# Многообразия модулей

## 1. Функторы точек

На прошлой лекции мы установили, что множества различных алгебро-геометрических объектов часто находятся в биекции с множеством точек некоторых алгебраических многообразий. Естественно, хотелось бы, чтобы эти многообразия не падали с неба, а определялись однозначно изучаемыми множествами объектов. При этом очевидно, что множество $\mathsf{k}$-точек схемы $X$ не может определять схему однозначно — ясно, что на почти всех схемах множества $\mathsf{k}$-точек равномощны. Поэтому нужна какая-то дополнительная структура. Наиболее удобной, оказывается структура "функтора точек".

Пусть $X$ — произвольная схема. Напомним, что $\mathsf{k}$-точка схемы $X$ — это морфизм $\operatorname{Spec}\mathsf{k} \to X$. Аналогично, $S$-**точкой схемы** $X$ (где $S$ — произвольная схема), называется морфизм $S \to X$. Множество $S$-точек схемы $X$ обозначается $X(S)$. Таким образом, $X(S) = \operatorname{Map}(S, X)$.

Заметим, что сопоставление $S \mapsto X(S)$ является контравариантным функтором на категории схем — морфизму $f\colon S' \to S$ очевидно сопоставляется морфизм $f^*\colon X(S) \to X(S')$, переводящий $S$-точку $S \to X$ в $S'$-точку $S' \xrightarrow{f} S \to X$. Обозначим этот функтор $h_X$. Итак,

$$h_X\colon \mathrm{Sch}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Sets}, \qquad h_X(S) = X(S).$$

где Sch — категория схем, а Sets — категория множеств. Оказывается, по функтору точек схема восстанавливается однозначно.

**Предложение 1.1.** *Если функторы точек $h_X$ и $h_Y$ изоморфны, то и схемы $X$ и $Y$ изоморфны. Более того, для любого функтора $F\colon \mathrm{Sch}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Sets}$ имеется изоморфизм*

$$\operatorname{Hom}(h_X, F) \cong F(X).$$

*В частности,* $\operatorname{Hom}(h_X, h_Y) = h_Y(X) = Y(X) = \operatorname{Map}(X, Y)$.

*Доказательство.* Это совершенно общекатегорное утверждение известное как лемма Ионеды. Докажем его. Пусть $\alpha\colon h_X \to F$ — морфизм функторов, то есть набор морфизмов $\alpha_S\colon h_X(S) \to F(S)$ для всех схем $S$, таких что квадраты

$$\begin{tikzcd} h_X(S) \arrow[r, "\alpha_S"] \arrow[d, "h_X(\varphi)"'] & F(S) \arrow[d, "F(\varphi)"] \\ h_X(S') \arrow[r, "\alpha_{S'}"] & F(S') \end{tikzcd}$$

коммутативны для всех морфизмов $\varphi\colon S' \to S$. В частности он дает морфизм $\alpha_X\colon h_X(X) \to F(X)$. Но $h_X(X) = \operatorname{Map}(X, X)$ содержит выделенный элемент, $\mathrm{id}_X$. Положим

$$f_\alpha := \alpha_X(\mathrm{id}_X) \in F(X).$$

Обратно, пусть $f \in F(X)$. Каждой схеме $S$ и каждому морфизму $\varphi\colon S \to X$ сопоставим элемент $F(\varphi)(f) \in F(S)$ — образ $f$ под действием морфизма $F(\varphi)\colon F(X) \to F(S)$. Тем самым получаем сопоставление $\varphi \mapsto F(\varphi)(f)$, то есть отображение $h_X(S) \to F(S)$. Оно является морфизмом функторов $h_X \to F$, так как коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} h_X(S) \arrow[r] \arrow[d, "h_X(g)"'] & F(S) \arrow[d, "F(g)"] \\ h_X(S') \arrow[r] & F(S') \end{tikzcd}$$

для всякого морфизма $g\colon S' \to S$ очевидна. Действительно, в одном случае $\varphi\colon S \to X$ переходит сначала в $h_X(g)(\varphi) = \varphi \circ g\colon S' \to X$, а затем в $F(\varphi \circ g)(f)$, а в другом — сначала в $F(\varphi)(f)$, а затем в $F(g)(F(\varphi)(f))$. Но $F(\varphi \circ g)(f) = F(g)(F(\varphi)(f))$ в силу функториальности $F$.

