Схема Чжоу

В дифференциальной геометрии пространства, параметризующие подмногообразия или отображения многообразий, как правило являются огромными функциональными пространствами, то есть являются объектами совсем другой категории. В алгебраической геометрии, напротив, эти пространства также являются алгебраическими многообразиями (или очень к ним близки).

1. Прямые

Прямой в $\mathbb{P}^n$ называется подмногообразие, изоморфное образу отображения $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n$ степени 1.

Лемма 1.1. *Множество прямых в проективном пространстве* $\mathbb{P}(W)$ *— это* $\mathrm{Gr}(2,W)(\mathsf{k})$.

Доказательство. Пусть $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}(W)$ — отображение степени 1, а $W^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ — соответствующий эпиморфизм. Переходя к глобальным сечениям получаем морфизм $W^* \to \mathsf{k}^2$, который должен быть сюръективным, так как иначе исходный морфизм раскладывался бы в композицию $W^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ и не мог бы быть сюръективен. Такой морфизм дает k-точку грассманиана, причем замена f на другой морфизм с тем же образом равносильна действию группы $\mathrm{Aut}(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) = \mathrm{GL}_2(\mathsf{k})$, то есть замене базиса в k^2, то есть не влияет на полученную k-точку грассманиана.

Обратно, k-точка грассманиана — это сюръекция $W^* \to \mathsf{k}^2$. Отождествляя k^2 с U^*, $\dim U = 2$, получаем на $\mathbb{P}(U)$ морфизм $W^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(U)} \to U^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(U)} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}(U)}(1)$, то есть прямую в $\mathbb{P}(W)$. □

Пусть теперь $X \subset \mathbb{P}(W)$ — замкнутая подсхема. По определению, прямая на X — это прямая в $\mathbb{P}(W)$, лежащая в X.

Лемма 1.2. *Множество прямых на подсхеме* $X \subset \mathbb{P}(W)$ *— это множество* $F_1(X)(\mathsf{k})$ *точек некоторой замкнутой подсхемы в* $F_1(X) \subset \mathrm{Gr}(2,W)$.

Доказательство. Пусть X задается уравнениями $f_1, \dots, f_m$ степеней $d_1, \dots, d_m$ соответственно, то есть $f_i \in S^{d_i}W^*$. Сюръекция $W^* \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(2,W)} \to \mathscr{U}^*$ дает сюръекцию $S^dW^* \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(2,W)} \to S^d\mathscr{U}^*$, что позволяет рассматривать f_i как глобальное сечение расслоения $S^{d_i}\mathscr{U}^*$. Пусть

$$F_1(X) := Z_s$$

схема нулей сечения $s = (f_1, \dots, f_m)$ расслоения $S^{d_1}\mathscr{U}^* \oplus \dots \oplus S^{d_m}\mathscr{U}^*$ на $\mathrm{Gr}(2,W)$. Покажем, что она обладает искомыми свойствами.

Пусть z — k-точка грассманиана $\mathrm{Gr}(2,W)$, то есть сюръекция $W^* \to U^*$, где $\dim U = 2$. Точка $z \in \mathrm{Gr}(2,W)$ лежит в Z_s, если образ каждого из f_i относительно морфизма $S^dW^* \to S^dU^*$ равен нулю. Но ясно, что этот образ — в точности ограничение f_i на нашу прямую — $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(W)$. Поэтому обращение в нуль этих образов равносильно обращению в нуль $s_{|\mathbb{P}(U)}$, то есть как раз тому, что $\mathbb{P}(U) \subset X$ (по универсальному свойству схемы нулей). Иначе говоря, прямая соответствующая точке z лежит на X тогда и только тогда, когда $z \in F_1(X)$. □

Аналогично, m-мерной плоскостью в $\mathbb{P}^n$ называется подмногообразие, изоморфное образу отображения $\mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^n$ степени 1.

Упражнение 1. *Докажите, что множество m-мерных плоскостей на подсхеме* $X \subset \mathbb{P}(W)$ *— это множество* k*-точек некоторой замкнутой подсхемы в* $\mathrm{Gr}(m+1,W)(\mathsf{k})$.

