Примеры раздутий

1. Полные и собственные прообразы

Пусть $\pi\colon \mathrm{Bl}_Z(X) \to X$ — раздутие подсхемы $Z \subset X$, а $Y \subset X$ — еще одна подсхема. Есть два разных способа построить по ней подсхему в раздутии.

Во-первых, можно рассмотреть схемный прообраз $\pi^{-1}(Y) \subset \mathrm{Bl}_Z(X)$, он называется полным прообразом Y. С другой стороны, из универсального свойства раздутия следует, что вложение $Y \hookrightarrow X$ однозначно поднимается до вложения

$$\mathrm{Bl}_{Y\cap Z}(Y) \hookrightarrow \mathrm{Bl}_Z(X).$$

Его образ наызвается собственным прообразом Y в $\mathrm{Bl}_Z(X)$ и обозначается $\pi^*(Y)$.

Упражнение 1. *Пусть $Y \cap Z \subset Y$ — дивизор Картье (например, это так, если $Y \cap Z = \varnothing$). Покажите, что $\pi^*(Y) \cong Y$.*

Упражнение 2. *Пусть $Y \subset Z$. Проверьте, что $\pi^*(Y) = \varnothing$.*

Лемма 1.1. *Пусть Y — целостная схема. Тогда $\pi^*(Y) = \overline{\pi^{-1}(Y \setminus Z)}$.*

Доказательство. Если $Y \subset Z$, то обе части равенства пусты. Если же $Y \not\subset Z$, то $\pi^{-1}(Y \setminus Z)$ является открытым подмножеством в замкнутой подсхеме $\mathrm{Bl}_{Y\cap Z}(Y) \subset \mathrm{Bl}_Z(X)$, следовательно ее замыкание содержится в собственном прообразе. Кроме того, $\mathrm{Bl}_{Y\cap Z}(Y)$ целостная схема (так как соответсвующий пучок алгебр $\oplus \mathscr{I}^k_{Y\cap Z, Y} \subset \mathscr{O}_Y[t]$ не содержит делителей нуля), а $\pi^{-1}(Y \setminus Z)$ — непустое открытое подмножество в ней (дополнение до исключительного дивизора), значит оно плотно, а $\mathrm{Bl}_{Y\cap Z}(Y)$ равно его замыканию. □

По определению, всегда выполнено включение $\pi^*(Y) \subset \pi^{-1}(Y)$ (так как по построению собственного прообраза $\pi(\pi^*(Y)) \subset Y$). Обсудим, что происходит в случае, когда $Y = D$ — дивизор Картье, содержащий Z, само Z является целостным локально полным пересечением, причем

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \mathscr{I}_Z^k = 0$$

(геометрически, это означает что Z не содержится в неприводимой компоненте X). По определению, вложение $Z \subset D$ означает, что $\mathscr{O}_X(-D) = \mathscr{I}_D \subset \mathscr{I}_Z$. Пусть m — максимальное число, такое что $\mathscr{I}_D \subset \mathscr{I}_Z^m$ (оно называется кратностью D вдоль Z), оно существует по нашему предположению.

Предложение 1.2. *Если m — кратность D вдоль Z, то $\pi^*(D)$ тоже дивизор Картье, причем*

$$\pi^{-1}(D) = \pi^*(D) + mE.$$

Доказательство. По определенеию $\mathrm{Bl}_Z(X) = \mathrm{Proj}_X(\oplus \mathscr{I}_Z^k)$ и $\mathrm{Bl}_Z(D) = \mathrm{Proj}_D(\oplus \mathscr{I}_{Z,D}^k)$. Кроме того, естественный морфизм $\mathscr{I}_Z \to \mathscr{I}_{Z,D}$ очевидно сюрьективен, а его ядро равно $\mathscr{I}_D$. Следовательно, естественный морфизм $\mathscr{I}_Z^k \to \mathscr{I}_{Z,D}^k$ тоже сюрьективен, а его ядро равно $\mathscr{I}_Z^k \cap \mathscr{I}_D$. Поэтому собственный прообраз D соответствует градуированному пучку идеалов $\oplus(\mathscr{I}_Z^k \cap \mathscr{I}_D)$. При $k \le m$ очевидно имеем $\mathscr{I}_Z^k \cap \mathscr{I}_D = \mathscr{I}_D$. Покажем, что при $k \ge m$ выполнено

$$\mathscr{I}_Z^k \cap \mathscr{I}_D = \mathscr{I}_D \cdot \mathscr{I}_Z^{k-m}.$$

