Категории и функторы

Разнообразные группы (ко)гомологий встречаются в алгебре и геометрии повсеместно. Например,

(1) когомологии топологических пространств (с коэффициентами в пучке) — в топологии;
(2) группа Брауэра $H^2(\mathrm{Gal}(\mathsf{k}), \mathsf{k}^*)$ — в теории центральных простых алгебр;
(3) когомологии конечных и проконечных групп — в алгебраической теории чисел;
(4) группа расширений $\mathrm{Ext}^1(M, N)$ — в коммутативной алгебре;
(5) теория дефформаций и препятствий — в любом разделе геометрии.

Поэтому довольно важно понимать структуру когомологических функторов и иметь удобные средства для их вычисления. Наиболее естественной средой для этого является подходящая производная категория. Использование производных категорий позволяет единообразно работать с любыми когомологическими функторами, дает удобные средства для их вычисления и позволяет переносить результаты из одной области математики в другую. Иными словами, это наиболее приспособленный язык для такого рода вопросов.

Часть 1. Категории и функторы

Напомним, что категория $\mathcal{C}$ — это

- класс $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, элементы которого называются объектами $\mathcal{C}$;
- для каждой пары $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ множество $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, элементы которого называются морфизмами в $\mathcal{C}$ и обозначаются $\phi : X \to Y$;
- для каждой тройки $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ отображение $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$, которое называется композицией морфизмов и обозначается $\phi, \psi \mapsto \psi\phi = \psi \circ \phi$;

удовлетворяющие двум аксиомам

C1: для всякого объекта $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ существует тождественный морфизм $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$, для которого $\mathrm{id}_X \circ \phi = \phi$ и $\psi \circ \mathrm{id}_X = \psi$ для всех $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$, $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$;
C2: композиция морфизмов ассоциативна — $\chi \circ (\psi \circ \phi) = (\chi \circ \psi) \circ \phi$ для всех $X, Y, Z, W \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и $\chi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$, $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W)$.

Иногда для краткости мы будем писать $X \in \mathcal{C}$ вместо $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и $\phi \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ вместо $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ (если ясно о какой категории идет речь).

Любые структуры, рассматриваемые в алгебре и геометрии являются объектами подходящей категории.

Примеры 1.1. (1) категория множеств Sets;
(2) категория топологических пространств Top;
(3) категория алгебраических многообразий над фиксированным полем Var/k;
(4) категория групп Gr;
(5) категория абелевых групп Ab;
(6) категория колец Rings;
(7) категория коммутативных колец Comm;
(8) категории левых и правых модулей над кольцом $R-\mathsf{mod}$ и $\mathsf{mod}-R$;
(9) категория векторных расслоений на топологическом пространстве $\mathsf{VB}(X)$;
(10) категория пучков абелевых групп $\mathsf{Sh}(X)$;
(11) категория квазикогерентных пучков на алгебраическом многообразии $\mathsf{Qcoh}(X)$;
(12) пусть I — частично упорядоченное множество; положим $\mathrm{Ob}\,\mathcal{I} = I$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i, j) = \begin{cases} \{*\}, & \text{если } i \leqslant j \\ \emptyset, & \text{иначе} \end{cases}$.
(13) пусть Q — колчан (ориентированный граф); положим $\mathrm{Ob}\,\mathcal{Q} = \{\text{вершины } Q\}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Q}} = \{\text{пути в } Q\}$.
(14) пусть M — моноид с единицей; положим $\mathrm{Ob}\,*_M = \{*\}$, $\mathrm{Hom}_{*_M}(*, *) = M$.

Здесь $\{*\}$ обозначает множество из одного элемента.

Связи между разными категориями осущесвляются функторами. Ковариантный функтор F из категории $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{D}$ — это отображения $\operatorname{Ob}\mathcal{C} \to \operatorname{Ob}\mathcal{D}$, $X \mapsto F(X)$ и $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))$, $\phi \mapsto F(\phi)$ для всех $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, такие что

$$\begin{array}{rcll} F(\phi \circ \psi) & = & F(\phi) \circ F(\psi), & \text{для всех } X,Y,Z \in \operatorname{Ob}\mathcal{C} \text{ и } \psi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y),\ \phi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z); \\ F(\mathrm{id}_X) & = & \mathrm{id}_{F(X)}, & \text{для всех } X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}. \end{array}$$