2. Коники

Коникой в $\mathbb{P}^2$ называется кривая, задаваемая однородным уравнением степени 2.

Лемма 2.1. *Пусть характеристика поля* k *не равна* 2, *а* $C \subset \mathbb{P}^2$ *— коника. Тогда*

- C *— гладкая кривая; или*
- C *— объединение двух пересекающихся прямых (возможно определенных над квадратичным расширением поля* k*), пересекающихся в одной точке; или*
- C *— прямая с неприведенной структурой.*

Доказательство. Уравнение C — квадратичная форма на трехмерном пространстве. Покажем, что невырожденность формы равносильна гладкости кривой. В самом деле, производные уравнения — это линейные формы, являющиеся строками матрицы квадратичной формы, поэтому наличие у них общего нетривиального нуля равносильно тому, что ядро матрицы содержит нетривиальный вектор, то есть вырожденности формы.

Пусть теперь квадратичная форма вырождена. Если ее ядро одномерно, то возникающая на факторе квадратичная форма приводится к виду $x^2 - \lambda y^2$. Переходя в случае необходимости к расширению $\mathsf{k}(\sqrt{\lambda})$, можно считать, что $\sqrt{\lambda} \in \mathsf{k}$. Тогда этот многочлен раскладывается в произведение линейных $(x - \sqrt{\lambda}y)(x + \sqrt{\lambda}y)$, а его схема нулей является объединением двух прямых.

Если же ядро формы двумерно, то форма имеет вид f^2, где f — многочлен степени 1, значит коника является прямой с неприведенной структурой. □

Обозначим линейное расслоение $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(1)_{|C}$ на конике C через $\mathscr{L}_C$. По определению это то самое линейное расслоение на C, которое задает вложение C в $\mathbb{P}^2$.

Упражнение 2. *Покажите, что если* C *— гладкая коника и* $C(\mathsf{k}) \neq \emptyset$, *то* $C \cong \mathbb{P}^1$, *а* $\mathscr{L}_C \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(2)$.

Упражнение 3. *Классифицируйте квадрики любой размерности над полем нечетной характеристики.*

Лемма 2.2. *Если* C *— коника, то* $\Gamma(C, \mathscr{L}_C) = \mathsf{k}^3$.

Доказательство. Если C — гладкая, то $\Gamma(C, \mathscr{L}_C) = \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(2)) = \mathsf{k}^3$.

Если $C = L_1 \sqcup L_2$, то возникает точная последовательность $0 \to \mathscr{O}_{L_1}(-1) \to \mathscr{O}_C \to \mathscr{O}_{L_2} \to 0$. Подкручивая на $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(1)|_C$, получаем $0 \to \mathscr{O}_{L_1} \to \mathscr{L}_C \to \mathscr{O}_{L_2}(1) \to 0$, откуда следует $\dim \Gamma(C, \mathscr{L}_C) = 3$.

Наконец, если C — двойная прямая L, то есть точная тройка $0 \to \mathscr{O}_L(-1) \to \mathscr{O}_C \to \mathscr{O}_L \to 0$, и остается повторить те же аргументы. □

Замечание 2.3. Вообще-то, равенство $\Gamma(C, \mathscr{L}_C) = \mathsf{k}^3$ элементарно доказывается с помощью подкрученной резольвенты Кошуля

$$0 \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(1) \to \mathscr{L}_C \to 0$$

из общих свойств когомологий когерентных пучков и зануления $H^1(\mathbb{P}^2, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^2}(-2))$.

Упражнение 4. *Проверьте, что* $\Gamma(C, \mathscr{L}_C^d) = \mathsf{k}^{2d+1}$ *для любого* $d > 0$.

Коникой в $\mathbb{P}^n$ называется подсхема C, изоморфная плоской конике, так что $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1)_{|C} \cong \mathscr{L}_C$.

Следствие 2.4. *Если* $C \subset \mathbb{P}(W)$ *— коника, то найдется единственная плоскость* $\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}(W)$, *такая что* $C \subset \mathbb{P}^2$.

