Производные функторы — свойства и примеры

Часть 1.

В лекции про точные функторы, я забыл рассказать про морфизмы точных функторов. Напомним, что точный функтор $\mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ — это пара (F, θ_F), где $\theta_F : F \circ [1]_{\mathcal{T}} \to [1]_{\mathcal{T}'} \circ F$ — изоморфизм функторов. Морфизм точных функторов $\phi : (F, \theta_F) \to (G, \theta_G)$ — это морфизм функторов $F \to G$, такой что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
F \circ [1]_{\mathcal{T}} \arrow[r, "\phi\circ[1]_{\mathcal{T}}"] \arrow[d, "\theta_F"'] & G \circ [1]_{\mathcal{T}} \arrow[d, "\theta_G"'] \\
{[1]_{\mathcal{T}'} \circ F} \arrow[r, "{[1]_{\mathcal{T}'}\circ\phi}"] & {[1]_{\mathcal{T}'} \circ G}
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Упражнение 1.1. Покажите, что композиция морфизмов точных функторов — морфизм точных функторов.

Упражнение 1.2. Покажите, что если $F : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ — точный функтор, а $G : \mathcal{T}' \to \mathcal{T}$ — его правый сопряженный (он автоматически точен), то морфизмы сопряжения $\mathrm{id}_{\mathcal{T}} \to G \circ F$ и $F \circ G \to \mathrm{id}_{\mathcal{T}'}$ — морфизмы точных функторов.

Напомним, что если $F : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ — точный функтор между триангулированными категориями, а $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$ — триангулированная подкатегория, то существует правый и левый функтор локализации RF, LF из $\mathcal{T}/\mathcal{N}$ в подходящее пополнение категории $\mathcal{T}'$, задаваемые формулами

$$\mathrm{Hom}(Y, RF(X)) = \varinjlim_{(s:X\to Z)\in S(\mathcal{N})} \mathrm{Hom}(Y, F(Z)), \qquad \mathrm{Hom}(LF(X), Y) = \varinjlim_{(s:Z\to X)\in S(\mathcal{N})} \mathrm{Hom}(F(Z), Y).$$

В категории $\mathcal{T}/\mathcal{N}$ есть максимальная подкатегория (область определения функтора локализации), на которой функтор локализации принимает значения в $\mathcal{T}'$. Это триангулированная подкатегория, а ограничение функтора локализации на эту категорию является точным функтором. Есть разные достаточные условия, обеспечивающие то, что функтор локализации всюду определен (допустимость подкатегории $\mathcal{N}$ в $\mathcal{T}$, или наличие подходящей подкатегории $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}$).

Упражнение 1.3. Покажите, что (a) морфизмы $\rho_F : F \to RF \circ Q$ и $\lambda_F : LF \circ Q \to F$ — морфизмы точных функторов. (b) если морфизм $\phi : F \to G \circ Q$ — морфизм точных функторов, то морфизм $\phi' : RF \to G$ — тоже морфизм точных функторов (аналогично для левой локализации).

В частном случае, когда $\mathcal{T} = \mathrm{Hot}^*(\mathcal{A})$, $\mathcal{T}' = \mathcal{D}^*(\mathcal{B})$, $\mathcal{N} = \mathrm{Acycl}^*(\mathcal{A})$, а функтор F индуцирован аддитивным функтором из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$, локализации называются производными функторами.

Пусть $F, G : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ — точные функторы, а $\phi : F \to G$ — морфизм функторов.

Лемма 1.4. *Существует единственный морфизм точных функторов $R\phi : RF \to RG$, такой что диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\rho_F"'] & G \arrow[d, "\rho_G"] \\
RF \circ Q \arrow[r, "R\phi"] & RG \circ Q
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Он задается формулой $R\phi(X) = \varinjlim_{(s:X\to Z)\in S(\mathcal{N})} \phi(Z)$. При этом $R\phi \circ R\psi = R(\phi \circ \psi)$.

Аналогично для левых производных функторов.

