Раздутие

1. Определение и простейшие примеры

Пусть X — алгебраическое многообразие, а $\mathscr{I}$ — пучок идеалов на нем, то есть когерентный подпучок в $\mathscr{O}_X$. Определим

$$\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X) := \mathrm{Proj}_X\left(\bigoplus_{k=0}^{\infty}\mathscr{I}^k\right),$$

где $\bigoplus_{k=0}^{\infty}\mathscr{I}^k$ — градуированный пучок коммутативных алгебр (относительно умножения индуцированного умножением в $\mathscr{O}_X$). Схема $\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X)$ вместе с естественным морфизмом

$$\pi\colon \mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X) \to X$$

называются **раздутием пучка идеалов** $\mathscr{I}$ **на** X, или **раздутием** X **с центром в** $\mathscr{I}$. Если $Z \subset X$ — подсхема, соответствующая идеалу $\mathscr{I}$, раздутие $\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X)$ также называется **раздутием подсхемы** Z и обозначается $\mathrm{Bl}_Z(X)$, а подсхема Z также называется **центром раздутия**.

Прежде чем рассмотреть примеры, заметим простое свойство.

Лемма 1.1. *Пусть $f\colon X' \to X$ — замена базы. Тогда*

$$\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X)\times_X X' \cong \mathrm{Proj}_{X'}\left(\bigoplus_{k=0}^{\infty} f^*(\mathscr{I}^k)\right).$$

В частности, если f — открытое вложение и $\mathscr{I}' = \mathscr{I}|_{X'}$, то $\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X)\times_X X' \cong \mathrm{Bl}_{\mathscr{I}'}(X')$.

Доказательство. Первая формула следует из согласованности взятия проективного спектра с заменой базы. Если f — открытое вложение, то $f^*(\mathscr{I}^k) \to f^*(\mathscr{O}_X) = \mathscr{O}_{X'}$ — вложение (для произвольного морфизма f это, кстати, не верно), то есть $f^*(\mathscr{I}^k)$ — идеал в $\mathscr{O}_{X'}$, и он как раз равен $\mathscr{I}'$. При этом морфизм $(f^*(\mathscr{I}))^{\otimes k} = f^*(\mathscr{I}^{\otimes k}) \to f^*(\mathscr{I}^k)$ сюръективен, поэтому $f^*(\mathscr{I}^k) \cong (f^*\mathscr{I})^k$. Таким образом, $\mathrm{Proj}_{X'}\left(\bigoplus_{k=0}^{\infty} f^*(\mathscr{I}^k)\right) = \mathrm{Proj}_{X'}\left(\bigoplus_{k=0}^{\infty} f^*(\mathscr{I})^k\right) = \mathrm{Bl}_{\mathscr{I}'}(X')$. □

Это свойство позволяет, в частности, описывать слои раздутия (беря в качестве X' точку на X). Теперь перейдем к примерам.

Пример 1.2. Пусть $\mathscr{I}$ — обратимый пучок идеалов. Тогда $\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X) \cong X$. Действительно, утверждение локально, поэтому пользуясь Леммой 1.1 можно считать, что $X = \mathrm{Spec}(A)$ и $\mathscr{I} = Af \subset A$ — главный идеал, причем f не является делитем нуля (иначе Af не изоморфен A как A-модуль). Тогда $\mathscr{I}^k \cong Af^k$, поэтому

$$\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X) = \mathrm{Proj}_X\left(\bigoplus_{k=0}^{\infty}\mathscr{I}^k\right) = \mathrm{Proj}\left(\bigoplus_{k=0}^{\infty}Af^k\right) \cong \mathrm{Proj}(A[t]) = \mathbb{P}^0_A \cong \mathrm{Spec}(A) = X.$$

Непосредственным следствием этого наблюдения является то, что морфизм раздутия является изоморфизмом вне центра раздутия, то есть морфизм $\pi\colon \mathrm{Bl}_Z(X) \to X$ индуцирует изоморфизм

$$\mathrm{Bl}_Z(X)\times_X (X\setminus Z) \cong X\setminus Z.$$

Вот еще один характерный пример.

