Локально полные пересечения

1. Регулярные последовательности и сечения

Как мы видели на прошлой лекции, раздутие, вообще говоря, может выглядеть довольно сложно. Есть однако, довольно широкий класс подсхем, раздутия которых устроены просто.

Определение 1.1. Подсхема $Z \subset X$ называется **локально полным пересечением**, если для любой точки $z \in Z$ существует ее окрестность $U \subset X$ и *регулярная в точке z последовательность* функций $s_1, \dots, s_k$ в $\Gamma(U, \mathscr{O}_U)$, такая что

$$Z \cap U = Z_{s_1,\dots,s_k} = \{s_1 = \dots = s_k = 0\} \subset U.$$

Последовательность функций называется **регулярной в** z, если для всех i функция s_{i+1} не является делителем нуля в кольце $\mathscr{O}_{U,z}/(s_1, \dots, s_i)$, и просто **регулярной**, если она регулярна во всех точках схемы $Z_{s_1,\dots,s_k}$. Иначе говоря, если $Z_{s_1,\dots,s_i,s_{i+1}} \subset Z_{s_1,\dots,s_i}$ — дивизор Картье в окрестности $Z_{s_1,\dots,s_k}$.

Замечание 1.2. Важное (хотя и тавтологическое) замечание состоит в том, что если схема нулей $Z_{s_1,\dots,s_k}$ пуста, то последовательность $s_1, \dots, s_k$ по определению регулярна.

Как мы увидим чуть ниже, длина регулярной последовательности задающей непустую подсхему $Z \subset X$, не зависит от ее выбора (так как она равна рангу нормального расслоения к подсхеме Z, Предложение 3.1), а если подсхема Z связна, то и от точки z. Она называется **коразмерностью локально полного пересечения** (и в случае, когда схемы равноразмерностные, равна коразмерности в обычном смысле слова).

Следующая переформулировка понятия регулярной последовательности очень удобна. Пусть $\mathscr{E}$ — векторное расслоение ранга k, а $s \in \Gamma(X, \mathscr{E}^*)$ — сечение двойственного расслоения. В окрестности всякой точки $z \in X$ расслоение можно тривиализовать. Тогда сечение будет локально задаваться последовательностью функций длины k.

Определение 1.3. Сечение $s \in \Gamma(X, \mathscr{E}^*)$ векторного расслоения **регулярно** (в точке z), если соответствующая ему последовательность функций регулярна (в этой точке).

Заметим, что разные выборы тривиализации расслоения представляют его сечение в виде разных последовательностей функций и априори не ясно, почему регулрность одной из них равносильна регулярности другой (то есть неясно, корректно ли данное определение). Мы скоро, однако, проверим (Следствие 2.3), что все тут хорошо. Пока же отметим очевидное следствие.

Следствие 1.4. *Подсхема является локально полным пересечением коразмерности k тогда и только тогда, когда локально она представляется как схема нулей регулярного сечения векторного расслоения ранга k.*

Вот очень полезное утверждение, которое мы не будем доказывать (но будем им пользоваться!).

Теорема 1.5. *Сечение расслоения $\mathscr{E}^*$ ранга k на* гладком *многообразии X регулярно, тогда и только тогда, когда* $\operatorname{codim}(Z_s) = k$.

На самом деле, гладкость здесь не нужна, а нужно более слабое свойство X, которое называется Коэн–Маколеевость. Это свойство, в частности, наследуется схемой нулей регулярного сечения — если X Коэн–Маколеево, а s — регулярное сечение, то Z_s тоже Коэн–Маколеево (хотя запросто может быть особым, даже если X гладко).

2. Комплексы Кошуля

Определение 2.1. Пусть $\{s_1, \dots, s_k\}$ — последовательность функций на X. Для каждого i рассмотрим двучленный комплекс $\mathrm{K}(s_i) := \{\mathscr{O}_X \xrightarrow{s_i} \mathscr{O}_X\}$. Тензорное произведение всех таких комплексов

$$\mathrm{K}(s_1, \dots, s_k) := \bigotimes_{i=1}^{k} \mathrm{K}(s_i)$$

называется **комплексом Кошуля** последовательности $s_1, \dots, s_k$.

