Каноническая фильрация и t-структуры

Часть 1. Каноническая фильтрации

Для вычисления значения производного функтора на данном объекте триангулированной категории редко используют явные проективные или инъективные резольвенты. Как правило пользуются тем, что известна некоторая "фильтрация" этого объекта и значения производного функтора на "факторах" этой фильтрации. Правда обычное понятие фильтрации не имеет особого смысла в триангулированных категориях ввиду следующего обстоятельства.

Лемма 1.1. *Пусть $f : X \to Y$ — морфизм в триангулированной категории $\mathcal{T}$. Если f — мономорфизм, то f — вложение прямым слагаемым, а если f — эпиморфизм, то f — проекция на прямое слагаемое.*

Доказательство. Понятия мономорфизма и эпиморфизма имеют смысл, так как триангулированная категория аддитивна. Пусть f — мономорфизм. Значит функтор $Z \mapsto \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}(Z, X) \to \mathrm{Hom}(Z, Y))$ представим и представляется объектом 0. Иначе говоря, для любого Z морфизм $\mathrm{Hom}(Z, X) \to \mathrm{Hom}(Z, Y)$ — вложение. Достроим морфизм f до выделенного треугольника $Z \to X \to Y \to Z[1]$. Так как композиция $Z \to X \to Y$ равна нулю, то морфизм $Z \to X$ тоже равен нулю. Значит f — вложение прямым слагаемым. Случай эпиморфизма разбирается аналогично. □

Фильтрацией на объекте X триангулированной категории $\mathcal{T}$ называется любая коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & F^{p+1}X \arrow[r] \arrow[d] & F^pX \arrow[r] \arrow[d] & F^{p-1}X \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, equal] & X \arrow[r, equal] & X \arrow[r, equal] & X \arrow[r, equal] & \cdots \end{tikzcd}$$

Фильтрация называется **конечной**, если при $p \gg 0$ морфизм $F^pX \to X$ — изоморфизм, а при $p \ll 0$ $F^pX = 0$. Конусы морфизмов $F^{p+1}X \to F^pX$ называются факторами фильтрации:

$$\mathsf{gr}^p_F X = C(F^{p+1}X \to F^pX).$$

Они определены с точностью до (неканонического) изоморфизма.

Есть два важных примера. Рассмотрим комплекс $X^\bullet$ в гомотопической категории $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$.

Глупой фильтрацией на $X^\bullet$ называется фильтрация $F^pX = \sigma_{\geqslant p}X$, где

$$(\sigma_{\geqslant p}X)^k = \begin{cases} X^k, & \text{если } k \geqslant p \\ 0, & \text{если } k < p \end{cases}$$

Канонической фильтрацией на $X^\bullet$ называется фильтрация $F^pX = \tau_{\leqslant -p}X$, где

$$(\tau_{\leqslant -p}X)^k = \begin{cases} X^k, & \text{если } k < -p \\ \mathrm{Ker}\, d^p_X, & \text{если } k = p \\ 0, & \text{если } k < p \end{cases}$$

Упражнение 1.2. Покажите, что $\mathsf{gr}^p_\sigma X \cong X^p$, $\mathsf{gr}^p_\tau X \cong H^p(X)$.

Обе приведенные фильтрации функториальны в гомотопической категории — всякий морфизм $f : X \to Y$ индуцирует морфизмы $\sigma_{\geqslant p}f : \sigma_{\geqslant p}X \to \sigma_{\geqslant p}Y$ и $\tau_{\leqslant -p}f : \tau_{\leqslant -p}X \to \tau_{\leqslant -p}Y$, коммутирующие со всеми морфизмами фильтрации. Однако, при попытке опустить эти филтрации на производную категорию, результат оказывается противоположным. В самом деле, приведенное упражнение показывает, что глупая фильтрация не опускается на производную категорию, так как у квазиизоморфных комплексов могут быть совершенно разные члены.

Лемма 1.3. *Если $s : X \to Y$ квазиизоморфизм, то $\tau_{\leqslant -p}s : \tau_{\leqslant -p}X \to \tau_{\leqslant -p}Y$ — квазиизоморфизмы.*

Доказательство. Рассмотрим коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leqslant -p}X \arrow[r, "\tau_{\leqslant -p}s"] \arrow[d] & \tau_{\leqslant -p}Y \arrow[d] \\
X \arrow[r, "s"] & Y
\end{tikzcd}$$

Переходя к когомологиям, получаем коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd}
H^k(\tau_{\leqslant -p}X) \arrow[r, "H^k(\tau_{\leqslant -p}s)"] \arrow[d] & H^k(\tau_{\leqslant -p}Y) \arrow[d] \\
H^k(X) \arrow[r, "H^k(s)"] & H^k(Y)
\end{tikzcd}$$

Если $k \leqslant -p$, то вертикальные стрелки — изоморфизмы. Нижняя стрелка тоже изоморфизм. Значит и верхняя стрелка изоморфизм. С другой стороны, при $k > -p$ имеем $H^k(\tau_{\leqslant -p}X) = H^k(\tau_{\leqslant -p}Y) = 0$, поэтому верхняя стрелка изоморфизм и в этом случае. Значит $\tau_{\leqslant -p}s$ — квазиизоморфизм. □

Согласно универсальному свойству локализации, функторы $\tau_{\geqslant -p}$ опускаются на производную категорию. Значит для любого объекта X в $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ имеем каноническую фильтрацию $\tau_{\geqslant -p}X$, такую что $\mathsf{gr}^p_\tau X \cong H^p(X)$, причем функториальную.