Вопрос локальный, поэтому можно считать, что идеал $\mathscr{I}_D$ главный и порожден элементом f. Значит, надо проверить, что если $fg \in \mathscr{I}_Z^k$, то $g \in \mathscr{I}_Z^{k-m}$. Применим индукцию по k. При $k = m$ доказывать нечего. Пусть $k > m$. Так как $fg \in \mathscr{I}_Z^k \subset \mathscr{I}_Z^{k-1}$, то по предположению индукции $g \in \mathscr{I}_Z^{k-m-1}$. Поскольку при этом $f \in \mathscr{I}_Z^m$, то класс $f \cdot g$ в $\mathscr{I}_Z^{k-1}/\mathscr{I}_Z^k$, равный нулю по предположению, равен произведению класса $\bar{f} \in \mathscr{I}_Z^m/\mathscr{I}_Z^{m+1}$ и класса $\bar{g} \in \mathscr{I}_Z^{k-m-1}/\mathscr{I}_Z^{k-m}$ относительно морфизма

$$(\mathscr{I}_Z^m/\mathscr{I}_Z^{m+1}) \otimes (\mathscr{I}_Z^{k-m-1}/\mathscr{I}_Z^{k-m}) = S^m(\mathscr{N}_{Z/X}^*) \otimes S^{k-m-1}(\mathscr{N}_{Z/X}^*) \to S^{k-1}(\mathscr{N}_{Z/X}^*) = \mathscr{I}_Z^{k-1}/\mathscr{I}_Z^k.$$

Так как Z целостна, а $\mathscr{N}_{Z/X}^*$ локально свободен, алгебра $\oplus S^k(\mathscr{N}_{Z/X}^*)$ не имеет делителей нуля, поэтому зануление произведения $\bar{f} \cdot \bar{g}$ означает, что один из множителей равен нулю. Но если $\bar{f} = 0$, то $f \in \mathscr{I}_Z^{m+1}$, что противоречит определению числа m. Значит $\bar{g} = 0$, то есть $g \in \mathscr{I}_Z^{k-m}$, что и требовалось.

Из доказанного равенства $\mathscr{I}_Z^k \cap \mathscr{I}_D = \mathscr{I}_D \cdot \mathscr{I}_Z^{k-m}$ с учетом обратимости идеала $\mathscr{I}_D \cong \mathscr{O}_X(-D)$, следует что идеал собственного прообраза $\pi^*(D)$ изоморфен идеалу $\pi^*\mathscr{O}_X(-D) \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{Bl}_Z(X)}(mE)$ (второй сомножитель отвечает за сдвиг градуировки на m). Этот идеал обратим, значит $\pi^*(D)$ — дивизор Картье. Необходимое равенство тоже следует. ☐

Упражнение 3. *Пусть $X \subset \mathbb{P}(V)$ — целостная схема, а $\mathrm{Cone}(X) \subset \mathbb{A}(V)$ — конус над ней с вершиной в точке $0 \in \mathbb{A}(V)$. Покажите, что $\mathrm{Bl}_0(\mathrm{Cone}(X)) \cong \mathbb{A}_X(\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1)|_X)$, а исключительный дивизор является нулевым сечением.*

Вот еще одно простое, но полезное наблюдение.

Лемма 1.3. *Пусть $Z \subset X$ — гладкое подмногообразие в гладком многообразии. Тогда раздутие $\mathrm{Bl}_Z(X)$ тоже гладко.*

Доказательство. Так как $\mathrm{Bl}_Z(X) \setminus E = X \setminus Z$, то раздутие гладко вне E. С другой стороны, если дивизор Картье проходит через негладкую точку многообразия, то он и сам не гладок в этой точке (сравните размерности касательных пространств в этой точке). Однако, так как $Z \subset X$ — локально полное пересечение, то $E \cong \mathbb{P}_Z(\mathscr{N}_{Z/X})$ гладко в силу гладкости Z и локальной свободности $\mathscr{N}_{Z/X}$. ☐

2. Простые примеры

Пусть $X = \mathbb{P}(V)$, $Z = \mathbb{P}(W)$ и $W \subset V$ — линейное подпространство.