Примеры 1.2. (1) тождественный функтор $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$;
(2) функторы вложения $\mathsf{i} : \mathsf{Ab} \to \mathsf{Gr}$, $\mathsf{Comm} \to \mathsf{Rings}$;
(3) фукнторы забвения $\mathsf{fg} : \mathsf{Var/k} \to \mathsf{Top} \to \mathsf{Sets}$, $R{-}\mathsf{mod} \to \mathsf{Ab}$, $\mathsf{Gr} \to \mathsf{Sets}$, $\mathsf{Qcoh}(X) \to \mathsf{Sh}(X)$;
(4) функторы свободных объектов $\mathsf{fr} : \mathsf{Sets} \to \mathsf{Ab}, \mathsf{Gr}, \mathsf{Rings}, \mathsf{Comm}$;
(5) фактор по коммутанту $\mathsf{cm} : \mathsf{Gr} \to \mathsf{Ab}$;
(6) функтор сечений $\Gamma : \mathsf{VB}(X) \to \mathsf{Sh}(X)$;
(7) функтор из категории 1.1(12) в категорию $\mathcal{C}$ — это направленная система объектов в $\mathcal{C}$;
(8) функтор из категории 1.1(13) в $\mathcal{C}$ — это представление колчана Q в $\mathcal{C}$;
(9) функтор из категории 1.1(14) в $\mathcal{C}$ — это объект в $\mathcal{C}$ с действием M (или M-эквивариантный объект).

Также используются контравариантные функторы, меняющие направление морфизмов. Здесь полезно понятие противоположной категории. Если $\mathcal{C}$ — категория, определим категорию $\mathcal{C}^\circ$ так:

$$\operatorname{Ob}\mathcal{C}^\circ = \operatorname{Ob}\mathcal{C}, \qquad \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^\circ}(X,Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X).$$

Упражнение 1.3. Покажите, что $\mathcal{C}^\circ$ категория.

Контравариантный функтор из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{D}$ — это ковариантный функтор из $\mathcal{C}^\circ$ в $\mathcal{D}$.

Примеры 1.4. (1) кольцо функций $\mathsf{Top}^\circ, (\mathsf{Var/k})^\circ \to \mathsf{Comm}$;
(2) группа Галуа $(\mathsf{Fields/k})^\circ \to \mathsf{Gr}$.

Функторы можно компонировать.

Упражнение 1.5. Покажите, что композиция двух ковариантных или двух контравариантных функторов ковариантна, а композиция ковариантного и контравариантного функторов контравариантна. Проверьте, что операция компонирования функторов ассоциативна.

Функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ называется

- строгим, если морфизм $F : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))$ — вложение для всех $X, Y \in \mathcal{C}$;
- полным, если морфизм $F : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))$ — сюръекция для всех $X, Y \in \mathcal{C}$;
- строго полным или вполне строгим, если морфизм $F : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))$ — изоморфизм для всех $X, Y \in \mathcal{C}$.

Примеры 1.6. (1) функторы из примеров 1.2(1) и (2) строго полные;
(2) функторы из примеров 1.2(3) и (4) строгие, но не полные.

Определим декартово произведение категорий $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$. По определению

$$\operatorname{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = \operatorname{Ob}\mathcal{C} \times \operatorname{Ob}\mathcal{D}, \qquad \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((X_1,Y_1),(X_2,Y_2)) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1,X_2) \times \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(Y_1,Y_2).$$

Функтор $F : \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \to \mathcal{D}$ называется также бифунктором.

Упражнение 1.7. Покажите, что $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^\circ \times \mathcal{C} \to \mathsf{Sets}$ — бифунктор.

Часть 2. Морфизмы функторов

Пусть $F, G : \mathcal{C} \to D$ — функторы. Морфизм функторов (или естественное преобразование) $\alpha : F \to G$ — это набор морфизмов $\alpha_X \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), G(X))$ для всех $X \in \mathcal{C}$, такой что

$$F(\phi) \circ \alpha_X = \alpha_Y \circ G(\phi) \qquad \text{для всех } X, Y \in \mathcal{C} \text{ и } \phi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y).$$

Морфизмы функторов можно компонировать друг с другом и с функторами.