Пример 1.3. Пусть $\mathscr{I} = 0$. Тогда $\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X) = \emptyset$. В самом деле, проективный спектр алгебры, сосредоточенной в градуировке 0, пуст по определению.

Раздутие разных идеалов может давать одно и то же многообразие.

Лемма 1.4. *Для всех $d \ge 1$ имеется канонический изоморфизм $\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}^d}(X) \cong \mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X)$.*

Доказательство. В самом деле, изофморфизм алгебр $\bigoplus_{k=0}^{\infty}(\mathscr{I}^d)^k \cong \bigoplus_{k=0}^{\infty}\mathscr{I}^{dk}$ показывает, что алгебра, проективным спектром которой является раздутие $\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}^d}(X)$ является d-кратной подалгеброй Веронезе в алгебре, определяющей раздутие $\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X)$. Поскольку проективный спектр не меняется при переходе к подалгебре Веронезе, получаем требуемый изоморфизм. $\square$

Следствие 1.5. *Пусть $\mathscr{I}$ — нильпотентный идеал, то есть $\mathscr{I}^d = 0$ для некотрого $d \ge 1$. Тогда $\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X) = \emptyset$.*

Упражнение 1. *Пусть $\mathscr{J}$ — обратимый идеал. Докажите, что $\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}\cdot\mathscr{J}}(X) \cong \mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X)$.*

Упражнение 2. *Пусть $X = X_1 \sqcup X_2$ — несвязное объединение двух замкнутых подмножеств. Чему равно раздутие $\mathrm{Bl}_{X_1}(X)$?*

2. Проективные вложения

Как и на всяком проективном спектре, на раздутии $\tilde{X} = \mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X)$ есть пучок $\mathscr{O}_{\tilde{X}/X}(1)$. Более того, если $\pi\colon \tilde{X} \to X$ — естественная проекция, то есть также естественная сюръекция $\pi^*\mathscr{I} \to \mathscr{O}_{\tilde{X}/X}(1)$ (индуцированная сюръективным морфизмом градуированных пучков модулей $\mathscr{I}\otimes(\oplus\mathscr{I}^k) \to \oplus\mathscr{I}^{k+1}$. Она позволяет строить (относительные) проективные вложения раздутия.

Лемма 2.1. *Пусть $\mathscr{E}$ — локально свободный пучок и дана сюръекция $\mathscr{E}^* \to \mathscr{I}$. Тогда существует вложение $i\colon \tilde{X} := \mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X) \to \mathbb{P}_X(\mathscr{E})$, так что $i^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(1) \cong \mathscr{O}_{\tilde{X}/X}(1)$.*

Доказательство. Рассмотрим композицию сюръекций $\pi^*\mathscr{E}^* \to \pi^*\mathscr{I} \to \mathscr{O}_{\tilde{X}/X}(1)$ и двойственный к ней морфизм $\mathscr{O}_{\tilde{X}/X}(-1) \to \pi^*\mathscr{E}$. Он является вложением расслоений, поэтому вместе с проекцией $\pi\colon \tilde{X} \to X$ он задает морфизм $i\colon \tilde{X} \to \mathbb{P}_X(\mathscr{E})$ (в силу универсального свойства проективизации), причем так, что $i^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(-1) \cong \mathscr{O}_{\tilde{X}/X}(-1)$. $\square$

Компонируя построенное вложение $\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X) \to \mathbb{P}_X(\mathscr{E})$ с проективными вложениями $\mathbb{P}_X(\mathscr{E})$, можно получать проективные вложения раздутия. Однако, в отличие от проективизации, в общем случае сложно написать уравнения, задающие раздутие внутри $\mathbb{P}_X(\mathscr{E})$. Хотя описать “линейную часть” уравнений не сложно.