Лемма 2.1. *Существует изоморфизм $\mathrm{Bl}_{\mathbb{P}(W)}(\mathbb{P}(V)) \cong \mathbb{P}_{\mathbb{P}(V/W)}(W \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)} \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}(-1))$.*

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Bl}_{\mathbb{P}(W)}(\mathbb{P}(V)) \arrow[dl, "\text{раздутие}"'] \arrow[dr, "\text{проективизация}"] & \\ \mathbb{P}(V) & & \mathbb{P}(V/W) \end{tikzcd}$$

Если H и $\bar{H}$ — классы гиперплоских сечений на $\mathbb{P}(V)$ и $\mathbb{P}(V/W)$, а E — исключительный дивизор раздутия, то в группе классов дивизоров выполнено соотношение

$$E = H - \bar{H},$$

а сам исключительный дивизор изоморфен $E \cong \mathbb{P}(W) \times \mathbb{P}(V/W)$.

Доказательство. Сюръекция $V \to V/W$ индуцирует вложение $(V/W)^* \hookrightarrow V^*$ и задает сечение

$$s \in H^0(\mathbb{P}(V), (V/W) \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)) \cong (V/W) \otimes V^*,$$

схема нулей которого — это в точности подпространство $Z = \mathbb{P}(W)$. Иначе говоря, $\mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(V)$ является полным пересечением $\dim V - \dim W$ гиперплоскостей, а канонически это записывается именно как схема нулей сечения s, которое, кстати, тем самым регулярно. Поэтому, есть вложение

$$\mathrm{Bl}_{\mathbb{P}(W)}(\mathbb{P}(V)) \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{P}(V)}((V/W) \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)) \cong \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V/W),$$

а его образ является схемой нулей сечения $\bar{s}$ расслоения $\bigwedge^2(V/W)\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)\times\mathbb{P}(V/W)}(1,1)$, соответствующего индуцированному вложению $\bigwedge^2(V/W)^*\hookrightarrow V^*\otimes(V/W)^*$. С другой стороны, резольвента

$$\dots\to\bigwedge^2(V/W)^*\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}(-1)\to V^*\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}\to W^*\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}\oplus\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}(1)\to 0$$

(сумма изоморфизма $W^*\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}\to W^*\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}$ и подкрученного на $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}(1)$ комплекса Кошуля на $\mathbb{P}(V/W)$) задает вложение проективизации $\mathbb{P}_{\mathbb{P}(V/W)}(W\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}\oplus\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}(-1))$ в $\mathbb{P}_{\mathbb{P}(V/W)}(V\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)})\cong\mathbb{P}(V)\times\mathbb{P}(V/W)$ в качестве схемы нулей того же самого сечения того же самого расслоения.

Чтобы описать класс исключительного дивизора E, заметим, что при построенном выше вложении раздутия он отождествляется с классом линейного расслоения $\mathscr{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{P}(V)}((V/W)\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V)}(1))/\mathbb{P}(V)}(-1)$, то есть с $H-\bar{H}$, что и требовалось. Отождествление самого дивизора с произведением $\mathbb{P}(W)\times\mathbb{P}(V/W)$ тоже очевидно. $\square$

Несмотря на свою простоту, этот пример весьма полезен, например, для описания линейных проекций гиперповерхностей.

Лемма 2.2. *Пусть $\mathbb{P}^n\cong\mathbb{P}(W)\subset Q\subset\mathbb{P}(V)\cong\mathbb{P}^{2n+1}$, где Q — гладкая квадрика размерности $2n$, а $\mathbb{P}(W)$ — максимальное линейное пространство на ней. Тогда*

$$\mathrm{Bl}_{\mathbb{P}(W)}(Q)\cong\mathbb{P}_{\mathbb{P}(V/W)}(\Omega_{\mathbb{P}(V/W)}(1)\oplus\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}(-1)).$$

Доказательство. Квадрика Q является дивизором типа $2H$ в $\mathbb{P}(V)$. Так как она проходит через центр раздутия в диаграмме Леммы 2.1, то в силу Предложения 1.2 на раздутии ее собственный прообраз является дивизором класса $2H-E=H+\bar{H}$. Рассмотрим его проекцию на $\mathbb{P}(V/W)$. Так как $H+\bar{H}$ ограничивается на слои проективизации как гиперплоскость, и к тому же

$$p_*\mathscr{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{P}(V/W)}(W\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}\oplus\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}(-1))}(H+\bar{H})\cong(W^*\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}\oplus\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}(1))\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}(1),$$