Компонента комплекса Кошуля в (когомологической) градуировке $-p$ — свободный модуль ранга $\binom{k}{p}$, а дифференциал $d^{-p}\colon \mathrm{K}(s_1, \dots, s_k)^{-p} \to \mathrm{K}(s_1, \dots, s_k)^{1-p}$ может быть записан следующим образом

$$d^{-p}(a)_{i_1,\dots,i_{p-1}} = \sum_{t=0}^{p-1} (-1)^t \sum_{i_t < i < i_{t+1}} a_{i_1,\dots,i_{t-1},i,i_{t+1},\dots,i_{p-1}} s_i.$$

Ниже выписаны комплексы Кошуля для $k = 2$ и $k = 3$.

$$\mathrm{K}(s_1, s_2) = \left\{ \mathscr{O}_X \xrightarrow{\begin{pmatrix} -s_2 \\ s_1 \end{pmatrix}} \mathscr{O}_X \oplus \mathscr{O}_X \xrightarrow{\begin{pmatrix} s_1 & s_2 \end{pmatrix}} \mathscr{O}_X \right\},$$

$$\mathrm{K}(s_1, s_2, s_3) = \left\{ \mathscr{O}_X \xrightarrow{\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}} \mathscr{O}_X \oplus \mathscr{O}_X \oplus \mathscr{O}_X \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & -s_3 & -s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ s_2 & s_1 & 0 \end{pmatrix}} \mathscr{O}_X \oplus \mathscr{O}_X \oplus \mathscr{O}_X \xrightarrow{\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \end{pmatrix}} \mathscr{O}_X \right\},$$

Упражнение 1. *Пусть s лежит в идеале $(s_1, \dots, s_k)$, порожденном функциями $s_1, \dots, s_k$. Проверьте, что морфизм комплексов $s\colon \mathrm{K}(s_1, \dots, s_k) \to \mathrm{K}(s_1, \dots, s_k)$, заданный умножением на s, гомотопен нулю. Выведите отсюда, что все когомологии комплекса $\mathrm{K}(s_1, \dots, s_n)$ сосредоточены на схеме $Z(s_1, \dots, s_k)$.*

Лемма 2.2. *Когомология комплекса Кошуля $\mathrm{K}(s_1, \dots, s_k)$ в крайнем правом члене равна*

$$\mathscr{H}^0(\mathrm{K}(s_1, \dots, s_k)) \cong \mathscr{O}_{Z(s_1,\dots,s_k)} = \mathscr{O}_X/(s_1, \dots, s_k).$$

Более того, следующие свойства эквивалентны:

- *(i) последовательность $s_1, \dots, s_k$ регулярна в точке $z \in X$;*
- *(ii) в окрестности точки z комплекс Кошуля $\mathrm{K}(s_1, \dots, s_k)$ точен везде, кроме степени 0;*
- *(iii) в окрестности точки z комплекс Кошуля $\mathrm{K}(s_1, \dots, s_k)$ точен в степени -1.*

Заметим, что вне $Z(s_1, \dots, s_k)$ комплекс Кошуля ацикличен в силу Упражнения 1.

Доказательство. Первое утверждение очевилно, так как $\mathrm{Im}(d^{-1})$ — идеал, порожденный $s_1, \dots, s_k$. Докажем второе утверждение индукцией по k. При $k = 0$ доказывать нечего. Допустим $k \geq 1$ и утверждение при $k - 1$ доказано.

Докажем импликацию $(i) \Rightarrow (ii)$. По определению $\mathrm{K}(s_1, \dots, s_k) = \mathrm{K}(s_1, \dots, s_{k-1}) \otimes \mathrm{K}(s_k)$, то есть $\mathrm{K}(s_1, \dots, s_k)$ является сверткой бикомплекса

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots \xrightarrow{d^{-3}} & \mathrm{K}(s_1, \dots, s_{k-1})^{-2} & \xrightarrow{d^{-2}} & \mathrm{K}(s_1, \dots, s_{k-1})^{-1} & \xrightarrow{d^{-1}} & \mathrm{K}(s_1, \dots, s_{k-1})^{0} \\
& \uparrow{\scriptstyle s_k} & & \uparrow{\scriptstyle s_k} & & \uparrow{\scriptstyle s_k} \\
\dots \xrightarrow{d^{-3}} & \mathrm{K}(s_1, \dots, s_{k-1})^{-2} & \xrightarrow{d^{-2}} & \mathrm{K}(s_1, \dots, s_{k-1})^{-1} & \xrightarrow{d^{-1}} & \mathrm{K}(s_1, \dots, s_{k-1})^{0}
\end{array}$$