Упражнение 1.4. Покажите, что существуют также функторы $\tau_{\geqslant q} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{A})$ и морфизмы функторов $\tau_{\leqslant q} \to \mathrm{id} \to \tau_{\geqslant q+1} \to [1] \circ \tau_{\leqslant q}$, такие что для любого X треугольник $\tau_{\leqslant q}X \to X \to \tau_{\geqslant q+1}X \to (\tau_{\leqslant q}X)[1]$ выделен.

Часть 2. Стандартная t-структура

Свойства функторов обрезания относительно канонической фильтрации аксиоматизируются понятием t-структуры. По определению, t-**структура** на триангулированной категории $\mathcal{T}$ — это пара строго полных (но не триангулированных!) подкатегорий $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$, удовлетворяющих следующим свойствам. Обозначим

$$\mathcal{T}^{\leqslant t} := \mathcal{T}^{\leqslant 0}[-t], \qquad \mathcal{T}^{\geqslant t} := \mathcal{T}^{\geqslant 0}[-t].$$

Тогда

(1) $\mathcal{T}^{\leqslant -1} \subset \mathcal{T}^{\leqslant 0}$, $\mathcal{T}^{\geqslant 1} \subset \mathcal{T}^{\geqslant 0}$;
(2) $\mathrm{Hom}(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 1}) = 0$;
(3) для любого объекта $X \in \mathcal{T}$ существует выделенный треугольник $X_{\leqslant 0} \to X \to X_{\geqslant 1} \to X_{\leqslant 0}[1]$, такой что $X_{\leqslant 0} \in \mathcal{T}^{\leqslant 0}$, а $X_{\geqslant 1} \in \mathcal{T}^{\geqslant 1}$.

t-структура $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ называется **невырожденной**, если $\bigcap_{t=-\infty}^{\infty} \mathcal{T}^{\leqslant t} = \bigcap_{t=-\infty}^{\infty} \mathcal{T}^{\geqslant t} = 0$.

Если $\mathcal{T} = \mathcal{D}(\mathcal{A})$ — производная категория, на ней существует t-структура, называемая **стандартной**.

Лемма 2.1. *Положим*

$$\mathcal{D}^{\leqslant 0}(\mathcal{A}) := \{ X \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \mid H^p(X) = 0 \forall p > 0 \}, \qquad \mathcal{D}^{\geqslant 0}(\mathcal{A}) := \{ X \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \mid H^p(X) = 0 \forall p < 0 \}.$$

Тогда $(\mathcal{D}^{\leqslant 0}(\mathcal{A}), \mathcal{D}^{\geqslant 0}(\mathcal{A}))$ *— невырожденная t-структура.*

Доказательство. Свойство (1) очевидно, а свойство (3) следует из упражнений. Остается проверить свойство (2). Пусть $X \in \mathcal{D}^{\leqslant 0}(\mathcal{A})$, $Y \in \mathcal{D}^{\geqslant 1}(\mathcal{A})$. Меняя X на квазиизоморфный ему комплекс $\tau_{\leq 0}X$ можно считать, что члены комплекса X равны нулю в положительных степенях. По определению $\mathrm{Hom}(X, Y)$ — множество классов эквивалентности левых дробей $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{s} Y$, где s — квазиизоморфизм. Так как $Y \in \mathcal{D}^{\geqslant 1}(\mathcal{A})$, то и $Z \in \mathcal{D}^{\geqslant 1}(\mathcal{A})$, поэтому морфизм $Z \to \tau_{\geqslant 1}Z$ — квазиизоморфизм, поэтому всякая такая дробь эквивалентна дроби $X \to \tau_{\geqslant 1}Z \leftarrow Y$. Но у комплекса $\tau_{\geqslant 1}Z$ все члены в неположительных степенях равны нулю, а у комплекса X — все члены в положительных степенях равны нулю, поэтому в гомотопической категории

$\mathrm{Hom}(X, \tau_{\geqslant 1} Z) = 0$. Значит всякая дробь эквивалентна нулю. Таким образом, перед нами t-структура. Ее невырожденность очевидна — указанное пересечение состоит из ацикличных комплексов, а они в производной категории равны нулю. $\square$

Лемма 2.2. *Для любых объектов $X, Y \in \mathcal{A}$ имеем*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(X, Y[t]) \cong \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0 \\ \mathrm{Ext}^t_I(X, Y), & \text{если } t \geqslant 0 \end{cases}$$

В частности, функтор вложения $\mathcal{A} \to \mathcal{D}(\mathcal{A})$ — строго полный. Более того, он индуцирует эквивалентность $\mathcal{A}$ и подкатегории $\mathcal{D}^0(\mathcal{A}) := \mathcal{D}^{\leqslant 0}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{D}^{\geqslant 0}(\mathcal{A})$.

Доказательство. Если $t < 0$, то зануление морфизмов доказано в предыдущей лемме. Пусть $t > 0$. Заменяя в левой дроби $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{s} Y[t]$, представляющей морфизм $X \to Y[t]$ объект Z на $\tau_{\geqslant -t} Z$, можно считать, что комплекс Z сосредоточен в степенях $\geqslant -t$. Конус морфизма s — это комплекс $0 \to Y \to Z^{-t} \to Z^{1-t} \to \dots$. Так как s — квазиизоморфизм, он ацикличен. В частности, морфизм $Y \to Z^{-t}$ — вложение, а комплекс $0 \to Y \to Z^{-t} \to \dots \to Z^{-1} \to \mathrm{Ker}\, d^0_Z \to 0$ — точная последовательность, задающая класс $\epsilon_s \in \mathrm{Ext}^t_I(\mathrm{Ker}\, d^0_Z, Y)$. Морфизм $f : X \to Z$ задается морфизмом $X \to \mathrm{Ker}\, d^0_Z$, компонируя который с ϵ_s получаем класс $\epsilon_s \circ f \in \mathrm{Ext}^t_I(X, Y)$.