то этот дивизор является проективизацией расслоения $\mathscr{F}$ на $\mathbb{P}(V/W)$ заданного точной тройкой

$$0\to\mathscr{F}\to W\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}\oplus\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}(-1)\xrightarrow{Q}\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}(1)\to 0,$$

где гомоморфизм Q задан уравнением квадрики с учетом отождествления

$$H^0(\mathbb{P}(V/W),W^*\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}(1)\oplus\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}(2))\cong W^*\otimes(V/W)^*\oplus S^2(V/W)^*\cong\mathrm{Ker}(S^2V^*\to S^2W^*).$$

Далее, так как Q гладкая, компонента ее уравнения в $W^*\otimes(V/W)^*$ невырождена и задает изоморфизм $W\cong(V/W)^*$, так что компонента $W\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}\to\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}(1)$ морфизма Q отождествляется с тавтологическим морфизмом $(V/W)^*\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}\to\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}(1)$, ядром которого является расслоение $\Omega_{\mathbb{P}(V/W)}(1)$. Диаграмный поиск дает точную тройку

$$0\to\Omega_{\mathbb{P}(V/W)}(1)\to\mathscr{F}\to\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V/W)}(-1)\to 0,$$

которая должна расщепляться, так как соответствующее пространство расширений тривиально. $\square$

Упражнение 4. *Покажите, что $E\cong\mathbb{P}_{\mathbb{P}(V/W)}(\Omega_{\mathbb{P}(V/W)}(1))\cong\mathrm{Fl}(1,n;V/W)$.*

Метод, использованный в доказательстве Леммы 2.1 (вложение раздутия в произведение и реинтерпретация задающих образ уравнений) можно применять и в других ситуациях. Например, так можно описать раздутие $\mathrm{Gr}(2,5)$ в его плюккеровском вложении.

Пусть V — векторное пространство, $\dim V=5$,

$$Z=\mathrm{Gr}(2,V)\subset\mathbb{P}(\bigwedge^2V)=X.$$

Лемма 2.3. *Существует изоморфизм $\mathrm{Bl}_{\mathrm{Gr}(2,V)}(\mathbb{P}(\bigwedge^2V))\cong\mathbb{P}_{\mathbb{P}(V^*)}(\bigwedge^2(\Omega_{\mathbb{P}(V^*)}(1)))$.*

Доказательство. Как нам известно, $\mathrm{Gr}(2,V) = D_2(\varphi)$ является детерминантальным локусом для естественного морфзма

$$\varphi\colon V^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^2 V)}(-1) \to V \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^2 V)}.$$

Рассмотрим также композицию

$$\psi\colon V \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^2 V)} \hookrightarrow V \otimes \bigwedge^2 V \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^2 V)}(1) \hookrightarrow V \otimes \bigwedge^2 V \otimes \bigwedge^2 V \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^2 V)}(2) \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^2 V)}(2),$$

Легко видеть, что $\psi \circ \varphi = 0$ (действительно, в точке, соответствующей бивектору $w \in \bigwedge^2 V$, композиция имеет вид $f \mapsto (f \vee w) \mapsto (f \vee w) \wedge w \wedge w$, и если, например, $w = e_{12} + e_{34}$, то $e \wedge e = e_{1234}$, при этом $f \vee w$ — линейная комбинация векторов e_1, e_2, e_3, e_4, поэтому $(f \vee w) \wedge w \wedge w = 0$). Более того, можно показать, что $\operatorname{Ker}\psi = \operatorname{Im}\varphi$. Наконец, очевидно, что ψ задается плюккеровскими квадриками, которые как нам известно порождают пучок идеалов $\mathrm{Gr}(2,V)$, поэтому имеем точную последовательность

$$V^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^2 V)}(-3) \xrightarrow{\varphi} V \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^2 V)}(-2) \xrightarrow{\psi} \mathscr{I}_{\mathrm{Gr}(2,V)} \to 0.$$

Отсюда следует, что

$$\mathrm{Bl}_Z(X) \subset \mathbb{P}_{\mathbb{P}(\wedge^2 V)}(V^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^2 V)}(2)) \cong \mathbb{P}(\bigwedge^2 V) \times \mathbb{P}(V^*)$$

и является там схемой нулей сечения $\varphi \in \Gamma(\mathbb{P}(\bigwedge^2 V) \times \mathbb{P}(V^*), V \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(\wedge^2 V)\times\mathbb{P}(V^*)}(1,1))$.