Если последовательность $s_1, \dots, s_k$ регулярна, то $s_1, \dots, s_{k-1}$ тоже регулярна в z, а значит когомологии горизонтальных дифференциалов по предположению индукции есть только в правом столбце и равны $\mathscr{O}_{Z_{s_1,\dots,s_{k-1}}}$, а вертикальный дифференциал задает отображение

$$\mathscr{O}_{Z_{s_1,\dots,s_{k-1}}} \xrightarrow{s_k} \mathscr{O}_{Z_{s_1,\dots,s_{k-1}}}.$$

Но s_k не является в $\mathscr{O}_{Z_{s_1,\dots,s_{k-1}}}$ делителем нуля, значит этот морфизм инъективен. Следовательно, у $\mathrm{K}(s_1, \dots, s_k)$ нет когомологий нигде, кроме крайне правого члена.

Импликация $(ii) \Rightarrow (iii)$ очевидна.

Докажем теперь импликацию $(iii) \Rightarrow (i)$. Предположим, что у $\mathrm{K}(s_1, \dots, s_k)$ нет когомологий в степени -1. Рассматривая в бикомплексе вначале горизонтальный дифференциал, получаем длинную точную последовательность

$$\begin{aligned} \dots \to \mathscr{H}^{-1}(\mathrm{K}(s_1, \dots, s_{k-1})) \xrightarrow{s_k} \mathscr{H}^{-1}(\mathrm{K}(s_1, \dots, s_{k-1})) \to \mathscr{H}^{-1}(\mathrm{K}(s_1, \dots, s_k)) \to \\ \to \mathscr{O}_{Z_{s_1,\dots,s_{k-1}}} \xrightarrow{s_k} \mathscr{O}_{Z_{s_1,\dots,s_{k-1}}} \to \mathscr{O}_{Z_{s_1,\dots,s_{k-1},s_k}} \to 0, \end{aligned}$$

Отсюда следует, что морфизм s_k в первой строке является эпиморфизмом. Но если умножение на функцию является эпиморфизмом конечно порожденного модуля, то носитель модуля не пересекается со схемой нулей функции. Значит в окрестности точки z комплекс $\mathrm{K}(s_1, \dots, s_{k-1})$ не имеет когомологий в степени -1, и следовательно последовательность $s_1, \dots, s_{k-1}$ регулярна в z. Остается заметить, что из точности второй строки следует что s_k не является делителем нуля в $\mathscr{O}_{Z_{s_1,\dots,s_{k-1}}}$, а значит последовательность $s_1, \dots, s_k$ тоже регулярна. □

Для глобальных конструкций удобно иметь глобальную версию комплекса Кошуля.

Пусть $\mathscr{E}$ — векторное расслоение ранга k, а $s \in \Gamma(X, \mathscr{E}^*)$ — сечение двойственного. Соответсвующий комплекс Кошуля определяется как

$$\mathrm{K}(s) := \{0 \to \textstyle\bigwedge^k \mathscr{E} \xrightarrow{s} \bigwedge^{k-1} \mathscr{E} \xrightarrow{s} \dots \xrightarrow{s} \bigwedge^2 \mathscr{E} \xrightarrow{s} \mathscr{E} \xrightarrow{s} \mathscr{O}_X\},$$

где отображения определяются как свертка с s. Иначе говоря, они определяются коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd} \bigwedge^p \mathscr{E} \arrow[r, "s"] \arrow[d] & \bigwedge^{p-1} \mathscr{E} \arrow[d] \\ \mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \otimes \dots \otimes \mathscr{E} \arrow[r, "s \otimes \mathrm{id} \otimes \dots \otimes \mathrm{id}"] & \mathscr{E} \otimes \dots \otimes \mathscr{E} \end{tikzcd}$$

в которой вертикальные стрелки естественные вложения (легко видеть, что нижняя стрелка сохраняет кососимметричность и, следовательно, индуцирует верхнюю стрелку).