Обозначим полученный морфизм функторов через $\alpha_f\colon h_X \to F$. Тогда ясно, что

$$\alpha_{f_\alpha}(\varphi) = F(\varphi)(f_\alpha) = F(\varphi)(\alpha_X(\mathrm{id}_X)) = \alpha_S(h_X(\varphi)(\mathrm{id}_X)) = \alpha_S(\mathrm{id}_X \circ \varphi) = \alpha_S(\varphi),$$

так что $\alpha_{f_\alpha} = \alpha$. Обратно,

$$f_{\alpha_f} = \alpha_f(\mathrm{id}_X) = F(\mathrm{id}_X)(f) = \mathrm{id}_{F(X)}(f) = f.$$

Таким образом, мы убедились, что $\mathrm{Hom}(h_X, F) = F(X)$. Равенство $\mathrm{Hom}(h_X, h_Y) = \mathrm{Map}(X, Y)$ сразу отсюда следует. Наконец, если $h_X \cong h_Y$, то взаимно обратные морфизмы $h_X \to h_Y$ и $h_Y \to h_X$ обязаны происходить из морфизмов $X \to Y$ и $Y \to X$, которые в силу доказанного равенства обязаны быть взаимно обратными. $\square$

Доказанное утверждение на самом деле довольно удивительно. Оно говорит о том, что хотя знания множества $\mathsf{k}$-точек схемы совершенно недостаточно, для того чтобы эту схему описать, но знания всех $S$-точек для всех $S$ (как функтора из категории схем) уже вполне достаточно. Иначе говоря, топология и кольцо функций закодированы в функториальности этого соответствия.

## 2. Представимые функторы и универсальные семейства

Пусть теперь задан произвольный функтор $F\colon \mathrm{Sch}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Sets}$.

**Определение 2.1.** Функтор $F$ называется представимым, если существует схема $M$ и изоморфизм функторов $h_M \cong F$. В этом случае говорят, что $M$ — тонкое многообразие модулей, соответствующее функтору $F$.

**Пример 2.2.** Пусть $W$ — векторное пространство. Рассмотрим такой функтор $F\colon \mathrm{Sch}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Sets}$. Каждой схеме $S$ сопоставим множество линейных подрасслоений $\epsilon\colon \mathscr{L} \subset W \otimes \mathscr{O}_S$, с точностью до эквивалентности $(\mathscr{L}, \epsilon) \sim (\mathscr{L}', \epsilon')$, если существует изоморфизм $\varphi\colon \mathscr{L}' \to \mathscr{L}$, такой что $\epsilon' = \epsilon \circ \varphi$. Тогда функтор $F$ представим, а соответствующее тонкое многообразие модулей — $\mathbb{P}(W)$.

**Пример 2.3.** Пусть $W$ — векторное пространство. Рассмотрим такой функтор $F\colon \mathrm{Sch}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Sets}$. Каждой схеме $S$ сопоставим множество подрасслоений $\epsilon\colon \mathscr{E} \subset W \otimes \mathscr{O}_S$ ранга $r$, с точностью до эквивалентности $(\mathscr{E}, \epsilon) \sim (\mathscr{E}', \epsilon')$, если существует изоморфизм $\varphi\colon \mathscr{E}' \to \mathscr{E}$, такой что $\epsilon' = \epsilon \circ \varphi$. Тогда функтор $F$ представим, а соответствующее тонкое многообразие модулей — $\mathrm{Gr}(r, W)$.