Упражнение 2.1. (a) Пусть $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, а $\alpha : F \to G$ и $\beta : G \to H$ — морфизмы функторов. Покажите, что $\beta \circ \alpha : F \to H$ — морфизм функторов. (b) Пусть $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$, $G, G' : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_3$ и $H : \mathcal{C}_3 \to \mathcal{C}_4$ — функторы, а $\alpha : G \to G'$ — морфизм функторов. Покажите, что $H \circ \alpha : H \circ G \to H \circ G'$ и $\alpha \circ F : G \circ F \to G' \circ F$ — морфизмы функторов.

Упражнение 2.2. Постройте морфизмы функторов (a) $\mathrm{id}_{\mathsf{Sets}} \to \mathsf{fg} \circ \mathsf{fr}$; (b) $\mathsf{fr} \circ \mathsf{fg} \to \mathrm{id}$; (c) $\mathrm{id}_{\mathsf{Gr}} \to \mathsf{i} \circ \mathsf{cm}$; (d) $\mathsf{cm} \circ \mathsf{i} \to \mathrm{id}_{\mathsf{Ab}}$.

Упражнение 2.3. Покажите, что если категория $\mathcal{C}$ — малая (то есть $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ — множество), то для любой категории $\mathcal{D}$ все функторы из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{D}$ образуют категорию $\mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$.

Упражнение 2.4. Покажите, что $\mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})^\circ \cong \mathsf{Fun}(\mathcal{C}^\circ, \mathcal{D}^\circ)$.

Морфизм функторов $\alpha : F \to G$ называется изоморфизмом, если существует морфизм функторов $\beta : G \to F$, такой что $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_F$, $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_G$.

Замечание 2.5. Таким образом, все малые категории с функторами в качестве морфизмов образуют категорию Cats. На самом деле, ее естественнее рассматривать как 2-категорию — помимо объектов и морфизмов в ней есть 2-морфизмы (то есть морфизмы между морфизмами — в нашем примере естественные преобразования функторов). При этом Cats является строгой 2-категорией (композиция 1-морфизмов ассоциативна), хотя вообще в 2-категориях композиция 1-морфизмов предполагается ассоциативной только с точностью до 2-изоморфизма.

Функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ называется эквивалентностью, если существует функтор $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, так что $F \circ G \cong \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ и $G \circ F \cong \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$. Функтор G называется квазиобратным к F.

Замечание 2.6. Более привычно выглядит понятие изоморфизма категорий, в отличии от эквивалентности, предполагающего равенства $F \circ G = \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ и $G \circ F = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$. Однако, на практике, изоморфизмов категорий практически не встречается, в то время как содержательных эквивалентностей весьма много.

Упражнение 2.7. Пусть $\mathsf{Cov}(X)$ — категория накрытий топологического пространства X, а G-Sets — категория множеств с действием группы $G = \pi_1(X, x_0)$, где $x_0 \in X$ — фиксированная точка. Покажите, что функтор $(p : Y \to X) \mapsto p^{-1}(x_0)$ — эквивалентность (но не изоморфизмом!) этих категорий.

Упражнение 2.8. Покажите, что $\mathsf{Fun}(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2, \mathcal{D}) \cong \mathsf{Fun}(\mathcal{C}_1, \mathsf{Fun}(\mathcal{C}_2, \mathcal{D}))$.

Легко видеть, что всякая эквивалентность является строго полным функтором и индуцирует изоморфизм множеств классов изоморфизма объектов. Верно и обратное.

Лемма 2.9. *Функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ является эквивалентностью $\iff$ F строго полон и существенно сюръективен, то есть $\forall Y \in \mathcal{D}\ \exists X \in \mathcal{C}$ такой что $F(X) \cong Y$.*

Доказательство будет дано чуть позже.

Часть 3. Представимые функторы

Пусть $\mathcal{C}$ — категория. Всякому объекту $X \in \mathcal{C}$ сопоставим функторы

$$h_X : \mathcal{C}^\circ \to \mathsf{Sets}, \quad Y \mapsto \mathrm{Hom}(Y, X), \qquad h^X : \mathcal{C} \to \mathsf{Sets}, \quad Y \mapsto \mathrm{Hom}(X, Y).$$

Функтор $F : \mathcal{C}^\circ \to \mathsf{Sets}$ называется представимым, если он изоморфен функтору h_X для какого-либо $X \in \mathcal{C}$. Аналогично, функтор $F : \mathcal{C} \to \mathsf{Sets}$ называется копредставимым, если он изоморфен функтору h^X для какого-либо $X \in \mathcal{C}$. Объект X в этом случае, называется представляющим (копредставляющим) функтор F.