С другой стороны, резольвента

$$0 \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V^*)}(-2) \to V^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V^*)}(-1) \to \bigwedge^2 V^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V^*)} \to \bigwedge^2(\mathscr{T}_{\mathbb{P}(V^*)}(-1)) \to 0$$

(получающаяся из последовательности Эйлера взятием внешнего квадрата) показывает, что проективизация $\mathbb{P}_{\mathbb{P}(V^*)}(\bigwedge^2(\Omega_{\mathbb{P}(V^*)}(1)))$ вкладывается в $\mathbb{P}_{\mathbb{P}(V^*)}(\bigwedge^2 V \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V^*)}) \cong \mathbb{P}(\bigwedge^2 V) \times \mathbb{P}(V^*)$ в качестве схемы нулей того же самого сечения того же самого расслоения. $\square$

Упражнение 5. *Докажите, что если H — класс гиперплоскости на $\mathrm{Gr}(2,V)$, а $\bar{H}$ — класс гиперплоскости на $\mathbb{P}(V^*)$, то класс исключительного дивизора E раздутия $\mathrm{Bl}_{\mathrm{Gr}(2,V)}(\mathbb{P}(\bigwedge^2 V))$ равен*

$$E = 2H - \bar{H},$$

и при этом исключительный дивизор изоморфен $E \cong \mathrm{Fl}(2,4;V)$.

Упражнение 6. *Докажите, что $\mathscr{N}^*_{\mathrm{Gr}(2,V)/\mathbb{P}(\wedge^2 V)} \cong V/\mathscr{U}(2)$.*

3. Примеры посложнее

В следующем примере для доказательства применяется другой подход. Пусть A и B — векторные пространства, $\dim A = 2$, $\dim B = n$, $V = A \otimes B$ и

$$Z = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) \subset \mathbb{P}(V) = X.$$

Лемма 3.1. *Существует изоморфизм $\mathrm{Bl}_{\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)}(\mathbb{P}(V)) \cong \mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(2,B)}(A \otimes \mathscr{U})$, где $\mathscr{U}$ — тавтологическое расслоение на $\mathrm{Gr}(2,B)$. Если H — класс гиперплоскости на X, а $\bar{H}$ — плюккеровский класс на $\mathrm{Gr}(2,B)$, то*

$$E = 2H - \bar{H}.$$

При этом исключительный дивизор изоморфен $E \cong \mathrm{Fl}(1,2;B) \times \mathbb{P}(A)$.

Доказательство. Как нам известно, $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = D_1(\varphi)$ является детерминантальным локусом для естественного морфзма

$$\varphi\colon B^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(A\otimes B)} \to A \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(A\otimes B)}(1).$$

Его коядро является линейным расслоением на $\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)$ (так как ранг не может быть меньше 1). Более того, при ограничении на $\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)$ морфизм φ раскладывается в композицию

$$B^*\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)}\to\mathscr{O}_{\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)}(0,1)\to A\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)}(1,1),$$

в которой оба морфизма — тавтологические (с точностью до подкрутки). Значит линейное расслоение в коядре изоморфно $\mathscr{O}_{\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)}(2,1)$ и получаем точную последовательность

$$B^*\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(A\otimes B)}\xrightarrow{\varphi}A\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}(A\otimes B)}(1)\to j_*\mathscr{O}_{\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)}(2,1)\to 0,$$

где $j\colon\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)\hookrightarrow\mathbb{P}(A\otimes B)$ — вложение Сегре.

Рассмотрим теперь обратный образ этой последовательности на раздутии:

$$B^*\otimes\mathscr{O}_{\mathrm{Bl}_Z(X)}\xrightarrow{\pi^*\varphi}A\otimes\mathscr{O}_{\mathrm{Bl}_Z(X)}(H)\to i_*p^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)}(2,1)\to 0,$$

где $i\colon E\to\mathrm{Bl}_Z(X)$ — вложение исключительного дивизора, а $p\colon E\to\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)$ — его проекция на центр раздутия. Последний морфизм — сюръекция на линейное расслоение на дивизоре Картье, поэтому его ядро (равное $\mathrm{Im}(\pi^*\varphi)$ в силу точности последовательности) — локально свободно (Лемма 3.2). Значит $\pi^*\varphi$ — сюръекция на векторное расслоение ранга 2, значит в силу универсального свойства грассманиана существует морфизм $g\colon\mathrm{Bl}_Z(X)\to\mathrm{Gr}(2,B)$, такой что морфизм $\pi^*\varphi$ раскладывается в композицию

$$B^*\otimes\mathscr{O}_{\mathrm{Bl}_Z(X)}\twoheadrightarrow g^*\mathscr{U}^*\xrightarrow{\varphi'}A\otimes\mathscr{O}_{\mathrm{Bl}_Z(X)}(H),$$

