ и $\mathbb{P}_X(\mathscr{E})$ есть тавтологическое сечение и тавтологическое подрасслоение. Первое из них построить совсем просто. Заметим, что

$$a_*a^*\mathscr{E} \cong \mathscr{E} \otimes a_*\mathscr{O}_{\mathbb{A}_X(\mathscr{E})} \cong \mathscr{E} \otimes \left(\bigoplus_{i=0}^{\infty} S^i\mathscr{E}^*\right) \cong \bigoplus_{i=0}^{\infty}(\mathscr{E} \otimes S^i\mathscr{E}^*)$$

(первый изоморфизм — формула проекции, а второй — определение $\mathbb{A}_X(\mathscr{E})$). Слагаемое с номером $i = 1$ равно $\mathscr{E} \otimes \mathscr{E}^*$, поэтому его глобальные сечения равны $\Gamma(X, \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}^*) \cong \operatorname{End}(\mathscr{E})$ и содержат выделенный элемент $\mathrm{id}_{\mathscr{E}}$. Поскольку $\Gamma(X, a_*a^*\mathscr{E}) \cong \Gamma(\mathbb{A}_X(\mathscr{E}), a^*\mathscr{E})$, он задает глобальное сечение пучка $a^*\mathscr{E}$ на $\mathbb{A}_X(\mathscr{E})$. Оно и называется **тавтологическим сечением**. По построению, тавтологическое сечение *линейно на слоях* морфизма a (так как соответствует слагаемому с $i = 1$).

Если расслоение $\mathscr{E}$ тривиально, то есть $\mathscr{E} \cong V \otimes \mathscr{O}_X$, так что $\mathbb{A}_X(\mathscr{E}) \cong \mathbb{A}(V) \times X$, то

$$a^*\mathscr{E} \cong a^*(V \otimes \mathscr{O}_X) \cong V \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{A}_X(\mathscr{E})}$$

и тавтологическое сечение является обратным образом тавтологического сечения пучка $V \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{A}(V)}$ на $\mathbb{A}(V)$ относительно проекции $\mathbb{A}(V) \times X \to \mathbb{A}(V)$.

Лемма 2.1 (Универсальное свойство аффинизации)**.** *Имеется естественный изоморфизм*

$$\mathrm{Map}(S, \mathbb{A}_X(\mathscr{E})) = \{(\phi, \sigma) \mid \phi \in \mathrm{Map}(S, X),\ \sigma \in \Gamma(S, \phi^*\mathscr{E})\}.$$

Доказательство. Морфизму $f\colon S \to \mathbb{A}_X(\mathscr{E})$ сопоставим пару $\phi = a \circ f$, $\sigma = f^*(s)$, где s — тавтологическое сечение расслоения $a^*\mathscr{E}$.

Обратно, пусть дана пара (ϕ, σ). Покроем X аффинными картами X_i, на которых $\mathscr{E}$ тривиально (то есть $\mathscr{E}|_{X_i} \cong V_i \otimes \mathscr{O}_{X_i}$). Пусть $S_i = \phi^{-1}(X_i)$, $\phi_i = \phi|_{S_i}\colon S_i \to X_i$ и

$$\sigma_i = \sigma|_{S_i} \in \Gamma(S_i, \phi_i^*(\mathscr{E}|_{X_i})) \cong \Gamma(S_i, \phi_i^*(V_i \otimes \mathscr{O}_{X_i})) \cong \Gamma(S_i, V_i \otimes \mathscr{O}_{S_i}).$$

Тогда σ_i задает отображение $S_i \to \mathbb{A}(V_i)$, и вместе с ϕ_i они задают отображение

$$f_i\colon S_i \xrightarrow{(\sigma_i, \phi_i)} \mathbb{A}(V_i) \times X_i \cong \mathbb{A}_{X_i}(\mathscr{E}|_{X_i}) \cong \mathbb{A}_X(\mathscr{E}) \times_X X_i \subset \mathbb{A}_X(\mathscr{E}).$$

Ясно, что на пересечениях $S_i \cap S_j$ ограничения отображений f_i и f_j совпадают, а значит они склеиваются в общее отображение $f\colon S \to \mathbb{A}_X(\mathscr{E})$.