Упражнение 2. *Пусть $\mathscr{E}$ тривиально, $\varphi\colon \mathscr{E} \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_X^{\oplus k}$ тривиализация, и $\varphi^*(s_1, \dots, s_k) = s$. Проверьте, что изоморфизмы $\wedge^p\varphi\colon \bigwedge^p \mathscr{E} \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_X^{\oplus\binom{k}{p}}$ задают ихоморфизм комплексов $\mathrm{K}(s) \cong \mathrm{K}(s_1, \dots, s_k)$.*

Следствие 2.3. *Сечение s расслоения $\mathscr{E}^*$ регулярно тогда и только тогда, когда соответствующий комплекс Кошуля $\mathrm{K}(s)$ ацикличен везде, кроме правого члена. В частности, регулярность сечения не зависит от выбора тривиализации расслоения.*

Пример 2.4. Пусть $X = \mathbb{P}(V)$, $\mathscr{E}^* = V \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$ и сечение s соответствует тождественному морфизму id_V. Тогда $Z_s = \emptyset$, значит s регулярно и комплекс Кошуля

$$0 \to \textstyle\bigwedge^n V^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(-n) \to \dots \to \bigwedge^2 V^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(-2) \to V^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1) \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)} \to 0$$

(где $n = \dim V$) точен во всех степенях.

3. Нормальное расслоение

Напомним, что конормальный пучок к подсхеме $Z \subset X$, соответствующей пучку идеалов $\mathscr{I}$ определяется как $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ (заметим, что он является модулем над пучком колец $\mathscr{O}_X/\mathscr{I} \cong \mathscr{O}_Z$, поэтому его следует рассматривать как когерентный пучок на Z). В свою очередь нормальный пучок определяется как двойственный к конормальному

$$\mathscr{N}_{Z/X} \cong \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_Z}(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2, \mathscr{O}_Z).$$

Вообще говоря, конормальный и нормальный пучки к подсхеме могут быть устроены довольно сложно, но для подсхем, являющихся локально полными пересечениями они устроены просто.

Предложение 3.1. *Если $Z \subset X$ — локально полное пересечение коразмерности k, то конормальный $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ и нормальный $\mathscr{N}_{Z/X}$ пучки являются локально свободными пучками ранга k. Более того, если $Z = Z_s$, где s — регулярное сечение векторного расслоения $\mathscr{E}^*$, то*

$$\mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \cong \mathscr{E}|_Z, \qquad \mathscr{N}_{Z/X} \cong \mathscr{E}^*|_Z.$$

Обратно, если конормальный пучок $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ локально свободен ранга k, то $Z \subset X$ — локально полное пересечение.

Доказательство. Первое утверждение локально, поэтому (в силу Следствия 1.4) достаточно доказать второе. Более того, в силу определения нормального пучка, достаточно построить необходимый изоморфизм для конормального пучка. Для этого рассмотрим тензорное произведение пучка $\mathscr{I}$ с точной тройкой $0 \to \mathscr{I} \to \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_Z \to 0$:

$$\mathscr{I} \otimes \mathscr{I} \to \mathscr{I} \to \mathscr{I} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Z \to 0.$$

Первое отображение индуцировано умножением функций, поэтому его образ равен $\mathscr{I}^2$, значит

$$\mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \cong \mathscr{I} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Z.$$

Теперь раззмотрим комплекс Кошуля как резольвенту пучка $\mathscr{I}$

$$\cdots \to \textstyle\bigwedge^2 \mathscr{E} \xrightarrow{s} \mathscr{E} \to \mathscr{I} \to 0.$$

Тензорно умножая ее на $\mathscr{O}_Z$, получаем точную последовательность

$$\textstyle\bigwedge^2 \mathscr{E}|_Z \xrightarrow{s|_Z} \mathscr{E}|_Z \to \mathscr{I} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Z \to 0.$$

Поскольку Z — схема нулей s, то $s|_Z = 0$, то есть первое отображение нулевое, и значит второе отображение — изоморфизм. Тем самым $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \cong \mathscr{I} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Z \cong \mathscr{E}|_Z$, что и требовалось.