Доказательство. Вложение $C \to \mathbb{P}(W)$ задается морфизмом $W^* \otimes \mathscr{O}_C \to \mathscr{L}_C$. Ясно, что вложение в $\mathbb{P}(W)$ пропускается через вложение в подпространство $\mathbb{P}(U)$, $U \subset W$, тогда и только тогда, когда морфизм $W^* \otimes \mathscr{O}_C \to \mathscr{L}_C$ пропускается через $U^* \otimes \mathscr{O}_C$. Ясно, что $\dim U$ не может быть равно 2, так как иначе вложение $C \to \mathbb{P}(W)$ пропускалось бы через вложение $C \to \mathbb{P}^1$, что невозможно. Значит морфизм $W^* \to \Gamma(C, \mathscr{L}_C) = \mathsf{k}^3$ сюръективен (иначе мы могли бы взять в качестве U^* образ этого морфизма), значит единственная возможность выбрать U с $\dim U = 3$ — это взять в качестве U^* образ. $\square$

Следствие 2.5. *Всякая коника в $\mathbb{P}^n$ — это пересечение $\mathbb{P}^2$ и квадрики.*

Если мы хотим описать множество всех коник в $\mathbb{P}(W)$ — первое, что можно сделать — это рассмотреть множество всех пар плоскость-квадрика, то есть $\mathrm{Gr}(3, W) \times \mathbb{P}(S^2W^*)$. Однако, это не годится, так как квадрика определена коникой неоднозначно, то есть разным квадрикам могут соответствовать одинаковые коники. Более того, если квадрика содержит плоскость, то их пересечение вообще не является коникой (а является плоскостью).

Упражнение 5. *Множество коник в $\mathbb{P}(W)$ — это $\mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(3,W)}(S^2\mathscr{U}^*)(\mathsf{k})$.*

Упражнение 6. *Множество гладких коник в $\mathbb{P}(W)$ — это множество k-точек некоторой открытой подсхемы в $\mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(3,W)}(S^2\mathscr{U}^*)$ (опишите дополнение как схему нулей явного сечения явного линейного расслоения).*

Упражнение 7. *Множество неприведенных коник в $\mathbb{P}(W)$ — это множество k-точек некоторой замкнутой подсхемы в $\mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(3,W)}(S^2\mathscr{U}^*)$, которая изоморфна многообразию флагов $\mathrm{Fl}(2, 3; W)$.*

Упражнение 8. *Множество коник в подсхеме $X \subset \mathbb{P}(W)$ — это множество k-точек некоторой замкнутой подсхемы в $\mathbb{P}_{\mathrm{Gr}(3,W)}(S^2\mathscr{U}^*)$.*

3. Параметризация Чжоу

Докажем результат о параметризации произвольных семейств подмногообразий в $\mathbb{P}^n$ (а значит и в произвольных проективных многообразиях) с помощью так называемых “координат Чжоу”.

Начнем с подготовки. Пусть E — расслоение на схеме X. Говорят, что X порождается глобальными сечениями, если естественное отображение вычисления $\Gamma(X, E) \otimes \mathscr{O}_X \xrightarrow{\mathrm{ev}} E$ сюръективно.

Лемма 3.1. *Пусть X — целостная схема, E — расслоение на X, порожденное глобальными сечениями. Тогда для общего сечения $s \in \Gamma(X, E)$ либо $Z_s = \emptyset$, либо $\dim Z_s = \dim X - r(E)$. Иначе говоря, существует непустое открытое подмножество $U \subset \mathbb{P}(\Gamma(X, E))$, такое что это свойство выполнено для всякого $s \in U$. Более того, если X гладкое, то U можно выбрать так, что для всякого $s \in U$ схема $Z_s \subset X$ тоже гладкая.*