в которой первая стрелка — обратный образ тавтологической сюръекции. Более того, морфизм φ' дает отображение расслоений

$$\varphi''\colon\mathscr{O}_{\mathrm{Bl}_Z(X)}(-H)\to A\otimes g^*\mathscr{U},$$

которое нигде не обращается в нуль (так как иначе φ', а значит и φ где-то обращаются в нуль, что невозможно). Значит φ'' вложение расслоений, и по универсальному свойству проективизации получаем морфизм $\tilde{g}\colon\mathrm{Bl}_Z(X)\to\mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(2,B)}(A\otimes\mathscr{U})$, такой что φ'' — обратный образ тавтологического вложения.

Построим теперь морфизм в обратном направлении. Пусть $\mathscr{L}:=\mathscr{O}_{\mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(2,B)}(A\otimes\mathscr{U})/\mathrm{Gr}(2.B)}(-1)$ — тавтологическое линейное расслоение и $\mathscr{L}\hookrightarrow A\otimes p^*\mathscr{U}$ — тавтологическое вложение. Композиция

$$\mathscr{L}\hookrightarrow A\otimes p^*\mathscr{U}\hookrightarrow A\otimes B\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(2,B)}(A\otimes\mathscr{U})}$$

является вложением расслоений, значит существует морфизм $f\colon\mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(2,B)}(A\otimes\mathscr{U})\to\mathbb{P}(A\otimes B)=X$, такой что $\mathscr{L}\cong f^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}(A\otimes B)}(-1)$. Чтобы поднять его до морфизма $\tilde{f}\colon\mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(2,B)}(A\otimes\mathscr{U})\to\mathrm{Bl}_Z(X)$ достаточно проверить, что схемный прообраз Z является дивизором Картье. Для этого заметим, что морфизм $f^*\varphi$ раскладывается в композицию

$$B^*\otimes\mathscr{O}_{\mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(2,B)}(A\otimes\mathscr{U})}\twoheadrightarrow p^*\mathscr{U}^*\xrightarrow{\psi}A\otimes\mathscr{L}^*.$$

Здесь первая стрелка сюръективна, значит схемный прообраз Z (равный по определению детерминантали $D_1(f^*\varphi)$) равен $D_1(\psi)$. Но ψ — морфизм расслоений ранга 2, значит $D_1(\psi)$ — схема нулей морфизма

$$\wedge^2\psi\colon p^*(\textstyle\bigwedge^2\mathscr{U}^*)\to\textstyle\bigwedge^2 A\otimes(\mathscr{L}^*)^2,$$

то есть схема нулей сечения линейного расслоения $\bigwedge^2 A\otimes(\mathscr{L}^*)^2\otimes p^*(\bigwedge^2\mathscr{U})\cong\mathscr{O}_{\mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(2,B)}(A\otimes\mathscr{U})}(2H-\bar{H})$. Так это сечение не равно нулю тождественно, а $\mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(2,B)}(A\otimes\mathscr{U})$ гладко, это дивизор Картье, значит существует искомое поднятие $\tilde{f}$.

Остается проверить, что построенные морфизмы $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ взаимно обратны, что довольно очевидно. Кроме того, приведенное рассуждение также доказывает искомое выражение для класса исключительного дивизора, а сам исключительный дивизор отождествляется с

$$\mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(2,B)}(p^*\mathscr{U}) \times_{\mathrm{Gr}(2,B)} \mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(2,B)}(A \otimes \mathscr{L}^*) \cong \mathrm{Fl}(1,2;B) \times_{\mathrm{Gr}(2,B)} (\mathrm{Gr}(2,B) \times \mathbb{P}(A)) \cong \mathrm{Fl}(1,2;B) \times \mathbb{P}(A). \ \square$$

Из построенного выше изоморфизма можно вывести много других.