**Упражнение 1.** *Напишите функтор, чье тонкое многообразие модулей — многообразие флагов.*

**Пример 2.4.** Пусть $E$ — векторное расслоение на схеме $X$. Рассмотрим функтор $F\colon \mathrm{Sch}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Sets}$, сопоставляющий схеме $S$ множество морфизмов $f\colon S \to X$ и линейных подрасслоений $\epsilon\colon \mathscr{L} \subset f^*E$, с точностью до эквивалентности $(f, \mathscr{L}, \epsilon) \sim (f', \mathscr{L}', \epsilon')$, если $f' = f$ и существует изоморфизм расслоений $\varphi\colon \mathscr{L}' \to \mathscr{L}$, такой что $\epsilon' = \epsilon \circ \varphi$. Тогда функтор $F$ представим, а соответствующее тонкое многообразие модулей — $\mathbb{P}_X(E)$.

**Упражнение 2.** *Напишите функтор, тонкое многообразие модулей которого — это* $\mathrm{Gr}_X(r, E)$.

Пусть функтор $F$ представим, а соответствующее тонкое многообразие модулей — $M$. Тогда в множестве $F(M)$ есть выделенный элемент — элемент, соответствующий тождественному морфизму $\mathrm{id}_M \in \mathrm{Map}(M, M) = h_M(M)$ при изоморфизме $F \cong h_M$. Этот элемент называется универсальным семейством на $M$.

**Пример 2.5.** В примере 2.2 универсальное семейство — это тавтологическое вложение

$$\mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}(-1) \hookrightarrow W \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}(W)}.$$

**Пример 2.6.** В примере 2.3 универсальное семейство — это тавтологическое вложение

$$\mathscr{U} \hookrightarrow W \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{Gr}(r,W)}.$$

**Пример 2.7.** В примере 2.4 универсальное семейство — это проекция $p\colon \mathbb{P}_X(\mathscr{E}) \to X$ и тавтологическое вложение $\mathscr{O}_{\mathbb{P}_X(E)}(-1) \hookrightarrow p^*E$.

Полезно понимать, что на языке многообразий модулей и универсальных семейств лемма Ионеды имеет следующую переформулировку.

**Предложение 2.8.** *Пусть $F\colon \mathrm{Sch}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Sets}$ — функтор, обладающий тонким многообразием модулей $M$, а $\mathfrak{u} \in F(M)$ — соответствующее универсальное семейство. Тогда морфизмы $S \to M$ находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами множества $F(S)$, причем если $\varphi\colon S \to M$ соответствует элементу $f \in F(S)$, то $f = F(\varphi)(\mathfrak{u})$.*

## 3. Функтор подсхем, многочлен Гильберта и плоские пучки

Вернемся к вопросу о параметризации семейств замкнутых подсхем в фиксированном многообразии $X$. Попробуем определить подходящий функтор $F\colon \mathrm{Sch}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Sets}$. Представим себе, что существует алгебраическое многообразие $H_X$, параметризующее все замкнутые подсхемы в $X$. Ясно, что соответствующим универсальным семейстом должна быть замкнутая подсхема $Z_X \subset X \times H_X$ — действительно, если такая подсхема задана, то точкам из $H_X$ можно сопоставлять слои $Z_X$, которые естественным образом являются замкнутыми подсхемами в $X$. Аналогично, для каждой $S$-точки схемы $H_X$, то есть морфизма $S \to H_X$, можно будет рассмотреть расслоенное произведение $Z_X \times_{H_X} S$ — это будет подсхема в $(X \times H_X) \times_{H_X} S = X \times S$. Таким образом, естественно определить $F(S)$ как множество замкнутых подсхем в $Z \subset X \times S$, возможно с какими-то ограничениями.

Естественное ограничение — слои морфизма $Z \to S$ должны быть “похожими”. Например, если общий слой — точка, то специальный слой тоже должен быть точкой, а не двумя точками. Или, например, если общий слой — коника, то и специальный слой должен быть коникой. Вопрос — как такого рода ограничения сформулировать математически.

Можно, например, рассматривать только такие подсхемы $Z \subset X \times S$, что морфизм $Z \to S$ является локально тривиальным расслоением. Это было бы вполне разумным условием в дифференциальной геометрии, но в алгебраической геометрии — это слишком сильное условие. Конечно, оно запрещает появление лишних точек в слоях, но также оно запрещает и вырождения коник. Поэтому условие локальной тривиальности не годится.