Упражнение 3.1. Покажите, что (a) функторы забвения $\mathsf{fg} : \mathsf{Top}, \mathsf{Gr}, \mathsf{Ab}, \mathsf{Rings}, \mathsf{Comm} \to \mathsf{Sets}$ копредставимы; (b) функтор $\mathsf{Top}^\circ \longrightarrow \mathsf{Comm} \xrightarrow{\mathsf{fg}} \mathsf{Sets}$ представим.

Очень полезным утверждением является лемма Ионеды.

Лемма 3.2. (*a*) *Для всех $X \in \mathcal{C}$, $F \in \mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathsf{Sets})$ имеем $\mathrm{Hom}(h^X, F) \cong F(X)$.*
(*b*) *Для всех $X \in \mathcal{C}$, $F \in \mathsf{Fun}(\mathcal{C}^\circ, \mathsf{Sets})$ имеем $\mathrm{Hom}(h_X, F) \cong F(X)$.*
(*c*) $\mathrm{Hom}(h^X, h^Y) \cong \mathrm{Hom}(Y, X)$, $\mathrm{Hom}(h_X, h_Y) \cong \mathrm{Hom}(X, Y)$.

Доказательство. Докажем пункт (b) (пункт (a) доказывается аналогично, а (c) очевидно следует из (a) и (b)). Пусть $s \in F(X)$, $Y \in \mathcal{C}$. Рассмотрим морфизм $s_Y : h_X(Y) = \mathrm{Hom}(Y, X) \to F(Y)$, $\phi \mapsto F(\phi)(s)$ (заметим, что $F(\phi) \in \mathrm{Hom}(F(X), F(Y))$ так как F контравариантен). Легко видеть, что морфизмы s_Y образуют морфизм функторов $h_X \to F$. Обратно, пусть $\alpha : h_X \to F$ — морфизм функторов. Тогда $\alpha_X : h_X(X) \to F(X)$ — отображение множеств. Заметим, что $h_X(X) = \mathrm{Hom}(X, X) \ni \mathrm{id}_X$. Рассмотрим $s = \alpha_X(\mathrm{id}_X) \in F(X)$.

Таким образом мы построили отображения между множествами $\mathrm{Hom}(h_X, F)$ и $F(X)$. Покажем, что они взаимно обратны. В самом деле, $s_X(\mathrm{id}_X) = F(\mathrm{id}_X)(s) = \mathrm{id}_{F(X)}(s) = s$. Остается показать, что $\alpha_Y = s_Y$ для всех Y. Для этого для каждого $\phi \in \mathrm{Hom}(Y, X)$ рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} h_X(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "h_X(\phi)"'] & F(X) \arrow[d, "F(\phi)"] \\ h_X(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"] & F(Y) \end{tikzcd}$$

Ясно, что $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}(X, X) = h_X(X)$ верхней стрелкой переводится в s, который правой стрелкой переводится в $F(\phi)(s)$. С другой стороны, левой стрелкой id_X переводится в $\phi \in \mathrm{Hom}(Y, X) = h_X(Y)$, который нижней стрелкой переводится в $\alpha_Y(\phi)$. Значит $\alpha_Y(\phi) = F(\phi)(s) = s_Y(\phi)$. □

Следствие 3.3. *Если функтор $F : \mathcal{C}^\circ \to \mathsf{Sets}$ представим, то объект, представляющий его, определен однозначно с точностью до изоморфизма. То же относится и к копредставимым функторам.*

Доказательство. Пусть $h_X \cong F \cong h_Y$. Тогда изоморфизм $h_X \cong h_Y$ дает изоморфизм $X \cong Y$. □

Упражнение 3.4. Покажите, что если $\mathcal{C}$ — малая категория, то функторы $h_* : \mathcal{C} \to \mathsf{Fun}(\mathcal{C}^\circ, \mathsf{Sets})$, $X \mapsto h_X$ и $h^* : \mathcal{C}^\circ \to \mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathsf{Sets})$, $X \mapsto h^X$ — строго полные функторы.