Легко видеть, что приведенные конструкции взаимно обратны. □

Следствие 2.2. *Всякий морфизм расслоений $\varepsilon\colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ индуцирует морфизм их аффинизаций $\mathbb{A}_X(\mathscr{E}) \to \mathbb{A}_X(\mathscr{E}')$, коммутирующий с проекциями на X.*

Доказательство. Пусть $s \in \Gamma(\mathbb{A}_X(\mathscr{E}), a^*\mathscr{E})$ — тавтологическое сечение. Тогда естественный морфизм $a\colon \mathbb{A}_X(\mathscr{E}) \to X$ вместе с сечением $a^*(\varepsilon)(s) \in \Gamma(\mathbb{A}_X(\mathscr{E}), a^*(\mathscr{E}'))$ задают (в силу универсального свойства $\mathbb{A}_X(\mathscr{E}')$) морфизм $\mathbb{A}_X(\mathscr{E}) \to \mathbb{A}_X(\mathscr{E}')$. Он по построению коммутирует с проекцией на X. □

Упражнение 1. *Покажите, что сечения отображения a (то есть отображения $f\colon X \to \mathbb{A}_X(\mathscr{E})$, такие что $a \circ f = \mathrm{id}_X$) находятся в биекции с глобальными сечениями расслоения $\mathscr{E}$ на X.*

3. Универсальное свойство проективизации

Согласно теореме Серра категория когренетных пучков на $\mathbb{P}_X(\mathscr{E})$ эквивалентна факторкатегории градуированных пучков модулей над градуированным пучком алгебр $\mathscr{A}^\bullet := \bigoplus_{i=0}^\infty S^i\mathscr{E}^*$ по подкатегории модулей, почти все компоненты которых (то есть все кроме конечного числа) равны нулю. При этом свободный модуль $\mathscr{A}^\bullet$ соответствует структурному пучку $\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})}$, а свободный модуль со сдвинутой на единицу градуировкой $\mathscr{A}^\bullet(1) := \bigoplus_{i=0}^\infty S^{i+1}\mathscr{E}^*$ — "скручивающему" линейному расслоению $\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(1)$. Естественный морфизм градуированных $\mathscr{A}^\bullet$-модулей

$$\mathscr{A}^\bullet = \bigoplus_{i=0}^\infty S^i\mathscr{E}^* \to \bigoplus_{i=0}^\infty (\mathscr{E} \otimes S^{i+1}\mathscr{E}^*) = \mathscr{E} \otimes \mathscr{A}^\bullet(1)$$

(переводящий $1 \in \mathscr{A}_0^\bullet$ в $\mathrm{id}_{\mathscr{E}} \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}^* = \mathscr{E} \otimes \mathscr{A}_1^\bullet = \mathscr{E} \otimes \mathscr{A}^\bullet(1)_0$) после сдвига градуировки задает морфизм пучков

$$\alpha\colon \mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(-1) \to p^*\mathscr{E}.$$

Двойственный к нему морфизм $p^*\mathscr{E}^* \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(1)$ в терминах градуированных модулей соответствует гомоморфизму умножения $\mathscr{E}^* \otimes \left(\bigoplus_{i=0}^\infty S^i\mathscr{E}^*\right) \to \bigoplus_{i=0}^\infty S^{i+1}\mathscr{E}^*$. Поскольку он сюръективен почти во всех (во всех кроме $i = -1$) компонентах градуировки, соответствующий морфизм пучков на $\mathbb{P}_X(\mathscr{E})$ тоже сюръективен, а значит α является вложением расслоений.

Лемма 3.1 (Универсальное свойство проективизации)**.** *Имеется естественный изоморфизм*

$$\mathrm{Map}(S, \mathbb{P}_X(\mathscr{E})) = \{(\phi, L, \lambda) \mid \phi \in \mathrm{Map}(S, X),\ L \text{ — линейное расслоение на } S \text{ и}$$
$$\lambda\colon L \to \phi^*\mathscr{E} \text{ — вложение расслоений}\}/\sim,$$

с обычным отношением эквивалентности $(\phi, L, \lambda) \sim (\phi', L', \lambda')$, *если* $\phi = \phi'$ *и существует изоморфизм* $\xi\colon L \xrightarrow{\sim} L'$, *такой что* $\lambda = \lambda' \circ \xi$.