Обратно, рассмотрим расширение $0 \to Y \to Z^{-t} \to \dots \to Z^{-1} \to X \to 0$. Положим $Z^0 = X$, тогда $Z^\bullet$ — комплекс, вложение $Y \to Z^{-t}$ индуцирует квазиизоморфизм $s : Y[t] \to Z$, а изоморфизм $X \to Z^0$ — морфизм $X \to Z$. В итоге получаем левую дробь $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{s} Y[t]$.

Покажем, что тем самым мы построили взаимно обратные отображения между $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(X, Y[t])$ и $\mathrm{Ext}^t_I(X, Y)$. Во-первых, надо проверить корректность. Пусть $t : Z \to V$ — квазиизоморфизм комплексов, сосредоточенных в степенях $\geqslant -t$. Легко видеть, что он индуцирует элементарную эквивалентность соответствующих расширений. Обратно, элементарная эквивалентность расширений очевидно дает эквивалентность соответствующих левых дробей.

Осталось проверить взаимную обратность построенных отображений. Тождественность одной из композиций очевидна — если мы начнем с расширения, построим по нему левую дробь, а затем по ней расширение — получим то же, с чего и начали. Обратно, если мы начнем с левой дроби, построим по ней расширение, а затем левую дробь, то в результате комплекс Z заменится на квазиизомрфный ему комплекс Z', причем морфизмы $s : Y[t] \to Z$ и $f : X \to Z$ пропустятся через Z'. Поэтому полученная левая дробь будет эквивалентна исходной.

Пусть, наконец, $t = 0$. Всякий морфизм $X \to Y$ представляется в виде левой дроби $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{s} Y$, где комплекс Z сосредоточен в неотрицательных степенях. Конус морфизма s — это комплекс $0 \to Y \to Z^0 \to Z^1 \to \dots$. Так как s — квазиизоморфизм, он ацикличен. Поэтому последовательность $0 \to \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(X, Z^0) \to \mathrm{Hom}(X, Z^1)$ точна слева. Но это в точности означает, что любой морфизм из X в $C(s)$ и в $C(s)[-1]$ гомотопен нулю! Из выделенного в $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$ треугольника $C(s)[-1] \to Y \to Z \to C(s)$ получаем изоморфизм $\mathrm{Hom}(X, Y) \cong \mathrm{Hom}(X, Z)$. Это доказывает то, что функтор $\mathcal{A} \to \mathcal{D}(\mathcal{A})$ строго полон.

Остается проверить, что категория $\mathcal{D}^0(\mathcal{A})$ является существенным образом категории $\mathcal{A}$. В самом деле, образ $\mathcal{A}$ очевидно лежит в $\mathcal{D}^0(\mathcal{A})$. С другой стороны, если $X \in \mathcal{D}^0(\mathcal{A})$, то морфизмы $X \to \tau_{\geqslant 0} X$ и $\tau_{\leqslant 0}\tau_{\geqslant 0} X$ — квазиизоморфизмы, а $\tau_{\leqslant 0}\tau_{\geqslant 0} X$ — комплекс, сосредоточенный в степени 0, то есть лежащий в образе функтора. Значит всякий объект в $\mathcal{D}^0(\mathcal{A})$ изоморфен объекту в $\mathcal{A}$. $\square$

Упражнение 2.3. Пусть $X, Y \in \mathcal{A}$. Покажите, что функтор $E^i(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(X, Y[i])$ является δ-функтором по обоим аргументам. При этом если в $\mathcal{A}$ достаточно много проективных объектов, то он стирающий по первому аргументу, а если достаточно много инъективных, то по второму.

Ясно, что стандартная t-структура индуцирует t-структуры и на ограниченных вариантах производной категории. Все они тоже называются стандартными.

Пусть $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ — t-структура. Обозначим $\mathcal{T}^{[a,b]} := \mathcal{T}^{\geqslant a} \cap \mathcal{T}^{\leqslant b}$. t-структура называется ограниченной, если $\mathcal{T} = \bigcup_{a \leqslant b} \mathcal{T}^{[a,b]}$.

Упражнение 2.4. Покажите, что стандартная t-структура на $\mathcal{D}^*(\mathcal{A})$ ограничена $\iff * = b$.

Часть 3. Свойства t-структур

Как видно из определения, понятие t-структуры очень похоже на понятие полуортогонального разложения. Отличие в том, что в полуортогональном разложении подкатегории должны быть инвариантными относительно всех сдвигов, а не только относительно положительных или отрицательных.

Лемма 3.1. *Если $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ — t-структура на триангулированной категории $\mathcal{T}$, то существуют функторы $\tau_{\leqslant t} : \mathcal{T} \to \mathcal{T}^{\leqslant t}$, $\tau_{\geqslant t} : \mathcal{T} \to \mathcal{T}^{\geqslant t}$, и морфизмы функторов $\tau_{\leqslant t} \to \mathrm{id} \to \tau_{\geqslant t+1} \to [1] \circ \tau_{\leqslant t}$, такие что для любого X треугольник $\tau_{\leqslant t} X \to X \to \tau_{\geqslant t+1} X \to (\tau_{\leqslant t} X)[1]$ выделен.*