Доказательство. Легко следует из универсального свойства производных функторов. В самом деле, рассмотрим морфизм функторов $\rho_G \circ \phi : F \to RG \circ Q$. По univрсальному равенству найдется морфизм функторов $R\phi$ с необходимыми свойствами. При этом равенство $R\phi \circ R\psi = R(\phi \circ \psi)$ тоже легко следует из универсального свойства.

С другой стороны, можно вывести все и из явной формулы и свойств пределов. □

Пусть $F : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ — точный функтор, а $G : \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ — его левый сопряженный (тоже автоматически точный). Пусть также $\mathcal{M} \subset \mathcal{S}$ и $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$ — триангулированные подкатегории. Обозначим через $RF : \mathcal{S}/\mathcal{M} \to \mathcal{T}/\mathcal{N}$ правую локализацию функтора $Q_{\mathcal{T}} \circ F$, а через $LG : \mathcal{T}/\mathcal{N} \to \mathcal{S}/\mathcal{M}$ левую локализацию функтора $Q_{\mathcal{S}} \circ G$.

Лемма 1.5. *Если функтор RF определен в X, а G определен в Y, то существует изоморфизм*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}/\mathcal{M}}(LGY, X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{N}}(Y, RFX)$$

функториальный по X и Y. В частности, если RF и LG всюду определены, то они сопряжены.

Доказательство. Проще всего воспользоваться явными формулами. В левой и правой частях по определению стоят

$$\varinjlim_{(W\to Y)\in S(\mathcal{N})} \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(G(W), X) \qquad \text{и} \qquad \varinjlim_{(X\to Z)\in S(\mathcal{M})} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, F(Z))$$

соответственно. Рассмотрим также

$$\varinjlim_{(W\to Y)\in S(\mathcal{N}),\ (X\to Z)\in S(\mathcal{M})} \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(G(W), Z),$$

то есть предел по категории $S(\mathcal{M})^X \times S(\mathcal{N})_Y$. Легко видеть, что функторы проекции $S(\mathcal{M})^X \times S(\mathcal{N})_Y \to S(\mathcal{M})^X, S(\mathcal{N})_Y$ кофинальны, поэтому индуцируют изоморфизмы этого предела с каждым из двух исходных (также надо учесть, что $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(G(W), X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, F(Z))$ ввиду сопряженности функторов F и G). □

Часть 2. Композиция производных функторов

Пусть $\mathcal{T}_1 \xrightarrow{F} \mathcal{T}_2 \xrightarrow{G} \mathcal{T}'$ — композиция точных функторов, а $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{T}_1$ и $\mathcal{N}_2 \subset \mathcal{T}_2$ — строго полные триангулированные подкатегории. Рассмотрим правые локализации $RF : \mathcal{T}_1/\mathcal{N}_1 \to \mathcal{T}_2/\mathcal{N}_2$, $RG : \mathcal{T}_2/\mathcal{N}_2 \to \mathcal{T}'$ и $R(G \circ F) : \mathcal{T}_1/\mathcal{N}_1 \to \mathcal{T}'$ (если они определены). Естественный вопрос — верно ли, что $R(G \circ F) \cong RG \circ RF$. Легко показать, что вообще говоря, это не так.

Пример 2.1. Приведем пример для левых производных функторов. Рассмотрим гомоморфизм алгебр $\mathsf{k}[x] \to \mathsf{k}$, $f(x) \mapsto f(0)$. Пусть $F : \mathsf{k}-\mathsf{mod} \to \mathsf{k}[x]-\mathsf{mod}$ — функтор ограничения, а $G : \mathsf{k}[x]-\mathsf{mod} \to \mathsf{k}-\mathsf{mod}$, $M \mapsto \mathsf{k} \otimes_{\mathsf{k}[x]} M$ — функтор индукции (геометрически $\mathsf{k}[x]-\mathsf{mod} = \mathsf{Coh}(\mathbb{A}^1)$, $\mathsf{k}-\mathsf{mod} = \mathsf{Coh}(\mathsf{pt})$, $F = i_*$, $G = i^*$, где $i : \mathsf{pt} \to \mathbb{A}^1$ — естественное вложение). Ясно, что $LF = F$, так как F точен, а $LG(M) = \mathsf{k} \overset{L}{\otimes}_{\mathsf{k}[x]} M$. Пользуясь резольвентой

$$0 \to \mathsf{k}[x] \xrightarrow{x} \mathsf{k}[x] \to \mathsf{k} \to 0,$$

легко показать, что $LG(LF(V)) \cong V \oplus V[1]$. При этом $G(F(V)) = V$, так что $L(G \circ F) = L\,\mathrm{id} = \mathrm{id}$.