Представимые функторы часто используются для категорной переформулировки стандартных конструкций. Пусть $X_1, X_2 \in \mathcal{C}$. Рассмотрим функтор $h_{X_1} \times h_{X_2} : \mathcal{C}^\circ \to \mathsf{Sets}$, $X \mapsto \mathrm{Hom}(X, X_1) \times \mathrm{Hom}(X, X_2)$. Объект, представляющий этот функтор (если он представим), называется **произведением** объектов X_1 и X_2. Аналогично, **копроизведением** объектов X_1 и X_2 называется объект, копредставляющий функтор $h^{X_1} \times h^{X_2}$ (если он копредставим). Аналогично определяются произведения и копроизведения любого множества объектов.

Упражнение 3.5. (a) Докажите, что в категориях Sets, Gr, Ab, Rings, Comm, $R\mathrm{-mod}$, $\mathsf{Qcoh}(X)$ существуют произведения и копроизведения любого множества объектов. (b) Проверьте, что произведение в категории Comp компактных топологических пространств существует и является тихоновским произведением.

Другой пример — начальный и конечный объекты. **Начальный объект** — это объект $0_{\mathcal{C}}$, копредставляющий функтор $I(X) = \{*\}$ для всех $X \in \mathcal{C}$, а **конечный объект** — это объект $1_{\mathcal{C}}$, представляющий функтор $T(X) = \{*\}$ для всех $X \in \mathcal{C}$.

Упражнение 3.6. Покажите, что если $\mathrm{Hom}(1_{\mathcal{C}}, 0_{\mathcal{C}}) \neq \emptyset$, то $0_{\mathcal{C}} \cong 1_{\mathcal{C}}$. Найдите начальный и конечный объекты в категориях Sets и других категориях.

Часть 4. Сопряженные функторы

Пусть $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ — функторы. Говорят, что F — **сопряжен слева к** G, а G — **сопряжен справа к** F, если для всех $X \in \mathcal{C}$, $Y \in \mathcal{D}$ заданы изоморфизмы $\xi_{X,Y} : \mathrm{Hom}(F(X), Y) \cong \mathrm{Hom}(X, G(Y))$ функториальные по обоим аргументам (то есть, при фиксированном X морфизмы $\xi_{X,-} : \mathrm{Hom}(F(X), -) \to \mathrm{Hom}(X, G(-))$ функториальны, и при фиксированном Y морфизмы $\xi_{-,Y} : \mathrm{Hom}(F(-), Y) \to \mathrm{Hom}(-, G(Y))$ функториальны).

Примеры 4.1. (1) тождественный функтор сопряжен сам себе;
(2) функтор $\mathsf{cm} : \mathsf{Gr} \to \mathsf{Ab}$ из примера 1.2(5) сопряжен слева к функтору вложения $\mathsf{i} : \mathsf{Ab} \to \mathsf{Gr}$;
(3) функторы fr из примера 1.2(4) сопряжены слева к функторам fg из примера 1.2(3).
(4) если $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ — эквивалентность, а $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ — квазиобратный функтор, то G сопряжен к F и справа и слева.

Лемма 4.2. *Пусть (F,G) — пара сопряженных функторов. Тогда существуют морфизмы функторов $\epsilon : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F$ и $\eta : F \circ G \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$, такие что $\xi_{X,Y}(\phi) = G(\phi) \circ \epsilon_X$, а $\xi^{-1}_{X,Y}(\psi) = \eta_Y \circ F(\psi)$.*

Доказательство. Заметим, что $\mathrm{Hom}(X, G(F(X))) \cong \mathrm{Hom}(F(X), F(X))$ по сопряженности. Обозначим черех $\epsilon_X \in \mathrm{Hom}(X, G(F(X)))$ морфизм, соответствующий морфизму $\mathrm{id}_{F(X)} \in \mathrm{Hom}(F(X), F(X))$. Аналогично, η_Y соответствует $\mathrm{id}_{G(Y)}$ при изоморфизме $\mathrm{Hom}(F(G(Y)), Y) \cong \mathrm{Hom}(G(Y), G(Y))$. В силу функториальности изоморфизма ξ имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(F(X), F(X)) \arrow[r, "\xi_{X,F(X)}"] \arrow[d, "\phi"'] & \mathrm{Hom}(X, G(F(X))) \arrow[d, "G(\phi)"] \\
\mathrm{Hom}(F(X), Y) \arrow[r, "\xi_{X,Y}"] & \mathrm{Hom}(X, G(Y))
\end{tikzcd}$$