Лемма 2.2. *Пусть дана точная справа тройка*

$$\mathscr{F}^* \xrightarrow{\varphi} \mathscr{E}^* \to \mathscr{I} \to 0,$$

где $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F}$ локально свободны, и $i\colon \mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X) \to \mathbb{P}_X(\mathscr{E})$ индуцированное вложение. Тогда $\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X) \subset Z_s$, где s — сечение расслоения $p^*\mathscr{F} \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(1)$ на $\mathbb{P}_X(\mathscr{E})$, индуцированное морфизмом φ.

Доказательство. Напомним, что

$$\Gamma(\mathbb{P}_X(\mathscr{E}), \mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(1) \otimes p^*\mathscr{F}) \cong \Gamma(X, p_*(\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(1) \otimes p^*\mathscr{F})) \cong \Gamma(X, \mathscr{E}^* \otimes \mathscr{F}) \cong \mathrm{Hom}(\mathscr{F}^*, \mathscr{E}^*),$$

тем самым морфизму φ сопоставляется сечение s. Для проверки вложения $\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X) \subset Z_s$ остается проверить, что ограничение s на $\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X)$ зануляется. Для этого заметим, что сечение s соответствует композиции $p^*\mathscr{F}^* \xrightarrow{p^*\varphi} p^*\mathscr{E}^* \twoheadrightarrow \mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(1)$, причем вторая стрелка (тавтологическая сюръекция) по определению вложения i при ограничении на $\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X)$ раскладывается в композицию

$$i^*p^*\mathscr{E}^* = \pi^*\mathscr{E}^* \to \pi^*\mathscr{I} \to \mathscr{O}_{\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X)/X}(1) = i^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E})/X}(1).$$

Ввиду исходной точной тройки, композиция $i^*p^*\mathscr{F}^* \xrightarrow{i^*p^*\varphi} i^*p^*\mathscr{E}^* \to i^*p^*\mathscr{I} = \pi^*\mathscr{I}$ равна нулю, значит и ограничение сечения s зануляется. $\square$

В некоторых случаях, вложение $\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X) \to Z_s$ является изоморфизмом.

Пример 2.3. Пусть $X = \mathrm{Spec}(\mathsf{k}[x,y]) \cong \mathbb{A}^2$, а $I = (x,y)$ — идеал точки $P = (0,0)$. Имеем точную последовательность

$$0 \to \mathsf{k}[x,y] \xrightarrow{(y,-x)^T} \mathsf{k}[x,y] \oplus \mathsf{k}[x,y] \xrightarrow{(x,y)} I \to 0.$$

Тем самым, получаем вложение $\tilde{X} = \mathrm{Bl}_P(X) \hookrightarrow \mathbb{P}_X(\mathscr{O}_X \oplus \mathscr{O}_X) = \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$, а если выбрать на $\mathbb{P}^1$ однородные координаты $(u:v)$, то сечение s имеет вид $s = uy - vx$. Тем самым, Z_s задается внутри $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$ уравнением $uy = vx$. В данном случае легко проверить, что ядро сюръективного гомоморфизма градуированных алгебр $\mathsf{k}[x,y][u,v] \to \oplus I^k$ ($\deg u = \deg v = 1$ и переменные u и v переходят в $x, y \in I$) порождается элементом $uy - vx$, поэтому $\mathrm{Bl}_P(\mathbb{A}^2) = Z_s = \{uy = vx\} \subset \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$.

Точную тройку как в лемме 2.2 можно написать для любого идеала $\mathscr{I}$ (по крайней мере, для квазипроективных X), это всего лишь начало локально свободной резольвенты пучка $\mathscr{I}$. Однако, вложение $\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X) \to Z_s$, построенное в лемме, далеко не всегда является изоморфизмом, причем "препятствие" совершенно не зависит от выбора резольвенты.