Доказательство. Рассмотрим вначале случай $t = 0$. Для всяких $X, Y \in \mathcal{T}$ по свойству (3) определения t-структуры найдутся выделенные треугольники $X_{\leqslant 0} \to X \to X_{\geqslant 1} \to X_{\leqslant 0}[1]$ и $Y_{\leqslant 0} \to Y \to Y_{\geqslant 1} \to Y_{\leqslant 0}[1]$ в которых $X_{\leqslant 0}, Y_{\leqslant 0} \in \mathcal{T}^{\leqslant 0}$, а $X_{\geqslant 1}, Y_{\geqslant 1} \in \mathcal{T}^{\geqslant 1}$. Заметим, что $\mathrm{Hom}(X_{\leqslant 0}, Y_{\geqslant 1}) = 0$ по свойству (2), поэтому для любого морфизма $f : X \to Y$ найдутся морфизмы $f_{\leqslant 0} : X_{\leqslant 0} \to Y_{\leqslant 0}$ и $f_{\geqslant 1} : X_{\geqslant 1} \to Y_{\geqslant 1}$, образующие морфизм треугольников. Более того, $\mathrm{Hom}(X_{\leqslant 0}, Y_{\geqslant 1}[-1]) = 0$ по свойству (2), так как $Y_{\geqslant 1}[1] \in \mathcal{T}^{\geqslant 2} \subset \mathcal{T}^{\geqslant 1}$ по свойству (1), а $X_{\leqslant 0} \in \mathcal{T}^{\leqslant 0}$. Поэтому такие морфизмы однозначно определены. Следовательно, сопоставление $X \mapsto X_{\leqslant 0}$, $f \mapsto f_{\leqslant 0}$ является функтором $\mathcal{T} \to \mathcal{T}^{\leqslant 0}$ (обозначим его $\tau_{\leqslant 0}$), а сопоставление $X \mapsto X_{\geqslant 1}$, $f \mapsto f_{\leqslant 1}$ является функтором $\mathcal{T} \to \mathcal{T}^{\geqslant 0}$ (обозначим его $\tau_{\geqslant 0}$). При этом морфизмы в треугольниках задают искомые морфизмы функторов. Остается заметить, что положив $\tau_{\leqslant t} := [-t] \circ \tau_{\leqslant 0} \circ [t]$, $\tau_{\geqslant t+1} := [-t] \circ \tau_{\geqslant 1} \circ [t]$, получим остальные функторы. □

Упражнение 3.2. Пусть $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ — t-структура. Покажите, что (a) $\mathcal{T}^{\leqslant 0}[1] \subset \mathcal{T}^{\leqslant 0}$, а $\mathcal{T}^{\geqslant 0}[-1] \subset \mathcal{T}^{\geqslant 0}$;
(b) $\mathcal{T}^{\leqslant 0}$ и $\mathcal{T}^{\geqslant 0}$ замкнуты относительно расширений (подкатегория $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}$ замкнута относительно расширений, если для любого выделенного треугольника $X \to Y \to Z \to X[1]$ с $X, Z \in \mathcal{C}$ выполнено $Y \in \mathcal{C}$);
(c) функтор $\tau_{\leqslant 0}$ сопряжен справа к функтору вложения $\mathcal{T}^{\leqslant 0} \to \mathcal{T}$, а функтор $\tau_{\geqslant 0}$ сопряжен слева к функтору вложения $\mathcal{T}^{\geqslant 0} \to \mathcal{T}$.

Упражнение 3.3. Пусть $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ — t-структура. Покажите, что
(a) $\tau_{\leqslant p} \circ [q] \cong [q] \circ \tau_{\leqslant p+q}$, $\tau_{\geqslant p} \circ [q] \cong [q] \circ \tau_{\geqslant p+q}$;
(b) морфизм функторов $\tau_{\leqslant p} \to \mathrm{id}$ при ограничении на $\mathcal{T}^{\leqslant p}$ становится изоморфизмом.

Всякая t-структура однозначно восстанавливается по любой из подкатегорий $\mathcal{T}^{\leqslant 0}$ или $\mathcal{T}^{\geqslant 0}$.

Лемма 3.4. *Пусть $\mathcal{T}^{\leqslant 0} \subset \mathcal{T}$ — полная подкатегория, такая что*

- *$\mathcal{T}^{\leqslant 0}[1] \subset \mathcal{T}^{\leqslant 0}$;*
- *$\mathcal{T}^{\leqslant 0}$ замкнута относительно расширений;*
- *функтор вложения $\mathcal{T}^{\leqslant 0} \to \mathcal{T}$ допускает правый сопряженный.*

Тогда существует t-структура $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ на $\mathcal{T}$ с $\mathcal{T}^{\geqslant 1} = (\mathcal{T}^{\leqslant 0})^{\perp}$.

Доказательство. Определим $\mathcal{T}^{\geqslant 0}$ как $(\mathcal{T}^{\leqslant 0})^{\perp}[1]$. Тогда свойство (1) для категории $\mathcal{T}^{\leqslant 0}$ очевидно. Проверим его для категории $\mathcal{T}^{\geqslant 0}$. Пусть $Y \in \mathcal{T}^{\geqslant 1}$. Надо проверить, что $Y \in \mathcal{T}^{\geqslant 0}$, то есть что $Y[-1] \in \mathcal{T}^{\geqslant 1}$, то есть что $\mathrm{Hom}(X, Y[-1]) = 0$ для всех $X \in \mathcal{T}^{\leqslant 0}$. Но ясно, что $\mathrm{Hom}(X, Y[-1]) = \mathrm{Hom}(X[1], Y) = 0$, так как $X[1] \in \mathcal{T}^{\leqslant 0}[1] = \mathcal{T}^{\leqslant -1} \subset \mathcal{T}^{\leqslant 0}$, а $Y \in \mathcal{T}^{\geqslant 1}$. Далее, свойство (2) выполнено по определению категории $\mathcal{T}^{\geqslant 1}$. Остается проверить (3). Обозначим функтор вложения $\mathcal{T}^{\leqslant 0} \to \mathcal{T}$ через i, а его правый сопряженный через $i^!$. Тогда для всякого X имеем естественный морфизм $ii^! X \to X$. Заметим сразу, что из сопряженности следует, что если $Y \in \mathcal{T}^{\leqslant 0}$, то любой морфизм $Y \to X$ единственным образом поднимается до морфизма $Y \to ii^! X$.