Упражнение 7. *Пусть $S \subset \mathbb{P}^4$ — кубический скролл. Докажите, что $\mathrm{Bl}_S(\mathbb{P}^4) \cong \mathbb{P}_{\mathbb{P}^2}(\mathscr{F})$, где $\mathscr{F}$ — расслоение ранга 3 на $\mathbb{P}^2$, определяемое последовательностью $0 \to \mathscr{F} \to \Omega_{\mathbb{P}^2}(1)^{\oplus 2} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^2} \to 0$.*

Упражнение 8. *Пусть $C \subset \mathbb{P}^3$ — скрученная кубика. Докажите, что $\mathrm{Bl}_C(\mathbb{P}^3) \cong \mathbb{P}_{\mathbb{P}^2}(\mathscr{F})$, где $\mathscr{F}$ — расслоение ранга 2 на $\mathbb{P}^2$, определяемое последовательностью $0 \to \mathscr{F} \to \Omega_{\mathbb{P}^2}(1)^{\oplus 2} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}^{\oplus 2} \to 0$.*

Докажем лемму, которую мы использовали в доказательстве Леммы 3.1.

Лемма 3.2. *Пусть $\varphi\colon \mathscr{E} \twoheadrightarrow i_*\mathscr{F}$ — сюрьекция, где $i\colon D \hookrightarrow X$ — вложение дивизора Картье, $\mathscr{E}$ локально свободен на X, а $\mathscr{F}$ локально свободен на D. Тогда пучок $\operatorname{Ker}\varphi$ локально свободен на X.*

Доказательство. Вопрос локальный, поэтому можно считать, что $X = \mathrm{Spec}(R)$, $D = \mathrm{Spec}(R/f)$, где f не является делителем нуля, а $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F}$ свободные модули над R и R/f соответственно. Иначе говоря, задан сюрьективный морфизм $\varphi\colon R^{\oplus n} \twoheadrightarrow (R/f)^{\oplus m}$. Заметим, что его ядро и коядро совпадают с ядром и коядром морфизма $(\tilde{\varphi}, f \cdot \mathrm{id})\colon R^{\oplus(n+m)} \to R^{\oplus m}$, где $\tilde{\varphi}$ — произвольное поднятие φ. Это легко следует из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R^{\oplus m} \arrow[r, "\binom{0}{\mathrm{id}}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & R^{\oplus(n+m)} \arrow[r, "(\mathrm{id},0)"] \arrow[d, "(\tilde{\varphi}, f\cdot\mathrm{id})"] & R^{\oplus n} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & R^{\oplus m} \arrow[r, "f\cdot\mathrm{id}"] & R^{\oplus m} \arrow[r] & (R/f)^{\oplus m} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

В частности, $(\tilde{\varphi}, f \cdot \mathrm{id})$ сюръективен, а значит его ядро локально свободно. Следовательно, равное ему ядро φ также локально свободно. $\square$

Упражнение 9. *Пусть $\dim A = \dim B = 3$. Покажите, что*

$$\mathrm{Bl}_{\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)}(\mathbb{P}(A \otimes B)) \cong \mathrm{Bl}_{\mathbb{P}(A^*)\times\mathbb{P}(B^*)}(\mathbb{P}(A^* \otimes B^*)),$$

причем $E \cong \mathbb{P}_{\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)}(\Omega_{\mathbb{P}(A)}(1) \boxtimes \Omega_{\mathbb{P}(B)}(1))$ и $E = 2H - \bar{H}$.

Упражнение 10. *Пусть $\dim V = 3$. Покажите, что*

$$\mathrm{Bl}_{\mathbb{P}(V)}(\mathbb{P}(S^2V)) \cong \mathrm{Bl}_{\mathbb{P}(V^*)}(\mathbb{P}(S^2V^*)),$$

причем $E \cong \mathbb{P}_{\mathbb{P}(V)}(S^2(\Omega_{\mathbb{P}(V)}(1)))$ и $E = 2H - \bar{H}$.

Упражнение 11. *Пусть $\dim V = 6$. Покажите, что*

$$\mathrm{Bl}_{\mathrm{Gr}(2,V)}(\mathbb{P}(\textstyle\bigwedge^2 V)) \cong \mathrm{Bl}_{\mathrm{Gr}(2,V^*)}(\mathbb{P}(\textstyle\bigwedge^2 V^*)),$$

причем $E \cong \mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(2,V)}(\bigwedge^2 \mathscr{U}^\perp)$ и $E = 2H - \bar{H}$.