Пример 2.4. Пусть $X = \mathrm{Spec}(A)$, где $A = \mathsf{k}[x,y]/xy$ ("координатный крест"), а $I = (x,y) \subset A$. Тогда простейшая резольвента идеала выглядит так:

$$A \oplus A \xrightarrow{\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}} A \oplus A \xrightarrow{(x,y)} I \to 0.$$

Тем самым, получаем вложение $\tilde{X} = \mathrm{Bl}_I(X) \hookrightarrow \mathbb{P}_X(\mathscr{O}_X \oplus \mathscr{O}_X) = X \times \mathbb{P}^1$, а если выбрать на $\mathbb{P}^1$ однородные координаты $(u:v)$, то сечение s имеет вид $s = (uy, vx)$. Тем самым, Z_s задается внутри $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$ уравнениями $xy = uy = vx = 0$ и является, тем самым, объединением трех прямых — двух "горизонтальных" аффинных прямых $x = u = 0$ и $y = v = 0$, и одной "вертикальной" проективной прямой $x = y = 0$.

Чтобы понять, как это связано с раздутием, рассмотрим сюръективный гомоморфизм градуированных алгебр $\mathsf{k}[x,y][u,v] \to A[u,v] \to \oplus I^k$ ($\deg u = \deg v = 1$ и переменные u и v переходят в $x, y \in I$). Легко видеть, что в ядре этого гомоморфизма, помимо xy, uy, vx, также лежит uv. Более того, несложно проверить, что ядро гомоморфизма порождается этими четырьмя элементами. Поэтому $\tilde{X} \subset \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$ задается четырьмя уравнениями $xy = uy = vx = uv = 0$. Отсюда видно, что $\tilde{X}$ является объединением только двух "горизонтальных" прямых из Z_s, а от "вертикальной" прямой остаются лишь две точки (ее точки пересечения с "горизонтальными" прямыми).

Разобранный нами пример достаточно показателен. Чтобы вложение $\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X) \hookrightarrow Z_s$ было изоморфизмом необходимо, чтобы все слои морфизма раздутия $\pi\colon \mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X) \to X$ были проективными пространствами (причем так, чтобы пучок $\mathscr{O}_{\mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X)/X}(1)$ ограничивался на них как $\mathscr{O}(1)$).

Пример 2.5. Пусть $X = \mathrm{Spec}(\mathsf{k}[x,y]) \cong \mathbb{A}^2$, а $I = (x^2, xy, y^2)$ — квадрат идеала точки $P = (0,0)$. Имеем точную последовательность

$$0 \to \mathsf{k}[x,y] \oplus \mathsf{k}[x,y] \xrightarrow{\begin{pmatrix} y & 0 \\ -x & y \\ 0 & -x \end{pmatrix}} \mathsf{k}[x,y] \oplus \mathsf{k}[x,y] \oplus \mathsf{k}[x,y] \xrightarrow{(x^2, xy, y^2)} I \to 0.$$

Тем самым, получаем вложение $\tilde{X} = \mathrm{Bl}_I(X) \hookrightarrow \mathbb{P}_X(\mathscr{O}_X \oplus \mathscr{O}_X \oplus \mathscr{O}_X) = \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^2$, а если выбрать на $\mathbb{P}^2$ однородные координаты $(u:v:w)$, то сечение s имеет вид $s = (uy - vx, vy - wx)$. Тем самым, Z_s задается внутри $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^2$ уравнениями $uy - vx = vy - wx = 0$. В частности, слой Z_s над точкой P равен $\mathbb{P}^2$ (при $x = y = 0$ сечение s тождественно равно нулю). Однако, в силу Леммы 1.4, мы знаем, что слой должен быть таким же как и в Примере 2.3, то есть изомофен $\mathbb{P}^1$. Проблема, как обычно, в дополнительном соотношении $uw = v^2$ в алгебре $A[u,v,w]$.