Достаточно разумным со всех точек зрения условием оказывается условие сохранения всех численных инвариантов слоев, в конце концов приводящие к понятию плоскости.

**Лемма 3.1.** *Пусть $\mathscr{F}$ — когерентный пучок на проективном пространстве $\mathbb{P}^n$. Существует единственный многочлен $\mathrm{P}_{\mathscr{F}}(t) \in \mathbb{Q}[t]$ с рациональными коэфициентыми степени не выше $n$, так что*

$$\mathrm{P}_{\mathscr{F}}(t) = \dim(H^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}(t))) \qquad \text{для всех целых } t \gg 0.$$

*Доказательство.* Положим

$$\mathrm{P}_{\mathscr{F}}(t) := \chi(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}(t)) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim(H^i(\mathbb{P}^n, \mathscr{F}(t))).$$

Ясно, что правая часть равенства определена при всех $t \in \mathbb{Z}$, причем при $t \gg 0$ старшие когомологии зануляются, поэтому она совпадает с размерностью $H^0$. Таким образом, достаточно проверить, что это выражение полиномиально зависит от $t$. Будем доказывать это индукцией по $n$.

База индукции — $n = 0$ — очевидна, так как в этом случае $\mathscr{F}$ является векторным пространством, подкрутка никак его не меняет, и значит $\mathrm{P}_{\mathscr{F}}(t)$ — константа, равная размерности $\mathscr{F}$.

Пусть теперь $n > 0$. Рассмотрми линейную функцию $f$ на $\mathbb{P}^n$, которая не аннулирует никакое локальное сечение $\mathscr{F}$ (иначе говоря, соответствующая гиперплоскость $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$ не содержит носитель никакой ассоциированной точки пучка $\mathscr{F}$). Получим точную последовательность

$$0 \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \xrightarrow{f} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{n-1}} \to 0.$$

Домножим ее на $\mathscr{F}(t)$, получим точную тройку

$$0 \to \mathscr{F}(t-1) \xrightarrow{f} \mathscr{F}(t) \to \mathscr{F}|_{\mathbb{P}^{n-1}}(t) \to 0.$$

Рассматривая длинную точную последовательность когомологий и альтернированную сумму их размерностей, получаем равенство

$$\mathrm{P}_{\mathscr{F}|_{\mathbb{P}^{n-1}}}(t) = \mathrm{P}_{\mathscr{F}}(t) - \mathrm{P}_{\mathscr{F}}(t-1).$$

Левая часть, по предположению индукции, является многочленом от $t$ (степени не выше $n-1$). Легко видеть, что тогда существует единственный многочлен от $t$ (на единицу большей степени), равный в целых точках $\mathrm{P}_{\mathscr{F}}(t)$. $\square$

Многочлен $\mathrm{P}_{\mathscr{F}}(t)$, описанный в предыдущей лемме называется **многочленом Гильберта** пучка $\mathscr{F}$. Теорема Римана–Роха позволяет его явно вычислить в терминах характера Черна $\mathrm{ch}(\mathscr{F})$ пучка $\mathscr{F}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_{\mathscr{F}}(t) &= \deg((\exp(tH)\,\mathrm{ch}(\mathscr{F})\,\mathrm{Td}(\mathbb{P}^n)) \\ &= \deg\left(\left(1 + tH + \cdots + \frac{t^n}{n!}H^n\right)(r(\mathscr{F}) + \mathrm{ch}_1(\mathscr{F}) + \cdots + \mathrm{ch}_n(\mathscr{F}))(1 + \mathrm{Td}_1 + \cdots + \mathrm{Td}_n)\right),\end{aligned}$$

где $H$ — класс гиперплоскости, $\mathrm{Td}_i$ — коэффициенты класса Тодда проективного пространства $\mathbb{P}^n$, а $\deg$ — функция степени на старших когомологиях.