Морфизм id_X одной парой стрелок переводится в $\xi_{X,Y}(\phi)$, а другой — в $G(\phi) \circ \epsilon_X$. Второе равенство проверяется аналогично. □

Лемма 4.3. *Функторы F и G сопряжены друг другу $\iff$ найдутся морфизмы функторов $\epsilon : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F$ и $\eta : F \circ G \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$, такие что композиции $F \xrightarrow{F\epsilon} F \circ G \circ F \xrightarrow{\eta F} F$ и $G \xrightarrow{\epsilon G} G \circ F \circ G \xrightarrow{G\eta} G$ тождественны.*

Доказательство. Пусть вначале F сопряжен слева к G. Определим ϵ и η как в лемме 4.2. Тогда для любого морфизма $\phi \in \mathrm{Hom}(F(X), Y)$ имеем $\phi = \xi^{-1}_{X,Y}(\xi_{X,Y}(\phi)) = \eta_Y \circ F(G(\phi) \circ \epsilon_X) = \eta_Y \circ F(G(\phi)) \circ F(\epsilon_X)$. Подставим $Y = F(X)$, $\phi = \mathrm{id}_{F(X)}$. Получим $\mathrm{id}_{F(X)} = \eta_{F(X)} \circ F(G(\mathrm{id}_X)) \circ F(\epsilon_X) = \eta_{F(X)} \circ F(\epsilon_X)$, то есть тождественность первой композиции. Тождественность второй проверяется аналогично.

Пусть теперь F и G произвольные, а ϵ и η заданы. Зададим морфизмы $\xi_{X,Y} : \mathrm{Hom}(F(X), Y) \to \mathrm{Hom}(X, G(Y))$ и $\xi'_{X,Y} : \mathrm{Hom}(X, G(Y)) \to \mathrm{Hom}(F(X), Y)$ формулами $\xi_{X,Y}(\phi) = G(\phi) \circ \epsilon_X$ и $\xi'_{X,Y}(\psi) = \eta_Y \circ F(\psi)$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(\epsilon_X)"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{F(X)}"'] & F(G(F(X))) \arrow[r, "F(G(\phi))"] \arrow[d, "\eta_{F(X)}"] & F(G(Y)) \arrow[d, "\eta_Y"] \\
& F(X) \arrow[r, "\phi"] & Y
\end{tikzcd}$$

В ней квадрат коммутативен в силу функториальности η, а треугольник — по условию. Отсюда получаем $\phi = \phi \circ \mathrm{id}_{F(X)} = \eta_Y \circ F(G(\phi)) \circ F(\epsilon_X) = \eta_Y \circ F(G(\phi) \circ \epsilon_X) = \xi'_{X,Y}(\xi_{X,Y}(\phi))$. Равенство $\xi_{X,Y}(\xi'_{X,Y}(\psi)) = \psi$ проверяется аналогично. □

Лемма 4.4. *Функтор F имеет правый сопряженный $\iff$ функтор $\mathrm{Hom}(F(-), Y)$ представим для всех $Y \in \mathcal{D}$. Функтор G имеет левый сопряженный $\iff$ функтор $\mathrm{Hom}(X, G(-))$ копредставим для всех $X \in \mathcal{C}$.*

Доказательство. Выберем изоморфизмы $\mathrm{Hom}(F(-), Y) \cong h_{Y'}$ для всех $Y \in \mathcal{D}$ и положим $G(Y) = Y'$. Рассмотрим морфизм $\phi : Y_1 \to Y_2$. Композиция $h_{G(Y_1)} \cong \mathrm{Hom}(F(-), Y_1) \xrightarrow{\phi} \mathrm{Hom}(F(-), Y_2) \cong h_{G(Y_2)}$ индуцирует некоторый морфизм $G(Y_1) \to G(Y_2)$, что задает дейтсвие G на морфизмах. Функториальность очевидна. □