Ввиду вышесказанного, полезно иметь условие, гарантриующее равенство производного функтора композиции и композиции производных функторов. Приведем одно достаточное условие.

Пусть $F : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ — точный функтор, а $Q : \mathcal{T} \to \mathcal{T}/\mathcal{N}$ — функтор локализации. Объект X называется приспособленным для F, если RF определен на X и естественный морфизм $\rho_F(X) : F(X) \to RF(Q(X))$ — изоморфизм.

Упражнение 2.2. Покажите, что все объекты, приспособленные для функтора F образуют полную триангулированную подкатегорию в $\mathcal{T}$.

Упражнение 2.3. Пусть $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — аддитивный функтор между абелевыми категориями, а $E \subset \mathcal{A}$ — класс объектов, замкнутый относительно прямых сумм и коядер мономорфизмов, такой что для любой точной тройки $0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$, если $A_1 \in E$, то тройка $0 \to F(A_1) \to F(A_2) \to F(A_3) \to 0$ точна. Если в $\mathcal{A}$ достаточно много объектов из E, то любой ограниченный снизу комплекс с членами в E приспособлен для F в $\mathrm{Hot}^+(\mathcal{A})$, а функтор RF всюду определен на $\mathcal{D}^+(\mathcal{A})$.

Говорят, что в категории $\mathcal{T}$ достаточно много приспособленных для F объектов, если для всякого $X \in \mathcal{T}$ найдется приспособленный для F объект $X_0 \in \mathcal{T}$ и морфизм $s : X \to X_0$, лежащий в $S(\mathcal{N})$ (в случае левой локализации требуется морфимз $X_0 \to X$).

Упражнение 2.4. Пусть $\mathcal{T}(F) \subset \mathcal{T}$ — строго полная триангулированная подкатегория, состоящая из всех объектов, приспособленных для F. Тогда $F(\mathcal{T}(F) \cap \mathcal{N}) = 0$. В частности, если в категории $\mathcal{T}$ достаточно много приспособленных для F объектов, то RF всюду определен и $RF(X) \cong F(X_0)$, где X_0 приспособленный для F объект, для которого существует морфизм $s : X \to X_0$ в $S(\mathcal{N})$.

Лемма 2.5. *Пусть $\mathcal{T}_1 \xrightarrow{F} \mathcal{T}_2 \xrightarrow{G} \mathcal{T}'$ — композиция точных функторов, а $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{T}_1$ и $\mathcal{N}_2 \subset \mathcal{T}_2$ — строго полные триангулированные подкатегории. Пусть в категории $\mathcal{T}_1$ достаточно много приспособленных для F объектов X, таких что объект $F(X)$ в $\mathcal{T}_2$ приспособлен для G. Тогда все эти объекты приспособлены для $G \circ F$, функтор RF определен всюду, функтор RG определен на* $\operatorname{Im} RF$ *и* $R(G \circ F) \cong RG \circ RF$.

Доказательство. Так как в $\mathcal{T}_1$ достаточно много приспособленных для F объектов, то RF определен всюду. Так как для каждого X в $\mathcal{T}_1$ найдется морфизм $s : X \to X_1$, такой что $s \in S(\mathcal{N}_1)$, X_1 приспособлен для F, а $F(X_1)$ приспособлен для G, то $RF(X) \cong RF(X_1) \cong F(X_1)$, а RG определен на $RF(X_1)$ по условию. Значит RG определен на $\operatorname{Im} RF$.

