# $DG$-категории

## Часть 1. $DG$-категории и $DG$-функторы

Важным источником триангулированных категорий являются $DG$-категории. $DG$-категория — это $\mathbb{Z}$-категория $\mathcal{A}$, на множествах морфизмов которой введена структура комплексов (то есть градуировка и дифференциал степени 1), такая что композиция морфизмов согласована с градуировкой и удовлетворяет правилу Лейбница. Иначе говоря, для любых $X, Y \in \mathcal{A}$ задан комплекс $(\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y), d^\bullet_{X,Y})$, так что

- если $f \in \mathrm{Hom}^k(X,Y)$, $g \in \mathrm{Hom}^l(Y,Z)$, то $g \circ f \in \mathrm{Hom}^{k+l}(X,Z)$;
- если $f \in \mathrm{Hom}^k(X,Y)$, $g \in \mathrm{Hom}^l(Y,Z)$, то $d_{X,Z}(g\circ f) = (d_{Y,Z}g)\circ f + (-1)^l g \circ (d_{X,Y}f)$.

Заметим, что тождественный морфизм обязан иметь степень ноль и быть замкнутым. В самом деле, пусть $\mathrm{id}_X = \sum e_i$, $e_i \in \mathrm{Hom}^i(X,X)$. Тогда $e_i = \mathrm{id}_X \circ e_i = \sum e_j \circ e_i$, откуда $e_0 \circ e_i = e_i$. С другой стороны, при $e_0 = e_0 \circ \mathrm{id}_X = \sum e_0 \circ e_i = \sum e_i$, откуда $e_i = 0$ при $i \ne 0$. Наконец, из тождества Лейбница следует, что $d(\mathrm{id}_X) = d(\mathrm{id}_X \circ \mathrm{id}_X) = d(\mathrm{id}_X)\circ \mathrm{id}_X + \mathrm{id}_X \circ d(\mathrm{id}_X) = 2d(\mathrm{id}_X)$, откуда $d(\mathrm{id}_X) = 0$.

$DG$-категория с одним объектом называется $DG$-алгеброй.

Всякую $\mathbb{Z}$-категорию можно рассматривать как $DG$-категорию, вводя на морфизмах тривиальную градуировку и дифференциал. Другой пример — категория комплексов. Пусть $\mathcal{B}$ — абелева категория. Рассмотрим категорию $\mathcal{C}_{\mathsf{dg}}(\mathcal{B})$, объекты которой — комплексы над $\mathcal{B}$, а морфизмы — формулой

$$\mathrm{Hom}^k(X^\bullet, Y^\bullet) = \prod_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(X^i, Y^{i+k}), \qquad d_{X,Y}(f) = (d_Y \circ f - (-1)^k f \circ d_X), \text{ если } f \in \mathrm{Hom}^k(X^\bullet, Y^\bullet).$$

Она является $DG$-категорией, так как

$$\begin{aligned}(d_{Y,Z}g)f + (-1)^l g(d_{X,Y}f) &= (d_Z g - (-1)^l g d_Y)f + (-1)^l g(d_Y f - (-1)^k f d_X) = \\ &= d_Z g f - (-1)^l g d_Y f + (-1)^l g d_Y f - (-1)^{k+l} g f d_X) = d_Z g f - (-1)^{k+l} g f d_X) = d_{X,Z}(gf).\end{aligned}$$

**Упражнение 1.1.** Пусть $\mathcal{A}$ — $DG$-категория. Покажите, что если в категории $\mathcal{A}^\circ$ изменить определение композиции морфизмов $f \in \mathrm{Hom}^k$ и $g \in \mathrm{Hom}^l$ на множитель $(-1)^{kl}$, то получится $DG$-категория.

**Упражнение 1.2.** Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ — $DG$-категории. Покажите, что категория $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}'$ с классом объектов $\mathcal{A}\times\mathcal{A}'$ и морфизмами $\mathrm{Hom}^\bullet((X,X'),(Y,Y')) = \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{A}}(X,Y)\otimes \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{A}'}(X',Y')$ является $DG$-категорией.

Всякой $DG$-категории $\mathcal{A}$ можно сопоставить две $\mathbb{Z}$-категории $Z^0(\mathcal{A})$ и $H^0(\mathcal{A})$ с тем же множеством объектов и морфизмами

$$\mathrm{Hom}_{Z^0(\mathcal{A})}(X,Y) = \mathrm{Ker}\, d^0_{X,Y} \subset \mathrm{Hom}^0(X,Y), \qquad \mathrm{Hom}_{H^0(\mathcal{A})}(X,Y) = H^0(\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y), d_{X,Y}).$$

**Упражнение 1.3.** Покажите, что $Z^0(\mathcal{C}_{\mathsf{dg}}(\mathcal{B})) = \mathrm{Com}(\mathcal{B})$, $H^0(\mathcal{C}_{\mathsf{dg}}(\mathcal{B})) = \mathrm{Hot}(\mathcal{B})$.