Пусть теперь $X$ — проективное многообразие, а $\mathscr{L}$ — очень обильный пучок на $X$. Тогда существует естественное вложение $i\colon X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$, такое что $\mathscr{L} \cong i^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$. По формуле проекции

$$H^p(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^t) \cong H^p(\mathbb{P}^n, i_*(\mathscr{F} \otimes i^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(t))) \cong H^p(\mathbb{P}^n, i_*\mathscr{F}(t)),$$

поэтому при всех $t \gg 0$

$$\dim H^0(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^t) = \mathrm{P}_{i_*\mathscr{F}}(t)$$

является многочленом, который называется многочленом Гильберта пучка $\mathscr{F}$ относительно линейного расслоения $\mathscr{L}$. Он существенно зависит от выбора линейного расслоения.

**Теорема 3.2.** *Пусть $f\colon X \to S$ проективный морфизм на связную приведенную схему $S$, $\mathscr{L}$ — относительно очень обильное линейное расслоение на $X$, а $\mathscr{F}$ — когерентный пучок на $X$. Каждой точке $s \in S$ сопоставим многочлен Гильберта*

$$p_{\mathscr{F},s}(t) := \mathrm{P}_{\mathscr{F}|_{X_s}}(t),$$

*где $X_s = f^{-1}(s)$ — слой схемы $X$ над точкой $s$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *многочлен $p_{\mathscr{F},s}(t) \in \mathbb{Q}[t]$ не зависит от точки $s$;*
(2) *для всякой точки $x \in X$ выполнено $\mathrm{Tor}_{>0}^{\mathscr{O}_{S,s}}(\mathscr{F}_{X,x}, -) = 0$, где $s = f(x)$.*

Доказывать эту теорему мы не будем (ее доказательство легко найти в любом учебнике). Для нас она, скорее, является мотивацией для следующего определения.

**Определение 3.3.** Пусть $X$ — схема над $S$, а $\mathscr{F}$ — квазикогерентный пучок на $X$. Пучок $\mathscr{F}$ — плоский над $S$, если для всех точек $x \in X$ выполнено условие $\mathrm{Tor}_{>0}^{\mathscr{O}_{S,s}}(\mathscr{F}_{X,x}, -) = 0$, где $s = f(x)$. Аналогично, схема $X$ — плоская над $S$, если ее структурный пучок $\mathscr{O}_X$ — плоский над $S$.

В общем случае, плоскость пучка и постоянность многочлена Гильберта не эквивалентны.

**Пример 3.4.** Пусть $X = (\mathbb{P}^1 \times S) \setminus \{x\}$, где $x$ — замкнутая точка, а $\mathscr{F} = \mathscr{O}_X$. Тогда $\mathscr{F}$ плоский над $S$, хотя $p_{\mathscr{F},s}(t) = 1 + t$ при $s \neq f(x)$, но $p_{\mathscr{F},s}(t) = t$ при $s = f(x)$.

**Пример 3.5.** Пусть $X = S = S_1 \sqcup S_2$ — несвязное объединение двух компонент, $\mathscr{F} = \mathscr{O}_{S_1} \oplus \mathscr{O}_{S_2}^{\oplus 2}$. Тогда $\mathscr{F}$ плоский над $S$, хотя $p_{\mathscr{F},s}(t) = i$ при $s \in S_i$.

Если $\mathscr{F}$ не когерентен, то его многочлен Гильберта не вполне определен, поэтому и говорить о равносильности не приходится. Наконец, если $S$ не приведена, то многочлен Гильберта пучка не содержит никакой информации о действии нильпотентов и не может контролировать плоскость.

**Пример 3.6.** Пусть $X = S = \mathrm{Spec}(\mathsf{k}[u]/u^2)$, $\mathscr{F} = \mathsf{k}[u]/u^2$ и $\mathscr{G} = \mathsf{k}$. Тогда для единственной точки $s \in S$ имеем $\mathscr{F}_s \cong \mathscr{G}_s \cong \mathsf{k}$, поэтому $p_{\mathscr{F},s} = p_{\mathscr{G},s} = 1$, но при этом пучок $\mathscr{F}$ плоский, а пучок $\mathscr{G}$ — нет.