Доказательство. Морфизму $f\colon S \to \mathbb{P}_X(\mathscr{E})$ сопоставим тройку $\phi = p \circ f$, $L = f^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(-1)$, $\lambda = f^*(\alpha)$, где $\alpha\colon \mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(-1) \to p^*\mathscr{E}$ тавтологическое вложение.

Обратно, пусть дана тройка (ϕ, L, λ). Покроем X аффинными картами X_i, на которых $\mathscr{E}$ тривиально (то есть $\mathscr{E}|_{X_i} \cong V_i \otimes \mathscr{O}_{X_i}$). Пусть $S_i = \phi^{-1}(X_i)$, $\phi_i = \phi|_{S_i}\colon S_i \to X_i$, $L_i = L|_{S_i}$ и

$$\lambda_i = \lambda|_{S_i}\colon L_i \to \phi_i^*(\mathscr{E}|_{X_i}) \cong V_i \otimes \mathscr{O}_{S_i}.$$

Тогда λ_i задает отображение $S_i \to \mathbb{P}(V_i)$, и вместе с ϕ_i они задают отображение

$$f_i\colon S_i \xrightarrow{(\lambda_i,\phi_i)} \mathbb{P}(V_i) \times X_i \cong \mathbb{P}_{X_i}(\mathscr{E}|_{X_i}) \cong \mathbb{P}_X(\mathscr{E}) \times_X X_i \subset \mathbb{P}_X(\mathscr{E}).$$

Ясно, что на пересечениях $S_i \cap S_j$ ограничения отображений f_i и f_j совпадают, а значит они склеиваются в общее отображение $f\colon S \to \mathbb{P}_X(\mathscr{E})$.

Легко видеть, что приведенные конструкции взаимно обратны. $\square$

Следствие 3.2. *Всякое вложение расслоений* $\varepsilon\colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ *индуцирует вложение их проективизаций* $\bar\varepsilon\colon \mathbb{P}_X(\mathscr{E}) \to \mathbb{P}_X(\mathscr{E}')$, *коммутирующий с проекциями на* X *и* $\bar\varepsilon^*(\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E}')/X}(-1)) \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(-1)$.

Доказательство. Пусть $\alpha\colon \mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(-1) \to p^*\mathscr{E}$ — тавтологическое вложение тавтологического расслоения. Тогда естественный морфизм $p\colon \mathbb{P}_X(\mathscr{E}) \to X$ вместе с тавтологическим расслоением $\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(-1)$ и вложением λ, определямым как композиция $\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(-1) \xrightarrow{\alpha} p^*\mathscr{E} \xrightarrow{p^*(\varepsilon)} p^*\mathscr{E}'$ задают (в силу универсального свойства $\mathbb{P}_X(\mathscr{E}')$) морфизм $\mathbb{P}_X(\mathscr{E}) \to \mathbb{P}_X(\mathscr{E}')$. Он по построению коммутирует с проекцией на X, а обратный образ $\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E}')/X}(-1)$ равен $\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(-1)$. То, что $\bar\varepsilon$ является замкнутым вложением легко проверить локально по X. $\square$

Упражнение 2. *Покажите, что сечения отображения* p *(то есть отображения* $f\colon X \to \mathbb{P}_X(\mathscr{E})$, *такие что* $p \circ f = \mathrm{id}_X$*) находятся в биекции с линейными подрасслоениями в* $\mathscr{E}$ *на* X.

Важной особенностью проективизации (в отличии от аффинизации) является то, что ее результат не зависит от подкрутки векторного расслоения.

Лемма 3.3. *Пусть* $\mathscr{L}$ *— линейное расслоение на* X. *Тогда существует единственный изоморфизм* $f\colon \mathbb{P}_X(\mathscr{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_X(\mathscr{E} \otimes \mathscr{L})$, *такой что* $f^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E}\otimes\mathscr{L})/X}(-1) \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(-1) \otimes p^*\mathscr{L}$.