Дополним теперь морфизм $ii^! X \to X$ до выделенного треугольника $ii^! X \to X \to X' \to ii^! X[1]$. Покажем, что $X' \in \mathcal{T}^{\geqslant 1}$. Для этого возьмем произвольный $Y \in \mathcal{T}^{\leqslant 0}$ и произвольный морфизм $f : Y \to X'$. Дополним композицию $Y \to X' \to ii^! X[1]$ до морфизма выделенных треугольников

$$\begin{tikzcd}
ii^! X \arrow[r] \arrow[d, equal] & \tilde{Y} \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{f}"] \arrow[dl, dashed, "\hat{f}"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "f"] & ii^! X[1] \arrow[d, equal] \\
ii^! X \arrow[r] & X \arrow[r] & X' \arrow[r] & ii^! X[1]
\end{tikzcd}$$

Так как $\mathcal{T}^{\leqslant 0}$ замкнута относительно расширений, $\tilde{Y} \in \mathcal{T}^{\leqslant 0}$. Следовательно, морфизм $\tilde{f} : \tilde{Y} \to X$ поднимается до морфизма $\hat{f} : \tilde{Y} \to ii^!X$. А из единственности поднятия, следует коммутативность левого верхнего треугольника в диаграмме. Из нее же следует, что морфизм $ii^!X \to \tilde{Y}$ — вложение прямого слагаемого, а значит морфизм $Y \to ii^!X$ равен нулю. Но это в свою очередь означает, что f поднимается до морфизма $Y \to X$, который в свою очередь поднимается до морфизма $Y \to ii^!X$. Значит f пропускается через композицию $ii^!X \to X \to X'$, а значит равен нулю. □

Замечательным наблюдением является следующая

Теорема 3.5. *Пусть $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ — невырожденная t-структура на триангулированной категории $\mathcal{T}$. Тогда категория $\mathcal{T}^0 = \mathcal{T}^{\leqslant 0} \cap \mathcal{T}^{\geqslant 0}$ — абелева.*

Доказательство. Прямая сумма объектов является их расширением, а категории $\mathcal{T}^{\leqslant 0}$ и $\mathcal{T}^{\geqslant 0}$ замкнуты относительно расширений. Значит $\mathcal{T}^0$ тоже замкнута относительно расширений, и в частности относительно прямых сумм. Следовательно, $\mathcal{T}^0$ — аддитивная подкатегория в $\mathcal{T}$.

Проверим существование ядер и коядер в $\mathcal{T}^0$. Пусть $X, Y \in \mathcal{T}^0$, а $f : X \to Y$ — морфизм. Дополним его до выделенного треугольника

$$U \xrightarrow{u} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{v} U[1].$$

Заметим, что $U \in \mathcal{T}^{[0,1]}$. В самом деле, $X, Y[-1] \in \mathcal{T}^{[0,1]}$, а $\mathcal{T}^{[0,1]} = \mathcal{T}^{\geqslant 0} \cap \mathcal{T}^{\leqslant 1}$ замкнута относительно расширений. Пусть $K = \tau_{\leqslant 0}U$, $C = \tau_{\geqslant 0}(U[1]) = (\tau_{\geqslant 1}U)[1]$ и рассмотрим композиции $K \to U \to X$ и $Y \to U[1] \to C$. Покажем, что они являются ядром и коядром f соответственно. В самом деле, пусть $Z \in \mathcal{T}^0$ и $g : Z \to X$ — такой морфизм, что $f \circ g = 0$:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, dashed, "g'"'] \arrow[d, "g"] & & \\ U \arrow[r, "u"] & X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "v"] & U[1] \end{tikzcd}$$

Тогда существует $g' : Z \to U$, такой что $u \circ g' = g$. При этом $\mathrm{Hom}(Z, Y[-1]) = 0$, так как $Z \in \mathcal{T}^0 \subset \mathcal{T}^{\leqslant 0}$, а $Y[-1] \in \mathcal{T}^0[-1] \subset \mathcal{T}^{\geqslant 0}[-1] = \mathcal{T}^{\geqslant 1}$. Поэтому такой морфизм g' единственен. Наконец, так как $Z \in \mathcal{T}^0$ морфизм $g' : Z \to U$ единственным образом поднимается до морфизма $g'' : Z \to \tau_{\leqslant 0}U = K$. Таким образом, универсальное свойство ядра выполнено. Так же проверяется универсальное свойство коядра.

Остается проверить, что коядро ядра равно ядру коядра. Для этого построим диаграмму октаэдра

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[d, equal] & U \arrow[r] \arrow[d] & C[-1] \arrow[r] \arrow[d] & K[1] \arrow[d, equal] \\ K \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[r] \arrow[d] & K[1] \arrow[d] \\ & Y \arrow[r, equal] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & U[1] \\ & U[1] \arrow[r] & C & \end{tikzcd}$$

Так как $X \in \mathcal{T}^0$, а $K[1] \in \mathcal{T}^{-1}$, из второй строчки следует, что $V \in \mathcal{T}^{[-1,0]}$. С другой стороны, $C[-1] \in \mathcal{T}^1$, $Y \in \mathcal{T}^0$ значит $V \in \mathcal{T}[0,1]$. Сравнивая, получаем, что $V \in \mathcal{T}^{[-1,0]} \cap \mathcal{T}^{[0,1]} \subset \mathcal{T}^{\leqslant 0} \cap \mathcal{T}^{\geqslant 0} = \mathcal{T}^0$. Остается заметить, что коядро ядра — это $\tau_{\geqslant 0}V \cong V$, а ядро коядра — $\tau_{\leqslant 0}V \cong V$, так что и коядро ядра и ядро коядра совпадают с V. □

Абелева категория $\mathcal{T}^0$ называется сердцевиной t-структуры $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$. Ясно, что сердцевина стандартной t-структуры на $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ совпадает с $\mathcal{A}$.