Доказательство. Обозначим $W := \Gamma(X, E)$ и пусть $F = \mathrm{Ker}(W \otimes \mathscr{O}_X \to E)$. Рассмотрим произведение $X \times \mathbb{P}(W)$ и проекции $p_1 \colon X \times \mathbb{P}(W) \to X$ и $p_2 \colon X \times \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(W)$. Рассмотрим также естественный морфизм пучков $f : p_2^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1) \hookrightarrow W \otimes \mathscr{O}_{X \times \mathbb{P}(W)} \xrightarrow{\mathrm{ev}} p_1^*E$ — композицию тавтологического вложения и морфизма вычисления (это “универсальное сечение” расслоения E). Покажем, что схема нулей $Z_f \subset X \times \mathbb{P}(W)$ совпадает с проективизацией $\mathbb{P}_X(F)$. Для этого рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & & p_2^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1) \arrow[dl, dashed] \arrow[d, hook] \arrow[dr, "f"] & & \\
0 \arrow[r] & p_1^*F \arrow[r] & W \otimes \mathscr{O}_{X \times \mathbb{P}(W)} \arrow[r, "\mathrm{ev}"] & p_1^*E \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

На схеме Z_f морфизм f равен нулю, поэтому существует пунктирная стрелка, задающая отображение $Z_f \to \mathbb{P}_X(F)$. Обратно, на схеме $\mathbb{P}_X(F) \subset X \times \mathbb{P}(W)$ вложение, соответствующее вертикальной стрелке пропускается через тавтологическое вложение, обозначенное пунктирной стрелкой, значит ограничение f равно нулю, значит $\mathbb{P}_X(F) \subset Z_f$. Отсюда следует искомое равенство.

Рассмотрим теперь проекцию $p_2 : Z_f \to \mathbb{P}(W)$. Заметим, что слой этой проекции над точкой $w \in \mathbb{P}(W)$ — это схема нулей в X соответствующего сечения расслоения E, а схема Z_f целостная (а в случае гладкого X — гладкая). Поэтому осталось заметить, что у морфизма целостных многообразий общий слой либо пуст, либо имеет размерность, равную разности размерностей этих многообразий, то есть $\dim Z_f - \dim \mathbb{P}(W)$, причем так как

$$\dim Z_f = \dim X + r(F) - 1 = \dim X + \dim W - r(E) - 1 = \dim X - r(E) + \dim \mathbb{P}(W),$$

она равна в точности $\dim X - r(E)$. Кроме того, у морфизма (сепарабельного) гладких многообразий общий слой гладок. □

Упражнение 9. *Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ замкнутая подсхема, $\operatorname{codim} X = m$. Проверьте, что для общей плоскости $\mathbb{P}^m \subset \mathbb{P}^n$ пересечение $X \cap \mathbb{P}^m$ — артинова подсхема, причем $\dim \Gamma(X \cap \mathbb{P}^m, \mathscr{O}_{X\cap\mathbb{P}^m})$ не зависит от выбора плоскости.*

Определение 3.2. Число $\dim \Gamma(X \cap \mathbb{P}^m, \mathscr{O}_{X\cap\mathbb{P}^m})$ для общей плоскости $\mathbb{P}^m \subset \mathbb{P}^n$ называется степенью подсхемы $X \subset \mathbb{P}^n$.

Также нам понадобится описание группы классов дивизоров на грассманиане.

Лемма 3.3. *Имеем $\operatorname{Pic} \operatorname{Gr}(m, W) \cong \mathbb{Z}$, причем образующей является линейное расслоение $\bigwedge^m \mathscr{U}^*$.*

Доказательство. Выберем разложение $W = V_0 \oplus V_1$, $\dim V_0 = m$. Подмногообразие

$$D = \{U \in \operatorname{Gr}(m, W) \mid U \cap V_0 \neq 0\} \subset \operatorname{Gr}(m, W)$$

является простым дивизором (морфизм $\operatorname{Gr}_{\mathbb{P}(V_1)}(m-1, (W \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(V_1)})/\mathscr{O}_{\mathbb{P}(V_1)}(-1)) \to \operatorname{Gr}(m, W)$ имеет D своим образом, значит D неприводимо). При этом, как мы уже проверяли, дополнение к D — аффинное пространство $\mathbb{A}(\operatorname{Hom}(V_0, V_1))$. Из точной последовательности

$$\mathbb{Z}D \to \operatorname{Pic} \operatorname{Gr}(m, V) \to \operatorname{Pic}(\operatorname{Gr}(m, W) \setminus D) \to 0$$