Пусть теперь $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}_1$ — строго полная подкатегория, состоящая из приспособленных для F объектов X_0, таких что $F(X_0)$ приспособлен для G. Эта подкатегория триангулирована (так как является пересечением триангулированной подкатегории и прообраза триангулированной подкатегории). В силу упражнения $F(\mathcal{T}_0 \cap \mathcal{N}_1) = 0$, значит тем более $G(F(\mathcal{T}_0 \cap \mathcal{N}_1)) = 0$. При этом для каждого объекта $X \in \mathcal{T}_1$ найдется морфизм $s : X \to X_0$ в $S(\mathcal{N}_1)$, такой что $X_0 \in \mathcal{T}_0$. Значит $R(G \circ F)$ всюду определен и $R(G \circ F)(X) = G(F(X_0))$. В частности, если $X \in \mathcal{T}_0$ можно взять $X_0 = X$, так что $R(G \circ F)(X) = G(F(X))$. $\square$

Часть 3. Производные бифункторы

Пусть $X^{\bullet,\bullet}$ — бикомплекс над $\mathcal{A}$, то есть биградуированный объект над $\mathcal{A}$ с двумя дифференциалами $d_I : X^{m,n} \to X^{m+1,n}$ и $d_{II} : X^{m,n} \to X^{m,n+1}$, такими что

$$d_I^2 = 0, \qquad d_{II}^2 = 0, \qquad \text{и} \qquad d_I \circ d_{II} = d_{II} \circ d_I.$$

Легко видеть, что бикомплексы образуют абелеву категорию $\operatorname{Com}^2(\mathcal{A})$.

Определим функторы свертки $\mathsf{tot}_\oplus, \mathsf{tot}_\pi : \operatorname{Com}^2(\mathcal{A}) \to \operatorname{Com}(\mathcal{A})$ формулами

$$\begin{aligned}
\mathsf{tot}_\oplus(X^{\bullet,\bullet}, d_I, d_{II}) &= (\oplus_{m+n=k} X^{m,n}, & d^k_{|X^{m,n}} &= d_I^{m,n} + (-1)^m d_{II}^{m,n}),\\
\mathsf{tot}_\pi(X^{\bullet,\bullet}, d_I, d_{II}) &= (\textstyle\prod_{m+n=k} X^{m,n}, & d^k_{m,n} &= d_I^{m-1,n} + (-1)^m d_{II}^{m,n-1}).
\end{aligned}$$

Чтобы первый из них был определен в категории $\mathcal{A}$ должны существовать бесконечные прямые суммы, а чтобы второй был определен — бесконечные прямые произведения. При этом, эти функторы всегда определены и совпадают на подкатегории бикомплексов, имеющих на каждой из диагоналей лишь конечное число ненулевых членов (в этом случае мы будем обозначать их просто tot).

Упражнение 3.1. Пусть $f : X^\bullet \to Y^\bullet$ — морфизм комплексов. Положим $Z^{-1,n} = X^n$, $Z^{0,n} = Y^n$, $Z^{m,n} = 0$ при $m \neq -1, 0$, $d_{II}^{-1,n} = d_X^n$, $d_I^{0,n} = d_Y^n$, а $d_{II}^{-1,n} = f^n$. Покажите, что $\mathsf{tot}(Z^{\bullet,\bullet}) = C(f)$.

На категории бикомплексов есть два функтора сдвига — по первой координате и по второй (меняющие знак соответствующего дифференциала). Обозначим их $[1]_I$ и $[1]_{II}$ соответственно. Ясно, что они коммутируют $[1]_I \circ [1]_{II} = [1]_{II} \circ [1]_I$.

Упражнение 3.2. Покажите, что существуют изоморфизмы функторов $\theta_I : \mathsf{tot}_* \circ [1]_I \to [1] \circ \mathsf{tot}_*$ и $\theta_I : \mathsf{tot}_* \circ [1]_I \to [1] \circ \mathsf{tot}_*$, такие что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{tot}_* \circ [1]_I \circ [1]_{II} \arrow[r, "\theta_I"] \arrow[d, "\theta_{II}"'] & {[1]} \circ \mathsf{tot}_* \circ [1]_{II} \arrow[d, "\theta_{II}"'] \\
{[1]} \circ \mathsf{tot}_* \circ [1]_I \arrow[r, "\theta_I"] & {[2]} \circ \mathsf{tot}_*
\end{tikzcd}$$

антикоммутативна ($*$ заменяет $\oplus$ либо π).