Предположим теперь, что $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ — локально свободен ранга k и докажем, что Z — локально полное пересечение. Рассмотрим вначале случай $k = 1$. Выберем точку $z \in Z$ и образующую пучка $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ в окрестности точки z, поднимем ее (переходя к еще более маленькой окрестности) до сечения пучка $\mathscr{I}$ и рассмотрим полученный морфизм $\mathscr{O}_X \xrightarrow{f} \mathscr{I}$. По лемме Накаямы морфизм f сюръективен в еще более маленькой окрестности точки z. Кроме того, по построению, у нас есть коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd} \mathscr{O}_X \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[d, two heads] & \mathscr{I} \arrow[d, two heads] \\ \mathscr{O}_Z \arrow[r, "\cong"] & \mathscr{I}/\mathscr{I}^2, \end{tikzcd}$$

в котором вертикальные стрелки — ограничение на Z. Отсюда следует, что носитель ядра морфизма f не пересекается с Z. Значит, переходя к еще более маленькой окрестности, можно считать, что f — изоморфизм. Но это значит, что $\mathscr{I}$ — обратимый идеал в окрестности точки z и тем самым доказывает утверждение для случая $k = 1$.

Вернемся теперь к общему случаю. Пусть $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ — локально свободен ранга k. В окрестности точки $z \in Z$ можно выбрать вложение расслоений $\mathscr{O}_Z \hookrightarrow \mathscr{I}/\mathscr{I}^2$ (так что фактор локально свободен). Поднимем (локально) это вложение до сечения f пучка идеалов $\mathscr{I}$ и обозначим через $\mathscr{I}_1 \subset \mathscr{I}$ идеал, порожденный f. По построению морфизм $\mathscr{O}_X \xrightarrow{f} \mathscr{I}_1$ сюрьективен, и так же как и в случае $k = 1$ проверяется, что f изоморфизм в окрестности точки z. Значит соотсветствующая идеалу $\mathscr{I}_1$ подсхема $X_1 \subset X$ является дивизором Картье. Покажем, что пучок идеалов $\bar{\mathscr{I}}$ для $Z \subset X_1$ локально свободен ранга $k-1$ (по индукции это будет означать, что $Z \subset X_1$ локально полное пересечение, а значит также и $Z \subset X$). Для этого заметим, что $\bar{\mathscr{I}}$ определяется из точной тройки

$$0 \to \mathscr{I}_1 \to \mathscr{I} \to \bar{\mathscr{I}} \to 0.$$

Ограничивая ее на Z получаем точную последовательность

$$\mathscr{I}_1 \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Z \to \mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \to \bar{\mathscr{I}}/\bar{\mathscr{I}}^2 \to 0.$$

Поскольку $\mathscr{I}_1 \cong \mathscr{O}_X$, ее первый член изоморфен $\mathscr{O}_Z$, а первая стрелка очевидно совпадает с изначальным вложением расслоений. Значит, по его построению $\bar{\mathscr{I}}/\bar{\mathscr{I}}^2$ локально свободен. $\square$

Поскольку конормальный пучок для локально полного пересечения локально свободен, то

$$\mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \cong \mathscr{N}^*_{Z/X},$$

поэтому часто для конормального пучка мы будем использовать обозначение $\mathscr{N}^*_{Z/X}$.

Следствие 3.2. *Если $Z \subset X$ — полное пересечение дивизоров Картье $D_1, \ldots, D_k$, то*

$$\mathscr{N}_{Z/X} \cong \mathscr{O}_Z(D_1) \oplus \cdots \oplus \mathscr{O}_Z(D_k), \qquad \mathscr{N}^*_{Z/X} \cong \mathscr{O}_Z(-D_1) \oplus \cdots \oplus \mathscr{O}_Z(-D_k).$$

4. Раздутия локально полных пересечений

Опишем теперь структуру раздутия с уентром в локально полном пересечнии.

Предложение 4.1. *Пусть E — исключительный дивизор в раздутии локально полного пересечения $Z \subset X$. Тогда*

$$E \cong \mathbb{P}_Z(\mathscr{N}_{Z/X}), \qquad \textit{причем} \qquad \mathscr{O}_E(E) \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}_Z(\mathscr{N}_{Z/X})/Z}(-1).$$

Если Z является схемой нулей регулярного сечения s расслоения $\mathscr{E}^*$, то $\mathrm{Bl}_Z(X) \subset \mathbb{P}_X(\mathscr{E}^*)$, и является там схемой нулей естественного глобального сечения расслоения $\bigwedge^2 \mathscr{E}^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E}^*)/X}(1)$.