следует, что D порождает группу $\operatorname{Pic}(\operatorname{Gr}(m, W))$. Остается заметить, что D является схемой нулей сечения расслоения $\bigwedge^m \mathscr{U}^*$, соответствующего вложению $\bigwedge^m V_0^* \subset \bigwedge^m W^* = \Gamma(\operatorname{Gr}(m, W), \bigwedge^m \mathscr{U}^*)$, следовательно дивизору D соответствует расслоение $\bigwedge^m \mathscr{U}^*$. □

Линейное расслоение $\bigwedge^m \mathscr{U}^*$ на $\operatorname{Gr}(m, W)$ обозначается $\mathscr{O}_{\operatorname{Gr}(m,W)}(1)$, а его d-ая тензорная степень обозначается $\mathscr{O}_{\operatorname{Gr}(m,W)}(d)$.

Упражнение 10. *Пусть $0 \subset V_2 \subset V_1 \subset W$, $\dim V_2 < m < \dim V_1$. Проверьте, что функтор обратного образа для вложения $\operatorname{Gr}(k, V_1/V_2) \to \operatorname{Gr}(m, W)$ (где $k = m - \dim V_2$) переводит $\mathscr{O}_{\operatorname{Gr}(m,W)}(d)$ в $\mathscr{O}_{\operatorname{Gr}(k,V_1/V_2)}(d)$.*

Теперь все готово для конструкции.

Пусть $X \subset \mathbb{P}(W)$ — неприводимая подсхема коразмерности m и степени d. Пусть $\dim W = n$. Рассмотрим грассманиан $\operatorname{Gr}(m, W)$ и многообразие флагов $\operatorname{Fl}(1, m; W) \subset \mathbb{P}(W) \times \operatorname{Gr}(m, W)$ и пусть p и q — проекции $\operatorname{Fl}(1, m; W)$ на $\mathbb{P}(W)$ и $\operatorname{Gr}(m, W)$ соответственно. Положим

$$Z_X = \operatorname{Gr}_X(m-1, (W \otimes \mathscr{O}_X)/\mathscr{O}_X(-1)) \cong X \times_{\mathbb{P}(W)} \operatorname{Fl}(1, m; W) = p^{-1}(X) \subset X \times \operatorname{Gr}(m, W).$$

Наконец, пусть $D_X = q(Z_X) \subset \operatorname{Gr}(m, W)$. Ясно, что D_X — неприводимое замкнутое подмножество.

Теорема 3.4. *Подсхема $D_X \subset \operatorname{Gr}(m, W)$ — схема нулей сечения расслоения $\mathscr{O}_{\operatorname{Gr}(m,W)}(d)$. Если подсхема $X \subset \mathbb{P}(W)$ приведена, то она однозначно восстанавливается по D_X.*

Доказательство. Во-первых, заметим, что морфизм p — локально тривиальное расслоение со слоем $\mathrm{Gr}(m-1,n-1)$. Поэтому $\operatorname{codim}_{\mathrm{Fl}(1,m;W)} Z_X = \operatorname{codim} X = m$. Значит

$$\dim D_X \le \dim Z_X = \dim \mathrm{Gr}(m,W) + (m-1) - m = \dim \mathrm{Gr}(m,W) - 1.$$