Бифунктор $F : \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2 \to \mathcal{T}$ между триангулированными категориями называется $\mathsf{точным}$, если

- заданы изоморфзмы $\theta_1 : F \circ [1]_{\mathcal{T}_1} \to [1]_{\mathcal{T}} \circ F$ и $\theta_2 : F \circ [1]_{\mathcal{T}_2} \to [1]_{\mathcal{T}} \circ F$, такие что диаграмма

$$\begin{tikzcd} F \circ [1]_{\mathcal{T}_1} \circ [1]_{\mathcal{T}_2} \arrow[r, "\theta_1"] \arrow[d, "\theta_2"'] & {[1] \circ F \circ [1]_{\mathcal{T}_2}} \arrow[d, "\theta_2"'] \\ {[1] \circ F \circ [1]_{\mathcal{T}_1}} \arrow[r, "\theta_1"] & {[2] \circ F} \end{tikzcd}$$

  антикоммутативна;
- для любого выделенного треугольника $X_1 \to X_2 \to X_3 \to X_1[1]_{\mathcal{T}_1}$ в $\mathcal{T}_1$ и любого $Y \in \mathcal{T}_2$ треугольник $F(X_1, Y) \to F(X_2, Y) \to F(X_3, Y) \to F(X_1, Y)[1]_{\mathcal{T}}$ выделен в $\mathcal{T}$;
- для любого выделенного треугольника $Y_1 \to Y_2 \to Y_3 \to Y_1[1]_{\mathcal{T}_2}$ в $\mathcal{T}_2$ и любого $X \in \mathcal{T}_1$ треугольник $F(X, Y_1) \to F(X, Y_2) \to F(X, Y_3) \to F(X, Y_1)[1]_{\mathcal{T}}$ выделен в $\mathcal{T}$.

Упражнение 3.3. Покажите, что для любого аддитивного бифунктора $F : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}$ бифунктор $F_* : \mathrm{Hot}^*(\mathcal{A}_1) \times \mathrm{Hot}^*(\mathcal{A}_2) \to \mathrm{Hot}^*(\mathcal{A})$, заданный формулой

$$(X^\bullet, Y^\bullet) \mapsto \mathsf{tot}_*(F(X^\bullet, Y^\bullet))$$

точен.

Пусть $F : \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2 \to \mathcal{T}$ — бифунктор, а $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{T}_1$, $\mathcal{N}_2 \subset \mathcal{T}_2$ — триангулированные подкатегории. Бифунктор $RF : (\mathcal{T}_1/\mathcal{N}_1) \times (\mathcal{T}_2/\mathcal{N}_2) \to \mathcal{T}$ называется правой локализацией бифунктора F, если задан морфизм бифункторов $\rho : F \to RF \circ Q$, такой что для любого бифунктора $G : (\mathcal{T}_1/\mathcal{N}_1) \times (\mathcal{T}_2/\mathcal{N}_2) \to \mathcal{T}$ и морфизма бифункторов $\phi : F \to G \circ Q$ существует единственный морфизм бифункторов $\phi' : RF \to G$, такой что $\phi' \circ \rho = \phi$.

Упражнение 3.4. Преположим, что существует полуортогональное разложение $\mathcal{T}_1 = (\mathcal{I}_1, \mathcal{N}_1)$, а функтор F переводит $\mathcal{I}_1 \times \mathcal{N}_2$ в ноль. Тогда он имеет правый производный RF и $RF(X, Y) = F(X_I, Y)$, где X_I — проекция X на I.