Упражнение 3.6. Покажите, что аддитивная подкатегория $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ является сердцевиной ограниченной t-структуры на $\mathcal{T} \iff \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{A}[-t]) = 0$ для $t > 0$, и для любого объекта $X \in \mathcal{T}$ существует конечная фильтрация $F^\bullet X$, такая что $\mathrm{gr}^p_F(X) \in \mathcal{A}[p]$ для всех p.

Если $\mathcal{T} = \mathcal{D}(\mathcal{A})$, то помимо стандартной t-структуры на X существует и множество других. Например, на множестве всех t-структур действует группа автоэквивалентностей.

Упражнение 3.7. Опишите все t-структуры в $\mathcal{D}^b(\mathsf{k}-\mathsf{mod})$.

Бывают и более экзотические примеры.

Упражнение 3.8. Пусть $\mathcal{T} = \mathcal{D}(\mathbb{Z}-\mathsf{mod})$ — производная категория конечно порожденных абелевых групп. Пусть

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{\leqslant 0} &= \{ X \in \mathcal{D}(\mathbb{Z}-\mathsf{mod}) \mid H^t(X) = 0 \text{ при } t > 0, \text{ а } H^0(X) \text{ — группа кручения} \} \\ \mathcal{T}^{\geqslant 1} &= \{ X \in \mathcal{D}(\mathbb{Z}-\mathsf{mod}) \mid H^t(X) = 0 \text{ при } t < 0, \text{ а } H^0(X) \text{ — группа без кручения} \} \end{aligned}$$

Покажите, что $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ — невырожденаая t-структура.

Лемма 3.9. *Пусть* $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ *— t-структура. Если* $X, Y \in \mathcal{T}^0$*, то* $\mathrm{Hom}(X, Y[1]) \cong \mathrm{Ext}^1_I(X, Y)$.

Доказательство. Пусть $f : X \to Y[1]$ — морфизм. Достроим его до выделенного треугольника $Y \to Z \to X \to Y[1]$. Тогда $Z \in \mathcal{T}^0$, а последовательность $0 \to Y \to Z \to X \to 0$ в $\mathcal{T}^0$ точна. Таким образом, получаем класс в $\mathrm{Ext}^1_I(X, Y)$.

Обратно, пусть $0 \to Y \to Z \to X \to 0$ — точная тройка в $\mathcal{T}^0$. Достроим морфизм $Y \to Z$ в $\mathcal{T}$ до выделенного треугольника $Y \to Z \to X' \to Y[1]$. Так как $Y \to Z$ — вложение в $\mathcal{T}^0$, то X' есть коядро этого морфизма, то есть $X' \cong X$. Тем самым получаем морфизм $X \cong X' \to Y[1]$. Построенные отображения очевидно взаимно обратны. □

По аналогии часто используется обозначение $\mathrm{Ext}^i(X, Y) := \mathrm{Hom}(X, Y[i])$. В отличии от случая $i = 1$, для $i > 1$ он не обязан являться изоморфизмом.

Естественный вопрос — насколько отличается производная категория от сердцевины t-структуры от исходной триангулированной категории. Наиболее сложный вопрос здесь — построение функтора $\mathcal{D}(\mathcal{T}^0) \to \mathcal{T}$, тождественного на подкатегории $\mathcal{T}^0$. В общей ситуации такой функтор построить невозможно (ввиду нефункториальности конуса). Чтобы это сделать, нужно иметь дополнительную структуру на категории $\mathcal{T}$. Здесь есть разные варианты, наиболее распространенный — структура f-категории (аксиоматизация фильтрованной производной категории). После того, как функтор построен остается следующее условие — надо чтобы морфизм $\mathrm{Ext}^i_I(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y[i])$, индуцированный этим функтором, был изоморфизмом. Это условие, на самом деле эквивалентно такому: всякий морфизм $X \to Y[i]$ в категории $\mathcal{T}$, где $X, Y \in \mathcal{T}^0$ раскладывался в композицию $X \to X_1[1] \to X_2[2] \to \cdots \to X_{i-1}[i-1] \to Y[i]$, где $X_1, X_2, \ldots, X_{i-1} \in \mathcal{T}^0$ (иначе говоря $\mathrm{Ext}^\bullet$ в категории $\mathcal{T}$ порождается Ext^1).

Часть 4. Когомологии относительно t-структуры

Лемма 4.1. *Пусть* $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ *— t-структура. Тогда для всех $a \leqslant b$ существует канонические изоморфизмы функторов* $\tau_{\leqslant a}\tau_{\leqslant b} \cong \tau_{\leqslant b}\tau_{\leqslant a} \cong \tau_{\leqslant a}$ *и* $\tau_{\geqslant a}\tau_{\geqslant b} \cong \tau_{\geqslant b}\tau_{\geqslant a} \cong \tau_{\geqslant b}$.

Доказательство. Функтор вложения $\mathcal{T}^{\leqslant a} \to \mathcal{T}$ раскладывается в композицию $\mathcal{T}^{\leqslant a} \to \mathcal{T}^{\leqslant b} \to \mathcal{T}$. Поэтому его сопряженный функтор $\tau_{\leqslant a}$ раскладывается в композицию $\tau_{\leqslant a}\tau_{\leqslant b}$. С другой стороны, так как функтор $\tau_{\leqslant b}$ тождественен на $\mathcal{T}^{\leqslant b}$, а образ $\tau_{\leqslant a}$ лежит в $\mathcal{T}^{\leqslant a} \subset \mathcal{T}^{\leqslant b}$, получаем второй изоморфизм. □

Лемма 4.2. *Пусть* $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ *— t-структура. Тогда для всех $a \leqslant b$ существует канонический изоморфизм функторов* $\tau_{\leqslant b}\tau_{\geqslant a} \cong \tau_{\geqslant a}\tau_{\leqslant b}$.