Доказательство. Для произвольного раздутия выполнено равенство $E \cong \mathrm{Proj}(\oplus(\mathscr{I}^k/\mathscr{I}^{k+1}))$, поэтому для первого утверждения достаточно проверить, что $\mathscr{I}^k/\mathscr{I}^{k+1} \cong S^k(\mathscr{N}^*_{Z/X})$ (и проверить согласованность этого изоморфизма с умножением). Для этого заметим, что умножение

$$S^k(\mathscr{N}^*_{Z/X}) \cong S^k(\mathscr{I}/\mathscr{I}^2) \to \mathscr{I}^k/\mathscr{I}^{k+1}$$

очевидно сюрьективно. Тем самым, достаточно проверить его инъективность. Это уже локальное утверждение, поэтому начиная с этого места будем считать, что $Z \subset X$ — схема нулей сечения s локально свободного пучка $\mathscr{E}^*$ ранга k. В этом случае комплекс Кошуля $\bigwedge^2 \mathscr{E} \xrightarrow{s} \mathscr{E} \to \mathscr{I} \to 0$ дает вложение раздутия $\mathrm{Bl}_Z(X)$ в схему нулей $\tilde{X} \subset \mathbb{P}_X(\mathscr{E}^*)$ сечения расслоения $\bigwedge^2 \mathscr{E}^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(\mathscr{E}^*)/X}(1)$. Покажем, что оно является изоморфизмом (тем самым, будет доказана и вторая часть предложения). Поскольку мы уже знаем, что $\mathrm{Bl}_Z(X) \subset \tilde{X}$, остается проверить, что $\tilde{X} \subset \mathrm{Bl}_Z(X)$. Для этого достаточно построить морфизм $\tilde{X} \to \mathrm{Bl}_Z(X)$, который в композиции с вложением $\mathrm{Bl}_Z(X) \hookrightarrow \mathbb{P}_X(\mathscr{E}^*)$ равнялся бы вложению $\tilde{X} \hookrightarrow \mathbb{P}_X(\mathscr{E}^*)$. Для этого воспользуемся универсальным свойством раздутия.

В силу универсального свойства раздутия, достаточно проверить, что схемный прообраз Z в $\tilde{X}$ является дивизором Картье. Заметим сразу, что схемный прообраз Z в $\mathbb{P}_X(\mathscr{E}^*)$ равен $\mathbb{P}_Z(\mathscr{E}^*)$ и очевидно содержится в $\tilde{X}$ (так как ограничение s на Z равно нулю). Поэтому надо проверить, что $\mathbb{P}_Z(\mathscr{E}^*) \subset \tilde{X}$ является дивизором Картье.

Это утверждение локальное, поэтому можем считать, что расслоение $\mathscr{E}$ тривиально, а сечение s задается регулярной последовательностью $s_1, \dots, s_k$. Тогда $\tilde{X} \subset X \times \mathbb{P}^{k-1}$ задается уравнениями

$$u_i s_j - u_j s_i = 0$$

(где $(u_1 : \dots : u_k)$ — однородные координаты на $\mathbb{P}^{k-1}$). Рассмотрим карту $X \times \mathbb{A}^{k-1} \subset X \times \mathbb{P}^{k-1}$, в которой $u_1 \neq 0$ (тем самым, можно считать $u_1 = 1$) и $\tilde{X}_1 := \tilde{X} \cap (X \times \mathbb{A}^{k-1})$. Тогда из уравнений следует, что в $\tilde{X}_1$ выполнены равенства

$$s_j = u_j s_1,$$

и значит

$$Z \times \mathbb{A}^{k-1} = \mathbb{P}_Z(\mathscr{E}^*) \cap (X \times \mathbb{A}^{k-1}) = \{s_1 = s_2 = \dots = s_k = 0\} = \{s_1 = u_2 s_1 = \dots = u_k s_1 = 0\} = \{s_1 = 0\},$$

то есть задается одним уравнением. Остается проверить, что s_1 не является делителем нуля в $\mathscr{O}_{\tilde{X}_1}$.