Доказательство. Аналогично предыдущему — если $\alpha\colon \mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(-1) \to p^*\mathscr{E}$ — тавтологическое вложение тавтологического расслоения, то естественный морфизм $p\colon \mathbb{P}_X(\mathscr{E}) \to X$ вместе с подкруткой тавтологического вложения $\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(-1) \otimes p^*\mathscr{L} \xrightarrow{\alpha\otimes\mathrm{id}_{p^*\mathscr{L}}} p^*(\mathscr{E} \otimes \mathscr{L})$ задают (в силу универсального свойства $\mathbb{P}_X(\mathscr{E} \otimes \mathscr{L})$) морфизм $f\colon \mathbb{P}_X(\mathscr{E}) \to \mathbb{P}_X(\mathscr{E} \otimes \mathscr{L})$. Он по построению коммутирует с проекцией на X, а $f^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E}\otimes\mathscr{L})/X}(-1) \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(-1) \otimes p^*\mathscr{L}$. Применяя аналогичную конструкцию к расслоению $\mathscr{L}^{-1}$, получаем также морфизм $g\colon \mathbb{P}_X(\mathscr{E} \otimes \mathscr{L}) \to \mathbb{P}_X(\mathscr{E})$. Взаимная обратность построенных морфизмов очевидна. $\square$

Следствие 3.4. *Если* V *— векторное пространство, то* $\mathbb{P}_X(V \otimes \mathscr{L}) \cong X \times \mathbb{P}(V)$, *причем так что* $\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(V\otimes\mathscr{L})/X}(-1) \cong \mathscr{L} \boxtimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1)$.

Важно помнить, что разным представлениям многообразия в виде проективизации расслоения соответствуют разные линейные расслоения $\mathscr{O}(1)$. Это соответствие происходит через формулу

$$p_*\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(1) \cong \mathscr{E}^*.$$

В частности, подкрутка расслоения $\mathscr{E}$ на $p^*\mathscr{L}$ соответствует подкрутке $\mathscr{O}(1)$ на $p^*\mathscr{L}^*$.

4. Проективные вложения и уравнения

Вложить проективизацию расслоения в проективное пространство можно следующим способом. Допустим, расслоение $\mathscr{E}$ вкладывается в подкуртку тривиального расслоения $V \otimes \mathscr{L}$ на X (чтобы получить такое вложение, можно найти подкрутку $\mathscr{E}^* \otimes \mathscr{L}$ двойственного расслоения, которая порождалась бы глобальными сечениями, и положив $V = \Gamma(X, \mathscr{E}^* \otimes \mathscr{L})^*$, рассмотреть морфизм вычисления $V^* \otimes \mathscr{O}_X \twoheadrightarrow \mathscr{E}^* \otimes \mathscr{L}$, а затем взять двойственный морфизм $\mathscr{E} \otimes \mathscr{L}^* \hookrightarrow V \otimes \mathscr{O}_X$ и подкрутить его на $\mathscr{L}$). Тогда, согласно Следствию 3.2 и 3.4 получаем

$$\mathbb{P}_X(\mathscr{E}) \hookrightarrow \mathbb{P}_X(V \otimes \mathscr{L}) \cong X \times \mathbb{P}(V).$$

Компонируя его с проекцией на $\mathbb{P}(V)$, получаем морфизм $f\colon \mathbb{P}_X(\mathscr{E}) \to \mathbb{P}(V)$. Заметим, что

$$f^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1) \cong \left(\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(V\otimes\mathscr{L})/X}(1) \otimes p^*\mathscr{L}\right)|_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})} \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(1) \otimes p^*\mathscr{L},$$

следовательно

$$\Gamma(\mathbb{P}_X(\mathscr{E}), f^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)) \cong \Gamma(X, p_*f^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)) \cong \Gamma(X, p_*(\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(1) \otimes p^*\mathscr{L})) \cong \Gamma(X, \mathscr{E}^* \otimes \mathscr{L}) \cong V^*,$$

откуда следует, что построенный нами выше морфизм совпадает с морфизмом, индуцированным пространством глобальных сечений расслоения $\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(1) \otimes p^*\mathscr{L}$ на $\mathbb{P}_X(\mathscr{E})$ (в частности, это расслоение глобально порождено). Этот морфизм не всегда является вложением, однако этого можно добиться, подкрутив $\mathscr{E}^*$ чуть сильнее.