Доказательство. Пользуясь изоморфизмом $\tau_{\leqslant a-1}\tau_{\leqslant b} \cong \tau_{\leqslant a-1}$ построим диаграмму октаэдра

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leqslant a-1}X \arrow[r] \arrow[d, equal] & \tau_{\leqslant b}X \arrow[r] \arrow[d] & \tau_{\geqslant a}\tau_{\leqslant b}X \arrow[r] \arrow[d] & \tau_{\leqslant a-1}X[1] \arrow[d, equal] \\
\tau_{\leqslant a-1}X \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & \tau_{\geqslant a}X \arrow[r] \arrow[d] & \tau_{\leqslant a-1}X[1] \\
& \tau_{\geqslant b+1}X \arrow[r, equal] \arrow[d] & \tau_{\geqslant b+1}X \arrow[d] & \\
& \tau_{\leqslant b}X[1] \arrow[r] & \tau_{\geqslant a}\tau_{\leqslant b}X[1] &
\end{tikzcd}$$

Из верхней строчки следует, что $\tau_{\geqslant a}\tau_{\leqslant b}X \subset \mathcal{T}^{\geqslant b}$. При этом $\tau_{\geqslant b+1}X \in \mathcal{T}^{\geqslant b+1}$. Поэтому третий столбец является разложением объекта $\tau_{\geqslant a}X$ относительно пары $(\mathcal{T}^{\leqslant b}, \mathcal{T}^{\geqslant b+1})$. Так как такое разложение единственно, получаем изоморфизм $\tau_{\geqslant a}\tau_{\leqslant b}X \cong \tau_{\leqslant b}\tau_{\geqslant a}$, функториальность которого легко проверяется. ☐

Рассмотрим случай $a = b$ и определим функтор когомологий относительно t-структуры формулой

$$H^a(X) = (\tau_{\leqslant a}\tau_{\geqslant a}X)[a].$$

Упражнение 4.3. Покажите, что для стандартной t-структуры функторы H^a являются обычными функторами когомологий.

Упражнение 4.4. Покажите, что если $X \in \mathcal{T}^{\leqslant p}$, $Y \in \mathcal{T}^{\geqslant p}$, то всякий морфизм $X \to Y$ единственным образом представляется в виде композиции

$$X = \tau_{\leqslant p}X \to \tau_{\geqslant p}\tau_{\leqslant p}X = H^p(X)[-p] \to H^p(Y)[-p] = \tau_{\leqslant p}\tau_{\geqslant p}Y \to \tau_{\geqslant p}Y = Y.$$

В частности $\operatorname{Hom}(X, Y) = \operatorname{Hom}(H^p(X), H^p(Y))$.

Лемма 4.5. *Пусть $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ — t-структура. Тогда выполнен изоморфизм $H^{p+q}(X) \cong H^p(X[q])$. Кроме того, если $X \to Y \to Z \to X[1]$ — выделенный треугольник, то*

$$\cdots \to H^p(X) \to H^p(Y) \to H^p(Z) \to H^{p+1}(X) \to \dots$$

— длинная точная последовательность.

Доказательство. Изоморфизм легко следует из упражнения 3.3:

$$H^p(X[q]) = (\tau_{\leqslant p}\tau_{\geqslant p}(X[q]))[p] \cong (\tau_{\leqslant p+q}\tau_{\geqslant p+q}X)[p+q] = H^{p+q}(X).$$

Установим теперь точность последовательности когомологий. Прокручивая треугольник, можно все свести к точности последовательности $H^0(X) \to H^0(Y) \to H^0(Z)$ в среднем члене. Вначале проверим следующий факт — если $X \in \mathcal{T}^{\leqslant 0}$, то треугольник $\tau_{\leqslant 0}X \to \tau_{\leqslant 0}Y \to \tau_{\leqslant 0}Z \to (\tau_{\leqslant 0}X)[1]$ выделен, а последовательность $H^0(X) \to H^0(Y) \to H^0(Z) \to 0$ точна справа. В самом деле, построим диаграмму октаэдра

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leqslant 0}X \arrow[r] \arrow[d, equal] & \tau_{\leqslant 0}Y \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[r] \arrow[d] & (\tau_{\leqslant 0}X)[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & X[1] \\
& \tau_{\geqslant 1}Y \arrow[r, equal] \arrow[d] & \tau_{\geqslant 1}Y \arrow[d] & \\
& (\tau_{\leqslant 0}Y)[1] \arrow[r] & U[1] &
\end{tikzcd}$$

Из верхней строки видно, что $U \in \mathcal{T}^{\leqslant 0}$. При этом $\tau_{\geqslant 1}Y \in \mathcal{T}^{\geqslant 1}$. Поэтому из третьего столбца следует, что $\tau_{\geqslant 1}Y \cong \tau_{\geqslant 1}Z$, $U \cong \tau_{\leqslant 0}Z$. В частности, верхняя строка дает нужный треугольник. Возьмем теперь произвольный $V \in \mathcal{T}^0$ и применим к треугольнику функтор $\operatorname{Hom}(-, V)$. Получим точную последовательность

$$\operatorname{Hom}((\tau_{\leqslant 0}X)[1], V) \to \operatorname{Hom}(\tau_{\leqslant 0}Z, V) \to \operatorname{Hom}(\tau_{\leqslant 0}Y, V) \to \operatorname{Hom}(\tau_{\leqslant 0}X, V).$$