Для этого заметим, что $Z \times \mathbb{A}^{k-1} \subset X \times \mathbb{A}^{k-1}$ — локально полное пересечение коразмерности k (оно задается регулярной последовательностью $s_1, s_2, \dots, s_k$). С другой стороны, его же можно задать последовательностью $(s_2 - u_2 s_1, \dots, s_k - u_k s_1, s_1)$, которая следовательно тоже является регулярной. Но это как раз означает, что s_1 не является делителем нуля в факторе кольца $\mathscr{O}_X[u_2, \dots, u_k]$ по идеалу $(s_2 - u_2 s_1, \dots, s_k - u_k s_1)$, то есть в $\mathscr{O}_{\tilde{X}_1}$. □

Следствие 4.2. *Утверждение предложения выполнено, если X и Z — оба гладкие многообразия.*

5. Примеры

Пусть $X = \mathbb{P}(V)$, $P \in \mathbb{P}(V)$ точка, $v_P \in V$ — соответствующий вектор, а $\bar{V} = V/\mathsf{k}v_P$.

Лемма 5.1. *Существует изоморфизм* $\mathrm{Bl}_P(\mathbb{P}(V)) \cong \mathbb{P}_{\mathbb{P}(\bar{V})}(\mathscr{O}_{\mathbb{P}(\bar{V})} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\bar{V})}(-1))$.

Доказательство. Сюръекция $V \to \bar{V}$ индуцирует вложение $\bar{V}^* \hookrightarrow V^*$ и задает сечение

$$s \in H^0(\mathbb{P}(V), \bar{V} \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)) \cong \bar{V} \otimes V^*,$$

схема нулей которого — это в точности точка P. Поэтому,

$$\mathrm{Bl}_P(V) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{P}(V)}(\bar{V} \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)) \cong \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(\bar{V})$$

и является схемой нулей сечения $\bar{s}$ расслоения $\bigwedge^2(\bar{V}) \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)\times\mathbb{P}(\bar{V})}(1,1)$, соответствующего индуцированному вложению $\bigwedge^2(\bar{V}^*) \hookrightarrow V^* \otimes \bar{V}^*$. С другой стороны, резольвента

$$\dots \to \bigwedge^2(\bar{V}^*) \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\bar{V})}(-1) \to V^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\bar{V})} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\bar{V})} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\bar{V})}(1) \to 0$$

(сумма подкрученного на 1 комплекса Кошуля на $\mathbb{P}(\bar{V})$ и изоморфизма $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(\bar{V})} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\bar{V})}$) задает вложение проективизации $\mathbb{P}_{\mathbb{P}(\bar{V})}(\mathscr{O}_{\mathbb{P}(\bar{V})} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\bar{V})}(-1))$ в $\mathbb{P}_{\mathbb{P}(\bar{V})}(V \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\bar{V})}) \cong \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(\bar{V})$ в качестве схемы нулей того же самого сечения того же самого расслоения. □

Упражнение 3. *Пусть h и $\bar{h}$ — обратные образы на $\mathrm{Bl}_P(\mathbb{P}(V)) \cong \mathbb{P}_{\mathbb{P}(\bar{V})}(\mathscr{O}_{\mathbb{P}(\bar{V})} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\bar{V})}(-1))$ классов гиперплоских сечений с $\mathbb{P}(V)$ и $\mathbb{P}(\bar{V})$ соответственно. Проверьте, что класс исключительного дивизора раздутия равен $e = h - \bar{h}$.*

Упражнение 4. *Пусть $Q \subset \mathbb{P}(V)$ — квадрика, такая что $P \in Q$ — ее гладкая точка. Проверьте, что $\mathrm{Bl}_P(Q) \cong \mathrm{Bl}_{\bar{Q}}(\mathbb{P}(\bar{V}))$, где $\bar{Q} \subset \mathbb{P}(\bar{V})$ — полное пересечение квадрики и гиперплоскости.*

Упражнение 5. *Пусть $W \subset V$ подпространство. Опишите $\mathrm{Bl}_{\mathbb{P}(W)}(\mathbb{P}(V))$ как проективизацию расслоения на $\mathbb{P}(V/W)$.*