Лемма 4.1. *Пусть расслоение $\mathscr{L}_1$ таково, что $\mathscr{E}^* \otimes \mathscr{L}_1$ порождается глобальными сечениями, а $\mathscr{L}_2$ очень обильно на X. Тогда морфизм $f\colon \mathbb{P}_X(\mathscr{E}) \to \mathbb{P}(V)$, где $V = \Gamma(X, \mathscr{E}^* \otimes \mathscr{L}_1 \otimes \mathscr{L}_2)^*$ является замкнутым вложением.*

Доказательство. Пусть $V_1 = \Gamma(X, \mathscr{E}^* \otimes \mathscr{L}_1)^*$ и $f_1\colon \mathbb{P}_X(\mathscr{E}) \to \mathbb{P}(V_1)$ индуцироанный морфизм. С другой стороны, пусть $V_2 = \Gamma(X, \mathscr{L}_2)^*$ и $g\colon X \to \mathbb{P}(V_2)$ соответствующее вложение. Рассмотрим морфизм $\mathbb{P}_X(\mathscr{E}) \xrightarrow{(f_1,p)} \mathbb{P}(V) \times X \xrightarrow{\mathrm{id}\times g} \mathbb{P}(V_1) \times \mathbb{P}(V_2) \hookrightarrow \mathbb{P}(V_1 \otimes V_2)$ (последняя стрелка — вложение Сегре). Каждая из стрелок является замкнутым вложением (первая — по Следствию 3.2 и 3.4, а вторая в силу очень обильности $\mathscr{L}_2$. Значит и композиция замкнутое вложение. При этом обратный образ $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V_1\otimes V_2)}(1)$ равен линейному расслоению

$$f_1^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1) \otimes p^*\mathscr{L}_2 \cong f_1^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(1) \otimes p^*\mathscr{L}_1 \otimes p^*\mathscr{L}_2,$$

значит оно очень обильно, а задаваемый им морфизм f является замкнутым вложением. □

Пример 4.2. Пусть $X = \mathbb{P}(A)$, $\mathscr{E} = B \otimes \mathscr{O}_X$, где $\dim A = \dim B = 2$. Тогда $\mathbb{P}_X(\mathscr{E}) \cong \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$. При этом если взять $\mathscr{L} = \mathscr{O}_X$, $V = B$, получится проекция $X \to \mathbb{P}(B)$. Если же взять $\mathscr{L} = \mathscr{O}_X(1)$, $V = \Gamma(X, \mathscr{E}^* \otimes \mathscr{L})^* = \Gamma(\mathbb{P}(A), B^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(A)}(1))^* \cong (B^* \otimes A^*)^* \cong A \otimes B$, получится вложение Сегре $X = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \hookrightarrow \mathbb{P}(A \otimes B) = \mathbb{P}(V)$.

Пример 4.3. Пусть по-прежнему $X = \mathbb{P}(A)$, $\dim A = 2$, но $\mathscr{E} = \mathscr{O}_X \oplus \mathscr{O}_X(-1)$. Тавтологическое вложение $\mathscr{O}_X(-1) \hookrightarrow A \otimes \mathscr{O}_X$ индуцирует вложение $\mathscr{E} \hookrightarrow (\mathsf{k} \oplus A) \otimes \mathscr{O}_X$, и, следовательно, морфизм $f\colon \mathbb{P}_X(\mathscr{E}) \to \mathbb{P}(\mathsf{k} \oplus A) \cong \mathbb{P}^2$. Этот морфизм не является вложением. Действительно, вложение $\mathscr{O}_X \subset \mathscr{E}$ индуцирует сечение $s\colon X \to \mathbb{P}_X(\mathscr{E})$, такое что $s^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(-1) \cong \mathscr{O}_X$. Но так как по построению $f^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(-1)$, то $(f \circ s)^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) = \mathscr{O}_X$, значит кривая $s(X) \subset \mathbb{P}_X(\mathscr{E})$ стягивается морфизмом f. Позже мы проверим, что это единственная такая кривая.