Выберем теперь общее подпространство $U_1 \subset W$ размерности $m+1$ (так чтобы $X \cap \mathbb{P}(U_1)$ было артиновой подсхемой), и общее подпространство $U_2 \subset U_1$ размерности $m-1$ (так чтобы $X \cap \mathbb{P}(U_2) = \varnothing$). Тогда рассмотрим $L_{U_1,U_2} = \{U \in \mathrm{Gr}(m,W) \mid U_2 \subset U \subset U_1\} \cong \mathbb{P}(U_1/U_2)$. Ясно, что $D_X \cap L_{U_1,U_2}$ — подсхема длины d. Отсюда следует, что D_X дивизор. В самом деле, заметим, что $\mathrm{Gr}(m,U_1) \subset \mathrm{Gr}(m,W)$ — схема нулей сечения расслоения $(\mathscr{U}^*)^{\oplus(n-m-1)}$, которое порождается глобальными сечениями, а $L_{U_1,U_2} \subset \mathrm{Gr}(m,U_1)$ — схема нулей сечения расслоения $(U_1/\mathscr{U})^{\oplus(m-1)}$, которое тоже порождается глобальными сечениями, поэтому $\operatorname{codim}_{L_{U_1,U_2}}(D_X \cap L_{U_1,U_2}) = \operatorname{codim} D_X$. Остается заметить, что если $\mathscr{O}(k)$ — линейное расслоение, соответствующее дивизору D_X, то дивизору $D_X \cap L_{U_1,U_2}$ на L_{U_1,U_2} также соответствует расслоение $\mathscr{O}(k)$, поэтому $k = d$.

Покажем теперь, как X восстановить по D_X. Заметим для этого, что если $x \in \mathbb{P}(W) \setminus X$ — произвольная точка, то для общего $U \in q(p^{-1}(x))$ пересечение $\mathbb{P}(U) \cap X$ пусто, то есть $q(p^{-1}(x)) \not\subset D_X$, в то время как для $x \in X$ имеем $q(p^{-1}(x)) \subset D_X$ по построению. Значит

$$X = \{x \in X \mid q(p^{-1}(x)) \subset D_X\}.$$

Если X приведена, то схемная структура на X восстанавливается однозначно. □

Упражнение 11. *Покажите, что L_{U_1,U_2} — прямая на грассманиане $\mathrm{Gr}(m,W)$ и что всякая прямая на $\mathrm{Gr}(m,W)$ имеет такой вид. Иначе говоря, $F_1(\mathrm{Gr}(m,W)) = \mathrm{Fl}(m-1,m+1;W)$.*

Остается заметить, что множество всех дивизоров, соответствующих расслоению $\mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(m,W)}(d)$ — это проективное пространство $\mathbb{P}(V)$, $V = \Gamma(\mathrm{Gr}(m,W), \mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(m,W)}(d))$. Мы показали, что всякая подсхема $X \subset \mathbb{P}(W)$ коразмерности m и степени d соответствует точке в нем. Отдельно можно проверить, что в $\mathbb{P}(V)$ существует локально замкнутое подмножество $C_{n-1,n-1-m,d}$ (которое называется схема Чжоу) такое что подсхемы X соответствуют его k-точкам. Однородные координаты на $\mathbb{P}(V)$ дают систему координат на $C_{n-1,n-1-m,d}$, которые называются координаты Чжоу.

Упражнение 12. *Покажите, что $C_{n,n-1,d} = \mathbb{P}(S^d W^*)$.*

Упражнение 13. *Покажите, что $C_{n,k,1} = \mathrm{Gr}(k+1,n+1)$.*

Пример 3.5. Рассмотрим нульмерные подсхемы степени 2 в $\mathbb{P}^n$. Тогда $m = n$, $\mathrm{Gr}(m,n+1) = \mathbb{P}^n$ (двойственное проективное пространство), а D_X — объединение двух гиперплоскостей (если X — две различные точки), либо двойная плоскость (если X — подсхема длины 2, сосредоточенная в одной точке). На этом примере хорошо видно, что приведенность X необходима для восстановления X по D_X.

Упражнение 14. *Покажите, что $C_{n,0,2} = D_2(\varphi)$, где $\varphi : W \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(S^2W^*)} \to W^* \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(S^2W^*)}$. Проверьте, что для $n = 2$ — это гиперповерхность степени 3 в $\mathbb{P}^5$.*

Упражнение 15. *Опишите схему Чжоу $C_{3,1,2}$ кривых степени 2 в $\mathbb{P}^3$.*