Пример 2.6. Пусть $X = \mathrm{Spec}(A)$, где $A = \mathsf{k}[x,y]/(xy, y^2)$, то есть прямая с вложенной точкой, а $I = (x,y)$ — идеал этой точки. Имеем резольвенту

$$A \oplus A \oplus A \xrightarrow{\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & x & y \end{pmatrix}} A \oplus A \xrightarrow{(x,y)} I \to 0.$$

Поэтому $\mathrm{Bl}_I(X) \subset Z_s = \{uy = vx = vy = 0\} \subset X \times \mathbb{P}^1$. Многообразие Z_s является объединением "горизонтальной" прямой $v = y = 0$ и "вертикальной" прямой $x = y = 0$, а в раздутии появляются дополнительные соотношения $uv = v^2 = 0$, в результате чего остается только "горизонтальная прямая". Тем самым $\mathrm{Bl}_I(X) \cong \mathbb{A}^1$ — раздутие вложенной точки "уничтожает" ее.

3. Универсальное свойство

Пусть $\mathscr{I} \subset \mathscr{O}_X$ — пучок идеалов, а $Z \subset X$ — соответствующая подсхема. Рассмотрим естественное вложение $\alpha\colon \mathscr{I} \to \mathscr{O}_X$ и его обратный образ на $\tilde{X} = \mathrm{Bl}_{\mathscr{I}}(X) = \mathrm{Bl}_Z(X)$. В терминах градуированных модулей над пучком градуированных алгебр $\oplus\mathscr{I}^k$, он соответсвует морфизму

$$\oplus(\mathscr{I} \otimes \mathscr{I}^k) \xrightarrow{\alpha\otimes\mathrm{id}} \oplus(\mathscr{O}_X \otimes \mathscr{I}^k) = \oplus\mathscr{I}^k.$$

Этот морфизм очевидно раскладывается в композицию

$$\oplus(\mathscr{I} \otimes \mathscr{I}^k) \twoheadrightarrow \oplus\mathscr{I}^{k+1} \hookrightarrow \oplus\mathscr{I}^k,$$

где первая стрелка индуцирована умножением, а вторая — естественное вложение. Это означает, что имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \pi^*\mathscr{I} \arrow[rr, "\pi^*(\alpha)"] \arrow[dr] & & \mathscr{O}_{\tilde{X}} \\ & \mathscr{O}_{\tilde{X}/X}(1) \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

В частности, пучок $\mathscr{O}_{\tilde{X}/X}(1)$ является обратимым пучком идеалов в $\mathscr{O}_{\tilde{X}}$. Соответствующая ему подсхема в $\tilde{X}$ определяется градуированной факторалгеброй $\oplus(\mathscr{I}^k/\mathscr{I}^{k+1}) \cong \oplus(\mathscr{I}^k \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Z)$, и следовательно (в силу Леммы 1.1) изоморфна расслоенному произведению $\mathrm{Bl}_Z(X) \times_X Z$. Эта подсхема

$$E := \mathrm{Bl}_Z(X) \times_X Z = \pi^{-1}(Z) \subset \mathrm{Bl}_Z(X)$$

(где $\pi^{-1}(Z)$ — схемный прообраз Z) называется исключительным дивизором раздутия. Часто рассматривают следующую "диаграмму раздутия"

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p"'] & \mathrm{Bl}_Z(X) \arrow[d, "\pi"] & \mathrm{Bl}_Z(X) \setminus E \arrow[l] \arrow[d, equal] \\ Z \arrow[r, "j"] & X & X \setminus Z \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Диаграмма коммутативна, морфизмы i и j — замкнутые вложения, а горизонтальные стрелки в правой части — открытые вложения.

Предложение 3.1. *Исключительный дивизор E раздутия является дивизором Картье, а его пучок идеалов изоморфен скручивающему пучку $\mathscr{O}_{\mathrm{Bl}_Z(X)}(-E) \cong \mathscr{O}_{\mathrm{Bl}_Z(X)/X}(1)$. Сам исключительный дивизор изоморфен проективному спектру*

$$E \cong \mathrm{Proj}_Z\left(\bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathscr{I}^k/\mathscr{I}^{k+1}\right),$$

причем так, что $\mathscr{O}_E(-E) \cong \mathscr{O}_{E/Z}(1)$.