Пример 4.4. Пусть по-прежнему $X = \mathbb{P}(A)$, но $\mathscr{E} = \mathscr{O}_X(-b) \oplus \mathscr{O}_X(-c)$, где $0 \le b \le c$. Стандартные вложения $\mathscr{O}_X(-b) \hookrightarrow S^bA \otimes \mathscr{O}_X$ и $\mathscr{O}_X(-c) \hookrightarrow S^cA \otimes \mathscr{O}_X$ индуцируют вложение $\mathscr{E} \hookrightarrow (S^bA \oplus S^cA) \otimes \mathscr{O}_X$, и, следовательно, морфизм $f\colon \mathbb{P}_X(\mathscr{E}) \to \mathbb{P}(S^bA \oplus S^cA) \cong \mathbb{P}^{b+c+1}$. Этот морфизм является вложением тогда и только тогда, когда $b > 0$. В самом деле, если $b = 0$, то легко найти кривую, стягиваемую морфизмом f. Если же $b > 0$, применим Лемму 4.1 с $\mathscr{L}_1 = \mathscr{O}_X(-1)$, $\mathscr{L}_2 = \mathscr{O}_X(1)$.

Образ линейчатой поверхности $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-b) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-c))$ в $\mathbb{P}^{b+c+1}$ геометрически описывается следующим образом. Легко видеть, что образы ограничения вложения f на сечения, соответствующие прямым слагаемым $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-b)$ и $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-c)$ в $\mathscr{E}$, являются рациональными нормальными кривыми степени b и c в непересекающихся подпространствах $\mathbb{P}^b$ и $\mathbb{P}^c$ внутри $\mathbb{P}^{b+c+1}$ соответственно. Эти кривые канонически отождествлены друг с другом. Соединия их соответствующие точки прямыми внутри $\mathbb{P}^{b+c+1}$, получаем поверхность, которая и совпадает с образом f. Она называется **рациональным скроллом** степени $b + c$.

Иногда важно понимать, как задать уравнениями образ построенных нами вложений. Здесь очень полезен следующий простой результат.

Лемма 4.5. *Пусть $0 \to \mathscr{E} \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to 0$ — точная тройка векторных расслоений на X. Пусть $f\colon \mathbb{P}_X(\mathscr{E}) \to \mathbb{P}_X(\mathscr{F})$ — индуцированное вложение. Тогда $f(\mathbb{P}_X(\mathscr{E})) \subset \mathbb{P}_X(\mathscr{F})$ является схемой нулей естественного сечения расслоения $\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{F})/X}(1) \otimes p^*\mathscr{G}$.*

Доказательство. Во-первых, построим сечение. Заметим, что

$$\Gamma(\mathbb{P}_X(\mathscr{F}), \mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{F})/X}(1) \otimes p^*\mathscr{G}) \cong \Gamma(X, p_*(\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{F})/X}(1) \otimes p^*\mathscr{G})) \cong \Gamma(X, \mathscr{F}^* \otimes \mathscr{G}) \cong \mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{G}),$$

значит морфизм $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ из точной тройки задает сечение s нашего расслоения.

Теперь проверим, что $f(\mathbb{P}_X(\mathscr{E})) \subset Z_s$. Для этого надо проверить, что $f^*(s) = 0$. Но

$$f^*(s) \in \Gamma(\mathbb{P}_X(\mathscr{E}), f^*(\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{F})/X}(1) \otimes p^*\mathscr{G})) \cong \Gamma(\mathbb{P}_X(\mathscr{E}), \mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(1) \otimes p^*\mathscr{G}) \cong \mathrm{Hom}(\mathscr{E}, \mathscr{G})$$

очевидно соответствует морфизму $\mathscr{E} \to \mathscr{G}$ являющемуся композицией морфизмов $\mathscr{E} \to \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ из точной тройки, то есть нулю.

Наконец, проверим, что $Z_s \subset f(\mathbb{P}_X(\mathscr{E}))$. Для этого построим морфизм $Z_s \to \mathbb{P}_X(\mathscr{E})$. Заметим, что на $\mathbb{P}_X(\mathscr{F})$ композиция

$$\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{F})/X}(-1) \to p^*\mathscr{F} \to p^*\mathscr{G},$$