Упражнение 3.5. Преположим, что существует триангулированные подкатегории $\mathcal{T}_{01} \subset \mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_{02} \subset \mathcal{T}_2$ такая что если $\mathcal{N}_{0i} = \mathcal{T}_{0i} \cap \mathcal{N}_i$, то $F(\mathcal{N}_{01} \times \mathcal{T}_{02}) = 0$ и $F(\mathcal{T}_{01} \times \mathcal{N}_{02}) = 0$, и для всяких объектов $X \in \mathcal{T}_1$, $Y \in \mathcal{T}_2$ существуют морфизмы $s : X \to X_0$, $t : Y \to Y_0$, лежащие в $S(\mathcal{N}_1)$ и $S(\mathcal{N}_2)$ соответственно. Докажите, что существует правый производный функтор RF, причем $RF(X, Y) = F(X_0, Y_0)$.

Упражнение 3.6. Сформулируйте и докажите теорему о производном функторе композиции бифункторов.

Часть 4. Производные функторы в алгебраической геометрии

Пусть X — схема.

Упражнение 4.1. Покажите, что (a) если $U \subset X$ — аффинное подмножество, $j : U \to X$ — вложение, а F — квазикорентный пучок на U, соответствующий инъективному модулю, то j_*F — инъективный объект в $\mathsf{QCoh}(X)$; (b) если X квазикомпактна (имеет конечное покрытие открытыми аффинными множествами), то в $\mathsf{QCoh}(X)$ достаточно инъективных объектов. В частности, любой точный справа функтор из $\mathsf{QCoh}(X)$ имеет правый производный на $\mathcal{D}^+(\mathsf{QCoh}(X))$.

В частности, если X квазикомпактна, то функтор Γ глобальных сечений имеет правый производный функтор $R\Gamma$ на категории $\mathcal{D}^+(\mathsf{QCoh}(X))$, Аналогично, если $f : X \to Y$ — морфизм из квазикомпактной схемы X, то существует правый производный функтор $Rf_* : \mathcal{D}^+(\mathsf{QCoh}(X)) \to \mathcal{D}^+(\mathsf{QCoh}(Y))$.

Упражнение 4.2. Покажите, что любая квазипроективная схема квазикомпактна.

С проективными объектами в категории $\mathsf{QCoh}(X)$ ситуация противоположная — их, как правило нет вообще (единственное по существо исключение — аффинный случай). Однако, для вычисления левого производного функтора от обратного образа и тензорного произведения часто достаточно локально свободных пучков. Обозначим класс локально свободных пучков на X через $\mathsf{LF}(X)$.

Упражнение 4.3. Пусть $f : X \to Y$ — морфизм схем. Покажите, что класс $\mathsf{LF}(Y)$ удовлетворяет условиям упражнения 2.3 для функтора $f^* : \mathsf{QCoh}(Y) \to \mathsf{QCoh}(X)$. В частности, если на Y достаточно много локально свободных пучков, то существует левый производный функтор $Lf^* : \mathcal{D}^-(\mathsf{QCoh}(Y)) \to \mathcal{D}^-(\mathsf{QCoh}(X)))$.

Упражнение 4.4. Покажите, что на любой квазипроективной схеме достаточно много локально свободных пучков.

Упражнение 4.5. Пусть $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 = \mathrm{Hot}^-(\mathsf{QCoh}(X))$, $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2 = \mathrm{Acycl}^-(\mathsf{QCoh}(X))$, $\mathcal{T} = \mathcal{D}^-(\mathsf{QCoh}(X))$, а $F(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet) = Q(\mathsf{tot}_\oplus(\mathcal{F}^\bullet \otimes \mathcal{G}^\bullet))$. Пусть на X достаточно много локально свободных пучков. Покажите, что если $\mathcal{T}_{01} = \mathrm{Hot}^-(\mathsf{LF}(X))$, $\mathcal{T}_{02} = \mathcal{T}_2$, то условия упражнения 3.5 (для левых локализаций) выполнены. В частности, существует левый производный функтор $\overset{L}{\otimes} : \mathcal{D}^-(\mathsf{QCoh}(X)) \times \mathcal{D}^-(\mathsf{QCoh}(X)) \to \mathcal{D}^-(\mathsf{QCoh}(X))$.