Доказательство. Напомним, что дивизор Картье — подмногообразие, которое в любой достаточно маленькой локальной карте $\mathrm{Spec}(A)$ задается одним уравнением $\varphi = 0$, причем $\varphi \in A$ не является делителем нуля. Это равносильно тому, что морфизм $A \xrightarrow{\varphi} A$ является вложением, а его образ изоморфен идеалу дивизора. Иначе говоря, подсхема является дивизором Картье, если ее пучок идеалов обратим. Ровно это выполнено для исключительного дивизора E — по построению его идеал изоморфен $\mathscr{O}_{\mathrm{Bl}_Z(X)/X}(1)$, и в частности является обратимым пучком.

Описание самого исключительного дивизора было установлено выше, а связь между линейными расслоениями на нем очевидна. □

Тем самым, про раздутие можно думать как про процесс превращения подсхемы в дивизор Картье. Так, в Примерах 2.3 и 2.5 точка на плоскости превращается в прямую, а в Примерах 2.4 и 2.6 особая точка кривой (она не является дивизором Картье — обратите внимание, что ее идеал порождается двумя элементами, а не одним) превращается в две или одну неособые точки. Это дает свойство, которое часто называется универсальным свойством раздутия.

Предложение 3.2. *Пусть $\phi\colon S \to X$ морфизм, такой что схемный прообраз $\phi^{-1}(Z)$ подсхемы $Z \subset X$ является дивизором Картье. Тогда морфизм ϕ единственным образом поднимается до морфизма $\tilde{\phi}\colon S \to \mathrm{Bl}_Z(X)$, такого что $\pi \circ \tilde{\phi} = \phi$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{I}$ — идеал подсхемы Z. По условию морфизм $\phi^*\mathscr{I} \xrightarrow{\phi^*(\alpha)} \phi^*\mathscr{O}$ раскладывается в композицию

$$\phi^*(\mathscr{I}) \twoheadrightarrow \mathscr{O}_S(-D) \hookrightarrow \mathscr{O}_S = \phi^*\mathscr{O}_X,$$

где $D = \phi^{-1}(Z) \subset S$ — дивизор Картье. Очевидно композиция

$$\phi^*(\mathscr{I})^{\otimes k} \twoheadrightarrow \mathscr{O}_S(-D)^{\otimes k} = \mathscr{O}_X(-kD) \hookrightarrow \mathscr{O}_S = \phi^*\mathscr{O}_X$$

может быть переписана, как композиция

$$\phi^*(\mathscr{I})^{\otimes k} = \phi^*(\mathscr{I}^{\otimes k}) \twoheadrightarrow \phi^*(\mathscr{I}^k) \to \phi^*\mathscr{O}_X.$$

следовательно, морфизм $\phi^*(\mathscr{I})^{\otimes k} \twoheadrightarrow \mathscr{O}_X(-kD)$ может быть разложен в композицию сюръекций $\phi^*(\mathscr{I})^{\otimes k} \twoheadrightarrow \phi^*(\mathscr{I}^k) \twoheadrightarrow \mathscr{O}_X(-kD)$ (причем единственным образом). Легко видеть, что построенные при разных k сюръекции $\phi^*(\mathscr{I}^k) \to \mathscr{O}_S(-kD)$ согласованы с умножением, следовательно задают сюръективный гомоморфизм градуированных алгебр

$$\bigoplus_{k=0}^{\infty} \phi^*(\mathscr{I}^k) \twoheadrightarrow \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathscr{O}_S(-kD),$$