где первая стрелка — тавтологическое вложение, а вторая — обратный образ морфизма из точной тройки, задается сечением s, поэтому при ограничении на Z_s композиция зануляется. Значит ограничение тавтологического вложения $\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{F})/X}(-1)|_{Z_s} \to p^*\mathscr{F}|_{Z_s}$ пропускается через $p^*\mathscr{E}|_{Z_s}$. Построенное вложение $\lambda\colon \mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{F})/X}(-1)|_{Z_s} \to p^*\mathscr{E}|_{Z_s}$ вместе с морфизмом $\phi = p|_{Z_s}\colon Z_s \to X$ и линейным расслоением $\mathscr{L} = \mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{F})/X}(-1)|_{Z_s}$ задают искомое отображение $Z_s \to \mathbb{P}_X(\mathscr{E})$. Его композиция с вложением f очевидно является вложением $Z_s \hookrightarrow \mathbb{P}_X(\mathscr{F})$, значит действительно $Z_s \subset f(\mathbb{P}_X(\mathscr{E}))$. $\square$

Пример 4.6. Опишем образ вложения $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ из Примера 4.3. Для этого заметим, что если $(x_0 : x_1)$ — координаты на $\mathbb{P}^1$, то вложение $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \hookrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus 3}$ задается матрицей $(1, x_0, x_1)^T$ и продолжается до точной тройки

$$0 \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \xrightarrow{(1,x_0,x_1)^T} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus 3} \xrightarrow{(0,x_1,-x_0)} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \to 0.$$

Поэтому, наша поверхность в $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ является схемой нулей соответствующего сечения линейного расслоения $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2}(1, 1)$. Если выбрать координаты $(y_0 : y_1 : y_2)$ на $\mathbb{P}^2$, его уравнение — $x_1 y_1 - x_0 y_2$.

Упражнение 3. *Запишите уравнением образ вложения $\mathbb{P}_{\mathbb{P}(V)}(\Omega_{\mathbb{P}(V)}(1)) \hookrightarrow \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V^*)$, индуцированного вложением из последовательности Эйлера.*

5. Относительный грассманиан

Пусть опять $\mathscr{E}$ — векторное расслоение ранга n на схеме X и $1 \le k \le n-1$. Построим относительную версию грассманиана в этом расслоении. Определим ее через универсальное свойство.

Предложение 5.1. *Существует схема $\mathrm{Gr}_X(k, \mathscr{E})$, такая что*

$$\mathrm{Map}(S, \mathrm{Gr}_X(k,\mathscr{E})) = \{(\phi, E, \varepsilon) \mid \phi \in \mathrm{Map}(S, X),\ E \text{ — расслоение ранга } k \text{ на } S \text{ и } \varepsilon\colon E \to \phi^*\mathscr{E} \text{ — вложение расслоений}\}/\sim,$$

с обычным отношением эквивалентности $(\phi, E, \varepsilon) \sim (\phi', E', \varepsilon')$, если $\phi = \phi'$ и существует изоморфизм $\xi\colon E \xrightarrow{\sim} E'$, такой что $\varepsilon = \varepsilon' \circ \xi$.

Доказательство. Ввиду универсального свойства достаточно доказать предложение в случае, когда расслоение $\mathscr{E}$ тривиально (в общем случае достаточно покрыть X такими картами, построить относительные грассманианы над каждой из них, после чего склеить пользуясь универсальным свойством). Итак, будем считать, что $\mathscr{E} \cong V \otimes \mathscr{O}_X$. Проверим тогда, что $X \times \mathrm{Gr}(k, V)$ удовлетворяет универсальному свойству. В самом деле $\mathrm{Map}(S, X \times \mathrm{Gr}(k,V)) = \mathrm{Map}(S, X) \times \mathrm{Map}(S, \mathrm{Gr}(k, V))$ задается тройками (ϕ, E, ε), которые, пользуясь тривиализацией $\mathscr{E} \cong V \otimes \mathscr{O}_X$, отождествляются с нужными нам тройками. $\square$

В силу универсального свойства тождественному морфизму $\mathrm{Gr}_X(k,\mathscr{E}) \to \mathrm{Gr}_X(k,\mathscr{E})$ соответствует проекция $g\colon \mathrm{Gr}_X(k,\mathscr{E}) \to X$ и подрасслоение $\mathscr{U} \hookrightarrow g^*\mathscr{E}$ (тавтологическое подрасслоение). Оно продолжается до точных троек

$$0 \to \mathscr{U} \to g^*\mathscr{E} \to \mathscr{E}/\mathscr{U} \to 0, \qquad 0 \to \mathscr{U}^\perp \to g^*\mathscr{E}^* \to \mathscr{U}^* \to 0,$$

где $\mathscr{E}/\mathscr{U}$ обозначает тавтологическое факторрасслоение, а $\mathscr{U}^\perp = (\mathscr{E}/\mathscr{U})^*$ — его двойственное. Внешняя степень $\bigwedge^k \mathscr{U} \hookrightarrow g^*(\bigwedge^k \mathscr{E})$ является линейным подрасслоением и задает (в силу универсального свойства) морфизм $\mathrm{Gr}_X(k,\mathscr{E}) \to \mathbb{P}_X(\bigwedge^k \mathscr{E})$ — относительное вложение Плюккера.