Воспользуемся полученными результатами для доказательства леммы 2.9. Действительно, если F строго полон и существенно сюръективен, то для всякого $Y \in \mathcal{D}$ существует $X \in \mathcal{C}$, такой что $F(X) \cong Y$, значит $\mathrm{Hom}(F(-), Y) \cong \mathrm{Hom}(F(-), F(X)) \cong \mathrm{Hom}(-, X) = h_X$ — представимый функтор, следовательно существует правый сопряженный к F функтор G. Пусть $\epsilon : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F$ и $\eta : F \circ G \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ — соответствующие морфизмы функторов. Покажем, что они изоморфизмы. Рассмотрим вначале морфизм $\epsilon_X : X \to G(F(X))$. Применяя функтор $\mathrm{Hom}(X', -)$ получаем морфизм $\mathrm{Hom}(X', X) \to \mathrm{Hom}(X', G(F(X))$, являющийся композицией морфизма $F : \mathrm{Hom}(X', X) \to \mathrm{Hom}(F(X'), F(X))$ и $\xi_{X', F(X)} : \mathrm{Hom}(F(X'), F(X)) \to \mathrm{Hom}(X', G(F(X))$, и следовательно изоморфизмом. Значит ϵ_X индуцирует изоморфизм представимых функторов $h_X \cong h_{G(F(X))}$, а значит и сам является изоморфизмом. Рассмотрим теперь морфизм $\eta_Y : F(G(Y)) \to Y$. Применяя функтор $\mathrm{Hom}(F(X), -)$ получаем морфизм $\mathrm{Hom}(F(X), F(G(Y))) \to \mathrm{Hom}(F(X), Y)$. Его композиция с морфизмом $F : \mathrm{Hom}(X, G(Y)) \to \mathrm{Hom}(F(X), F(G(Y)))$ равна морфизму $\xi^{-1}_{X,Y} : \mathrm{Hom}(X, G(Y)) \to \mathrm{Hom}(F(X), Y)$, следовательно является изоморфизмом. Но всякий объект $Y' \in \mathcal{D}$ изоморфен объекту $F(X)$ для подходящего

X, значит морфизм $\mathrm{Hom}(Y', F(G(Y))) \to \mathrm{Hom}(Y', Y)$ тоже является изоморфизмом. Таким образом η_Y индуцирует изоморфизм представимых функторов $h_{F(G(Y))} \cong h_Y$, а значит и сам является изоморфизмом.

В завершение, приведем пример функторов, определяемых через понятие сопряженности. Пусть $\mathcal{I}$ — малая категория (рассматриваемая как категория индексов). Рассмотрим функтор проекции $\mathcal{C} \times \mathcal{I} \to \mathcal{C}$. В силу Упр. 2.8 он дает функтор $\mathcal{C} \to \mathsf{Fun}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$, который мы будем называть постоянным функтором и обозначать Δ. Для всякого $F \in \mathsf{Fun}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ рассмотрим функторы $\mathcal{C} \to \mathsf{Sets}$

$$Y \mapsto \mathrm{Hom}(\Delta(Y), F) \qquad \text{и} \qquad Y \mapsto \mathrm{Hom}(F, \Delta(Y)):$$

(первый контравариантен, второй ковариантен). Если эти функторы (ко)представимы, то (ко)представляющий объект называется **обратным пределом** (или просто **пределом**) функтора F по категории $\mathcal{I}$ и обозначается $\varprojlim_{\mathcal{I}} F(i)$ в первом случае, и **прямым пределом** (или **копределом**) функтора F по категории $\mathcal{I}$ и обозначается $\varinjlim_{\mathcal{I}} F(i)$ во втором. В силу свойств представимых функторов, если пределы существуют, то определены однозначно (с точностью до изоморфизма). Более того, если пределы определены для всех F, они являются функторами $\varprojlim_{\mathcal{I}} : \mathsf{Fun}(\mathcal{I}, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ и $\varinjlim_{\mathcal{I}} : \mathsf{Fun}(\mathcal{I}, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ соответственно.

Упражнение 4.5. (a) Покажите, что если категория $\mathcal{I}$ **дискретна** (то есть $\mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i, j) = \emptyset$ для $i \neq j$), то $\varprojlim_{\mathcal{I}} \cong \prod_{\mathcal{I}}$ и $\varinjlim_{\mathcal{I}} \cong \coprod_{\mathcal{I}}$. (b) Обозначим через $\mathcal{I}_{\mathrm{discr}}$ дискретную категорию с $\mathrm{Ob}\,\mathcal{I}_{\mathrm{discr}} = \mathrm{Ob}\,\mathcal{I}$. Постройте морфизмы функторов $\varprojlim_{\mathcal{I}} \to \prod_{\mathcal{I}_{\mathrm{discr}}}$ и $\coprod_{\mathcal{I}_{\mathrm{discr}}} \to \varinjlim_{\mathcal{I}}$.