**Упражнение 3.** *Покажите, что если $X = S$ и $\mathscr{F}$ — когерентен, то $\mathscr{F}$ плоский над $S$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{F}$ локально свободен.*

**Упражнение 4.** *Пусть $f\colon X \to S$ — проективный морфизм, а $\mathscr{F}$ — когерентный пучок на $X$, плоский над $S$. Тогда существует покрытие $S$ непересекающимися открытыми подсхемами*

$$S = \bigsqcup_{p \in \mathbb{Q}[t]} S_p,$$

*так что для всякой точки $s \in S_p$ выполнено $p_{\mathscr{F},s} = p$.*

## 4. Функтор Hilb и функтор Quot

Пусть $X$ — схема. Определим функтор **Hilb** формулой

$$\mathbf{Hilb}_X(S) = \{Z \subset X \times S \mid Z \text{ — замкнутая подсхема, плоская над } S\},$$

причем, если $f\colon S' \to S$ — морфизм, и $Z \in \mathbf{Hilb}_X(S)$, положим $\mathbf{Hilb}_X(f)(Z) := Z \times_S S'$. Легко видеть, что схема $Z \times_S S'$ плоская над $S'$, поэтому определение корректно и задает контравариантный функтор их категории схем в категорию множеств.

Если схема $X$ проективна (и на ней фиксировано очень обильное линейное расслоение, задающее ее вложение в проективное пространство), то также можно определить функтор

$$\mathbf{Hilb}^p_X(S) = \{Z \subset X \times S \mid Z \text{ — замкнутая подсхема, плоская над } S, \text{ причем } p_{\mathscr{O}_Z,s} = p \text{ для всех } s \in S\},$$

где $p$ — произвольный многочлен с рациональными коэффициентами, принимающий целые значения в целых точках.

Следующая важная теорема, доказанная Гротендиком, является основой докзательства представимости разных алгебро-геометрических функторов.

**Теорема 4.1.** *Пусть $X$ — проективная схема, и $p$ — многочлен с рациональными коэффициентами, принимающий целые значения в целых точках. Тогда функтор $\mathbf{Hilb}^p_X$ представим проективной схемой $\mathrm{Hilb}^p_X$.*

**Следствие 4.2.** *Если $X$ — проективная схема, то функтор $\mathbf{Hilb}_X$ представим схемой*

$$\mathrm{Hilb}_X := \bigsqcup_{p \in \mathbb{Q}[t]} \mathrm{Hilb}^p_X,$$

*где объединение берется по всем целозначным многочленам.*

*Доказательство.* Пусть $S$ — схема и $Z \in \mathbf{Hilb}_X(S)$, то есть $Z \subset X \times S$ — замкнутая подсхема плоская над $S$. В силу Упражнения 4 существует разбиение $S = \bigsqcup S_p$, такое что многчлен Гильберта подсхемы $Z \times_S S_p \subset X \times S_p$ равен $p$, то есть $Z \times_S S_p \in \mathbf{Hilb}^p_X(S_p)$. По теореме Гротендика существует единственное отображение $f_p\colon S_p \to \mathrm{Hilb}^p_X$, такое что $Z \times_S S_p$ индуцировано универсальной подсхемой. Положим

$$f_Z = \sqcup_p f_p\colon S = \bigsqcup_p S_p \to \bigsqcup_p \mathrm{Hilb}^p_X\,.$$

Сопоставление $Z \mapsto f_Z$ задает мофризм функторов $\mathbf{Hilb}_X \to h_{\sqcup_p \mathrm{Hilb}^p_X}$. Легко видеть, что этот морфизм является изоморфизмом. □

На самом деле, мы только что проверили, что функтор $\mathbf{Hilb}_X$ является несвязным объединением функторов $\mathbf{Hilb}^p_X$ по всем целозначным многочленам $p(t)$ в следующем смысле. **Несвязным объединением** функторов $F_i\colon \mathrm{Sch}^{\mathrm{opp}} \to \mathrm{Sets}$, $i \in I$ называется функтор

$$\left(\bigsqcup_{i\in I} F_i\right)(S) = \bigsqcup_{\varphi\colon S \to I} \left(\prod_{i\in I} F_i(\varphi^{-1}(i))\right),$$

где $\varphi$ пробегает множество всех непрерывных отображений $S \to I$ ($I$ рассматривается с дискретной топологией), а произведение берется по тем $i$, для которых $\varphi^{-1}(i)$ непусто.