Заметим теперь, что $\mathrm{Hom}((\tau_{\leqslant 0}X)[1], V) = 0$, так как $(\tau_{\leqslant 0}X)[1] \in \mathcal{T}^{\leqslant -1}$, а $V \in \mathcal{T}^{\geqslant 0}$. Кроме того, из упражнения 4.4 следует, что $\mathrm{Hom}(\tau_{\leqslant 0}X, V) = \mathrm{Hom}(H^0(\tau_{\leqslant 0}X), H^0(V)) = \mathrm{Hom}(H^0(X), V)$ и аналогично с заменой X на Y и Z. Поэтому получаем точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(H^0(Z), V) \to \mathrm{Hom}(H^0(Y), V) \to \mathrm{Hom}(H^0(X), V).$$

Так как V произвольно, отсюда следует точность справа последовательности $H^0(X) \to H^0(Y) \to H^0(Z) \to 0$.

Аналогично проверяется, что если $Z \in \mathcal{T}^{\geqslant 0}$, то треугольник $\tau_{\geqslant 0}X \to \tau_{\geqslant 0}Y \to \tau_{\geqslant 0}Z \to (\tau_{\geqslant 0}X)[1]$ выделен, а последовательность $0 \to H^0(X) \to H^0(Y) \to H^0(Z)$ точна слева.

Построим теперь такую диаграмму октаэдра

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leqslant 0}X \arrow[r] \arrow[d, equal] & X \arrow[r] \arrow[d] & \tau_{\geqslant 1}X \arrow[r] \arrow[d] & (\tau_{\leqslant 0}X)[1] \arrow[d, equal] \\
\tau_{\leqslant 0}X \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d] & (\tau_{\leqslant 0}X)[1] \\
 & Z \arrow[r, equal] \arrow[d] & Z \arrow[d] & \\
 & X[1] \arrow[r] & (\tau_{\geqslant 1}X)[1] &
\end{tikzcd}$$

Так как $\tau_{\leqslant 0}X \in \mathcal{T}^{\leqslant 0}$ и $H^0(\tau_{\leqslant 0}X) = H^0(X)$ из второй строчки получаем точную последовательность $H^0(X) \to H^0(Y) \to H^0(W) \to 0$. Так как $(\tau_{\geqslant 1}X)[1] \in \mathcal{T}^{\geqslant 0}$ и $H^0((\tau_{\geqslant 1}X)[1]) = H^1(X)$ из третьего столбца получаем точную последовательность $0 \to H^0(W) \to H^0(Z) \to H^1(X)$. Склеивая их, получаем точную последовательность $H^0(X) \to H^0(Y) \to H^0(Z) \to H^1(X)$. $\square$

Упражнение 4.6. Пусть $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ — невырожденаая t-структура. Покажите, что
(a) $X = 0 \iff \forall p\ H^p(X) = 0$; (b) морфизм $f : X \to Y$ — изофморфизм $\iff \forall p\ H^p(f)$ — изоморфизм.

Функтор $H : \mathcal{T} \to \mathcal{A}$ из триангулированной категории в абелеву называется когомологическим, если для всякого выделенного треугольника $X \to Y \to Z \to X[1]$ последовательность $\cdots \to H^p(X) \to H^p(Y) \to H^p(Z) \to H^{p+1}(X) \to \dots$ точна. Предыдущую лемму можно переформулировать как утверждение о том, что функтор когомологий относительно t-структуры — когомологический. Другой пример когомологического функтора — функтор $\mathrm{Hom}(U, -)$.

Упражнение 4.7. Покажите, что композиция когомологического и точного функтора — когомологический функтор.

Пусть $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ — невырожденаая t-структура, а H^i — соответствующие функторы когомологий. Естественный вопрос — насколько объект $X \in \mathcal{T}$ определяется своими когомологиями $H^i(X)$. Если X имеет только одну нетривиальную когомологию $H^i(X)$, то он очевидно изоморфен $H^i(X)[-i]$.

Лемма 4.8. *Если X имеет ровно две нетривиальных когомологии $H^i(X)$ и $H^j(X)$ в степенях $i < j$, то X однозначно определяется морфизмом $H^j(X) \to H^i(X)[j-i+1]$.*

Доказательство. Рассмотрим треугольник $\tau_{\leqslant i}X \to X \to \tau_{\geqslant i+1}X \to \tau_{\leqslant i}X[1]$. Так как $\tau_{\leqslant i}X$ и $\tau_{\geqslant i+1}X$ имеют только одну когомологию, то $\tau_{\leqslant i}X \cong H^i(X)[-i]$, $\tau_{\geqslant i+1}X \cong H^j(X)[-j]$. Поэтому треугольник имеет вид $H^i(X) \to X \to H^j(X)[-j] \to H^i(X)[1-i]$. Так как треугольник однозначно (с точностью до изоморфизма) определяется морфизмом $H^j(X)[-j] \to H^i(X)[1-i]$, то есть морфизмом $H^j(X) \to H^i(X)[j+1-i]$. $\square$

Морфизм $H^j(X) \to H^i(X)[j-i+1]$ называется морфизмом склейки.

Упражнение 4.9. Опишите, какими данными определяется объект, имеющий ровно три нетривиальные когомологии.

Упражнение 4.10. Пусть $\mathcal{A}$ — абелева категория гомологической размерности 1 (то есть $\mathrm{Ext}^i_I(X, Y) = 0$ для $i \geqslant 2$ и всех $X, Y \in \mathcal{A}$). Докажите, что всякий объект $X \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ изоморфен $\oplus_i H^i(X)[-i]$.