Упражнение 4. *Проверьте, что морфизм $g\colon \mathrm{Gr}_X(k,\mathscr{E}) \to X$ является локально тривиальным расслоением со слоем $\mathrm{Gr}(k,n)$, а его сечения соттветствуют подрасслоениям ранга k в $\mathscr{E}$.*

Упражнение 5. *Проверьте, что $\mathrm{Gr}_X(k, \mathscr{E} \otimes \mathscr{L}) \cong \mathrm{Gr}_X(k,\mathscr{E})$ и $\mathrm{Gr}_X(k, V \otimes \mathscr{L}) \cong X \times \mathrm{Gr}(k,V)$. Объясните, как связаны тавтологические расслоения при этих изоморфизмах.*

Упражнение 6. *Пусть $0 \to \mathscr{E} \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to 0$ точная тройка расслоений. Покажите, что $\mathrm{Gr}_X(k,\mathscr{E}) \subset \mathrm{Gr}_X(k,\mathscr{F})$ и совпадает со схемой нулей естественного сечения расслоения $\mathscr{U}^* \otimes g^*\mathscr{G}$.*

Упражнение 7. $\mathrm{Gr}_X(k,\mathscr{E}) \cong \mathrm{Gr}_X(n-k, \mathscr{E}^*)$, $\mathrm{Gr}_X(1,\mathscr{E}) \cong \mathbb{P}_X(\mathscr{E})$, $\mathrm{Gr}_X(n-1,\mathscr{E}) \cong \mathbb{P}_X(\mathscr{E}^*)$.

Упражнение 8. *Проверьте, что $\mathrm{Gr}_X(k,\mathscr{E}) \subset \mathbb{P}_X(\bigwedge^k \mathscr{E})$ совпадает со схемой нулей естественного сечения расслоения $p^*(\bigwedge^{k-1}\mathscr{E} \otimes \bigwedge^{k+1}\mathscr{E}) \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\wedge^k\mathscr{E})/X}(2)$.*

Упражнение 9. *Докажите, что $\Omega_{\mathrm{Gr}_X(k,\mathscr{E})/X} \cong \mathscr{U} \otimes \mathscr{U}^\perp$ и постройте относительную последовательность Эйлера $0 \to \Omega_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X} \to p^*\mathscr{E}^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(-1) \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})} \to 0$.*

Упражнение 10. *Пусть $\mathscr{E}$ — расслоение ранга n на схеме X и дана последовательность чисел $0 < k_1 < k_2 < \dots < k_s < n$. Определите многообразие частичных флагов $\mathrm{Fl}_X(k_1, \dots, k_s; \mathscr{E})$, сформулируйте его универсальное свойство и докажите аналоги тех свойств относительного грассманиана, которые мы разбирали выше.*

Упражнение 11. *Проверьте, что (1) $\mathbb{P}_{\mathbb{P}(V)}(T_{\mathbb{P}(V)}) \cong \mathrm{Fl}(1,2;V)$ и $\mathbb{P}_{\mathbb{P}(V)}(\Omega_{\mathbb{P}(V)}) \cong \mathrm{Fl}(1,n-1;V)$, где $n = \dim V$; (2) $\mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(k,V)}(\mathscr{U}) \cong \mathrm{Fl}(1,k;V)$, $\mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(k,V)}(\mathscr{U}^\perp) \cong \mathrm{Fl}(k,n-1;V)$, $\mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(k,V)}(\mathscr{U}^*) \cong \mathrm{Fl}(k-1,k;V)$, $\mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(k,V)}(V/\mathscr{U}) \cong \mathrm{Fl}(k,k+1;V)$.*