Упражнение 4.6. Пусть $\mathcal{T}_1 = \mathrm{Hot}^-(\mathsf{QCoh}(X))$, $\mathcal{T}_2 = \mathrm{Hot}^+(\mathsf{QCoh}(X))$, $\mathcal{N}_{1,2} = \mathrm{Acycl}^\mp(\mathsf{QCoh}(X))$, $\mathcal{T} = \mathcal{D}^+(\mathsf{QCoh}(X))$, а $F(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet) = Q(\mathsf{tot}_\pi(\mathcal{H}om(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet)))$.
(a) Пусть на X достаточно много локально свободных пучков. Покажите, что если $\mathcal{T}_{01} = \mathrm{Hot}^-(\mathsf{LF}(X))$, $\mathcal{T}_{02} = \mathcal{T}_2$, то условия упражнения 3.5 выполнены. В частности, существует правый производный функтор $R\mathcal{H}om : \mathcal{D}^-(\mathsf{QCoh}(X))^\circ \times \mathcal{D}^+(\mathsf{QCoh}(X)) \to \mathcal{D}^+(\mathsf{QCoh}(X))$.
(b) Пусть X квазикомпактна. Покажите, что если $\mathcal{T}_{01} = \mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_{02} = \mathrm{Hot}^+(\mathrm{Inj}(\mathsf{QCoh}(X)))$, то условия упражнения 3.5 выполнены и функтор $R\mathcal{H}om : \mathcal{D}^-(\mathsf{QCoh}(X))^\circ \times \mathcal{D}^+(\mathsf{QCoh}(X)) \to \mathcal{D}^+(\mathsf{QCoh}(X))$ существует.

Упражнение 4.7. Пусть $\mathcal{T}_1 = \mathrm{Hot}^-(\mathsf{QCoh}(X))$, $\mathcal{T}_2 = \mathrm{Hot}^+(\mathsf{QCoh}(X))$, $\mathcal{N}_{1,2} = \mathrm{Acycl}^\mp(\mathsf{QCoh}(X))$, $\mathcal{T} = \mathcal{D}^+(\mathsf{Ab})$, а $F(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet) = Q(\mathsf{tot}_\pi(\mathrm{Hom}(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet)))$. Покажите, что если схема X квазикомпактна, а $\mathcal{T}_{01} = \mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_{02} = \mathrm{Hot}^+(\mathrm{Inj}(\mathsf{QCoh}(X)))$, то условия упражнения 3.5 выполнены. В частности, существует правый производный функтор $R\,\mathrm{Hom} : \mathcal{D}^-(\mathsf{QCoh}(X))^\circ \times \mathcal{D}^+(\mathsf{QCoh}(X)) \to \mathcal{D}^+(\mathsf{Ab})$.

На самом деле, производные функторы от всех вышеперечисленных существуют и на неограниченных производных категориях. Это доказывается с помощью результатов типа теоремы Спальтенштейна.

Между перечисленными выше функторами есть множество соотношений. Во-первых, соотношения сопряженности.

Лемма 4.8. *Функтор Lf^* сопряжен слева к функтору Rf_*.*

Доказательство. Немедленно следует из сопряженности функторов f^* и f_*. □

Лемма 4.9. *Функтор $- \overset{L}{\otimes} \mathcal{F}$ сопряжен слева к функтору $R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, -)$.*

Доказательство. Немедленно следует из сопряженности функторов $- \otimes \mathcal{F}$ и $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, -)$. □

Кроме того, выполнены следующие соотношения

Упражнение 4.10. Пусть $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ — морфизмы схем. Покажите, что (a) $L(g \circ f)^* \cong Lf^* \circ Lg^*$; (b) $R(g \circ f)_* \cong Rg_* \circ Rf_*$; (c) $R\Gamma(X, -) \cong R\Gamma(Y, -) \circ Rf_*$.