и следовательно замкнутое вложение проективных спектров

$$S \cong \mathbb{P}_S(\mathscr{O}_S(D)) = \mathrm{Proj}_S\left(\bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathscr{O}_S(-kD)\right) \hookrightarrow \mathrm{Proj}_S\left(\bigoplus_{k=0}^{\infty} \phi^*(\mathscr{I}^k)\right) = S \times_X \mathrm{Bl}_Z(X).$$

Проекция из расслоенного произведения задает морфизм $\tilde{\phi}\colon S \to \mathrm{Bl}_Z(X)$, такой что $\pi \circ \tilde{\phi} = \phi$. Легко видеть, что он единственен (для этого достаточно провернуть ту же конструкцию в обратной последовательности). □

Доказанное предложение является очень полезным для построения морфизмов в раздутие, однако оно не является по настоящему универсальным свойством, так как описывает не все морфизмы в $\mathrm{Bl}_Z(X)$, а только часть из них. В самом деле, любой морфизм $S \to \mathrm{Bl}_Z(X)$, образ которого содержится в исключительном дивизоре, не может быть получен таким образом, так как его композиция с проекцией $\pi\colon \mathrm{Bl}_Z(X) \to X$ переводит S в Z, а значит прообразом Z является все S, что не является дивизором Картье.

Рассмотрим несколько примеров использования “универсального” свойства раздутия.

Упражнение 3. *Пусть* $\phi\colon X' \to X$ — *морфизм, а* $Z \subset X$ — *замкнутая подсхема. Рассмотрим схемный прообраз* $Z' = \phi^{-1}(Z) \subset X'$. *Покажите, что морфизм* ϕ *однозначно поднимается до морфизма* $\tilde{\phi}\colon \mathrm{Bl}_{Z'}(X') \to \mathrm{Bl}_Z(X)$. *А что происходит, если* $X' = Z$*?*

Пример 3.3. Пусть $X = \mathrm{Spec}(\mathsf{k}[x, y, z]/(xz - y^2))$ — двумерный квадратичный конус, а I — идеал прямой $Z = \{x = y = 0\}$ на нем. Тогда имеем резольвенту

$$A \oplus A \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} y & z \\ -x & -y \end{smallmatrix}\right)} A \oplus A \xrightarrow{(x,y)} I \to 0,$$

откуда $Z_s \subset X \times \mathbb{P}^1$ задается уравнениями $uy - vx = 0$ и $uz - vy = 0$. Рассмотрим нули этих уравнений в $X \times \mathbb{P}^1$. Для этого покроем $X \times \mathbb{P}^1$ двумя картами $\{u = 1\}$ и $\{v = 1\}$.

Карта $\{u = 1\}$ изоморфна $\mathbb{A}^2$ с координатами v и x, а остальные функции выражаются через них $y = vx$, $z = v^2x$. В частности, прообраз Z в этой карте задается одним уравнением $x = 0$. Аналогично, карта $\{v = 1\}$ изоморфна $\mathbb{A}^2$ с координатами u и z, а $y = uz$, $x = u^2z$. В частности, прообраз Z в этой карте задается одним уравнением $uz = 0$. Тем самым прообраз Z в Z_s является дивизором Картье, следовательно по универсальному свойству, существует морфизм $Z_s \to \mathrm{Bl}_Z(X)$. Легко видеть, что его композиция с построенным выше вложением $\mathrm{Bl}_Z(X) \hookrightarrow X \times \mathbb{P}^1$ совпадает с вложением Z_s. Значит $Z_s \subset \mathrm{Bl}_Z(X) \subset X \times \mathbb{P}^1$. Вместе с вложением Леммы 2.2, это доказывает изоморфизм $\mathrm{Bl}_Z(X) \cong Z_s$.

Упражнение 4. *Проверьте, что раздутие из Примера* 3.3 *изоморфно аффинизации* $\mathbb{A}_{\mathbb{P}^1}(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(-2))$.

Упражнение 5. *Опишите раздутие конуса* $\mathrm{Spec}(\mathsf{k}[x, y, z]/(xz - y^2))$ *в вершине.*