**Упражнение 5.** *Покажите, что функтор $\bigsqcup F_i$ представим тогда и только тогда, когда каждый из функторов $F_i$ представим, причем многообразие модулей функтора $\bigsqcup F_i$ — несвязное объединению многообразий модулей функторов $F_i$.*

Следующее важное обобщение функтора **Hilb** тоже довольно полезно. Пусть $X$ — схема, а $\mathscr{E}$ — когерентный пучок на $X$. Обределим функтор **Quot** формулой

$$\mathbf{Quot}^{\mathscr{E}}_X(S) = \{(\mathscr{F},\varphi) \mid \mathscr{F} \in \mathrm{coh}(X\times S),\ \mathscr{F} \text{ — плоский над } S, \text{ а } \varphi\colon \mathscr{E}\boxtimes\mathscr{O}_S \twoheadrightarrow \mathscr{F} \text{ — эпиморфизм}\}.$$

**Лемма 4.3.** *Имеется изоморфизм функторов $\mathbf{Hilb}_X \cong \mathbf{Quot}^{\mathscr{O}_X}_X$.*

*Доказательство.* Пусть дана $Z \in \mathrm{Hilb}_X(S)$ — плоская над $S$ замкнутая подсхема в $X \times S$. Сопоставим ей пучок $\mathscr{O}_Z \in \mathrm{coh}(X\times S)$ вместе с естественной сюръекцией $\varphi_Z\colon \mathscr{O}_X \boxtimes \mathscr{O}_S = \mathscr{O}_{X\times S} \twoheadrightarrow \mathscr{O}_Z$. Очевидно, $(\mathscr{O}_Z,\varphi_Z) \in \mathbf{Quot}^{\mathscr{O}_X}_X(S)$. Аналогично, если $(\mathscr{F},\varphi) \in \mathbf{Quot}^{\mathscr{O}_X}_X(S)$, то сюръекция $\varphi\colon \mathscr{O}_{X\times S} \twoheadrightarrow \mathscr{F}$ определяет подсхему $Z \subset X \times S$, такую что $\mathscr{O}_Z = \mathscr{F}$. Ясно, что $Z \in \mathbf{Hilb}_X(S)$. Более того, построенные соответствия очевидно биективны и функториальны. □

**Упражнение 6.** *Покажите, что функтор $\mathbf{Quot}^{\mathscr{E}}_X$ является несвязным объединением $\bigsqcup \mathbf{Quot}^{\mathscr{E},p}_X$.*

**Упражнение 7.** *Покажите, что $\mathbf{Hilb}^p_X = \mathbf{Quot}^{\mathscr{O}_X,p}_X$.*

Теорема о представимости функтора **Hilb** является частным случаем более общей теоремы о представимости функтора **Quot**, также доказанной Гротендиком.

**Теорема 4.4.** *Пусть $X$ — проективная схема, $\mathscr{E}$ — когерентный пучок на $X$, а $p$ — многочлен с рациональными коэффициентами, принимающий целые значения в целых точках. Тогда функтор $\mathbf{Quot}^{\mathscr{E},p}_X$ представим проективной схемой $\mathrm{Quot}^{\mathscr{E},p}_X$.*

**Упражнение 8.** *Покажите, что*

(а) *функтор $\mathbf{Hilb}^1_X$ представляется схемой $X$;*
(б) *функтор $\mathbf{Hilb}^{1+m}_{\mathbb{P}^n}$ представляется схемой $\mathrm{Gr}(2,n+1)$;*
(в) *функтор $\mathbf{Quot}^{W,r}_{\mathrm{Spec}\,\mathsf{k}}$ представляется схемой $\mathrm{Gr}(r,W^*)$.*

*Во всех случаях опишите универсальные семейства.*