Упражнение 4.11. Пусть X — схема. Покажите, что (a) $R\Gamma(X, R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})) \cong R\,\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$;
(b) $(\mathcal{F} \overset{L}{\otimes} \mathcal{G}) \overset{L}{\otimes} \mathcal{H} \cong \mathcal{F} \overset{L}{\otimes} (\mathcal{G} \overset{L}{\otimes} \mathcal{H})$; (c) $\mathcal{F} \overset{L}{\otimes} \mathcal{G} \cong \mathcal{G} \overset{L}{\otimes} \mathcal{F}$.

Упражнение 4.12. Пусть $f : X \to Y$ — морфизм схем. Покажите, что $Lf^*(\mathcal{F} \overset{L}{\otimes} \mathcal{G}) \cong (Lf^*\mathcal{F}) \overset{L}{\otimes} (Lf^*\mathcal{G})$.

Лемма 4.13. *Пусть $f : X \to Y$ — морфизм схем. Тогда* (a) *$Rf_* R\mathcal{H}om(Lf^*\mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, Rf_*\mathcal{G})$;*
(b) *(*формула проекции*) $Rf_*(Lf^*\mathcal{F} \overset{L}{\otimes} \mathcal{G}) \cong \mathcal{F} \overset{L}{\otimes} Rf_*\mathcal{G}$.*

Доказательство. Докажем вначале (a). Заметим, что

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{H}, Rf_* R\mathcal{H}om(Lf^*\mathcal{F}, \mathcal{G})) \cong \mathrm{Hom}(Lf^*\mathcal{H}, R\mathcal{H}om(Lf^*\mathcal{F}, \mathcal{G})) \cong \mathrm{Hom}(Lf^*\mathcal{H} \overset{L}{\otimes} Lf^*\mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong$$
$$\cong \mathrm{Hom}(Lf^*(\mathcal{H} \overset{L}{\otimes} \mathcal{F}), \mathcal{G}) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{H} \overset{L}{\otimes} \mathcal{F}, Rf_*\mathcal{G}) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{H}, R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, Rf_*\mathcal{G})).$$

Значит наши функторы изоморфны.

Теперь проверим (b). Заметим, что

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F} \overset{L}{\otimes} Rf_*\mathcal{G}, Rf_*(Lf^*\mathcal{F} \overset{L}{\otimes} \mathcal{G})) \cong \mathrm{Hom}(Lf^*(\mathcal{F} \overset{L}{\otimes} Rf_*\mathcal{G}), Lf^*\mathcal{F} \overset{L}{\otimes} \mathcal{G}) \cong \mathrm{Hom}(Lf^*\mathcal{F} \overset{L}{\otimes} Lf^*Rf_*\mathcal{G}, Lf^*\mathcal{F} \overset{L}{\otimes} \mathcal{G}).$$

Поэтому морфизм сопряженности $Lf^*Rf_*\mathcal{G} \to \mathcal{G}$ индуцирует морфизм $\mathcal{F} \overset{L}{\otimes} Rf_*\mathcal{G} \to Rf_*(Lf^*\mathcal{F} \overset{L}{\otimes} \mathcal{G})$. Легко видеть, что он является изоморфизмом, если $\mathcal{F}$ — ограниченный сверху комплекс локально свободных пучков, а $\mathcal{G}$ — ограниченный снизу комплекс инъективных квазикогерентных пучков. Это дает искомый изоморфизм на $\mathcal{D}^-(\mathsf{QCoh}(Y)) \times \mathcal{D}^+(\mathsf{QCoh}(X))$ в силу обычной формулы проекции — $f_*(f^*\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) \cong \mathcal{F} \otimes f_*\mathcal{G}$, для локально свободных $\mathcal{F}$. Можно далее показать, что он продолжается до изоморфизма на всей неограниченной категории. $\square$

Упражнение 4.14. Покажите, что $R\mathcal{H}om(\mathcal{G}, \mathcal{H} \overset{L}{\otimes} \mathcal{F}) \cong R\mathcal{H}om(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \overset{L}{\otimes} \mathcal{F} \cong R\mathcal{H}om(\mathcal{G} \overset{L}{\otimes} \mathcal{F}^\vee, \mathcal{H})$, для всех $\mathcal{F} \in \mathcal{D}^{\mathsf{perf}}(X)$, где $\mathcal{F}^\vee = R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$.