**Упражнение 1.4.** Покажите, что (a) $H^0(\mathcal{A}^\circ) = H^0(\mathcal{A})^\circ$; (b) $H^0(\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2) = H^0(\mathcal{A}_1)\times H^0(\mathcal{A}_2)$.

Таким образом, категория $H^0(\mathcal{A})$ для $DG$-категории $\mathcal{A}$ является обобщением гомотопической категории. Естественный вопрос — в каких случаях категория $H^0(\mathcal{A})$ триангулирована. Ответить на него помогают следующие понятия.

## Часть 2. $DG$-функторы и $DG$-модули

Функтор $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ между $DG$-категориями называется $DG$-функтором, если для всех $X, Y \in \mathcal{A}$ отображение $F : \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{A}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{A}'}(F(X),F(Y))$ является морфизмом комплексов (то есть сохраняет градуировку и коммутирует с дифференциалом).

Пусть $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ — $DG$-функторы. Определим $\mathrm{Hom}^n(F,G)$ как все наборы $\phi_X \in \mathrm{Hom}^n_{\mathcal{A}'}(F(X), G(X))$, такие что для всех $f \in \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{A}}(X,Y)$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\phi_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\phi_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

коммутативна. Дифференциалы в $\mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{A}'}(F(X), G(X))$ индуцируют на $\mathrm{Hom}^\bullet(F,G) = \oplus_n \mathrm{Hom}^n(F,G)$ структуру комплекса.

**Упражнение 2.1.** Покажите, что
(a) всякий $DG$-функтор $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ индуцирует функтор $H^0(F) : H^0(\mathcal{A}) \to H^0(\mathcal{A}')$;
(b) если $F, G$ — $DG$-функторы, то существует естественное вложение $H^0(\mathrm{Hom}^\bullet(F,G)) \subset \mathrm{Hom}(H^0(F), H^0(G))$.

Пусть $\mathcal{A}$ — $DG$-категория над полем $\mathsf{k}$. Левым $DG$-модулем над $\mathcal{A}$ называется $DG$-функтор $\mathcal{A} \to \mathcal{C}_{\mathsf{dg}}(\mathsf{k})$ из категории $\mathcal{A}$ в $DG$-категорию комплексов. Правым $DG$-модулем над $\mathcal{A}$ называется $DG$-функтор $\mathcal{A}^\circ \to \mathcal{C}_{\mathsf{dg}}(\mathsf{k})$.

**Пример 2.2.** Рассмотрим алгебру $A$ как $DG$-категорию с одним объектом, имеющим алгебру эндоморфизмов $A$. Тогда $DG$-модуль над $A$ — это комплекс $X^\bullet$ и морфизм комплексов $f : A \to \mathrm{Hom}^\bullet(X,X)$, согласованный с умножением. Так как алгебра $A$ сосредоточена в степени 0, морфизм $f$ задается морфизмом $A \to \mathrm{Hom}^0(X,X) = \prod_i \mathrm{Hom}(X_i, X_i)$. Его компоненты $f_i : A \to \mathrm{Hom}(X_i, X_i)$ позволяют ввести действие алгебры $A$ на каждом из $X_i$, причем легко видеть, что дифференциал комплекса $X$ согласован с этим действием. Таким образом на $X$ возникает структура комплекса $A$-модулей.

Пусть $\mathcal{A}$ — малая $DG$-категория. Все $DG$-модули над $\mathcal{A}$ образуют $DG$-категорию, в которой комплекс $\mathrm{Hom}^\bullet$ определяется как комплекс для $DG$-функторов. Эта категория обозначается $\mathcal{A}{-}\mathsf{DGMod}$.

**Упражнение 2.3.** Покажите, что если $A$ — алгебра, то $A{-}\mathsf{DGMod} \cong \mathcal{C}_{\mathsf{dg}}(A{-}\mathsf{Mod})$.

Всякому объекту $X$ категории $A$ можно сопоставить левый и правый $DG$-модули

$$h^X = \mathrm{Hom}^\bullet(X, -), \qquad h_X = \mathrm{Hom}^\bullet(-, X).$$

Эти $DG$-модули называются свободными (легко видеть, что свободный $DG$-модуль над категорией $A$ — это $A$, рассматриваемый как комплекс, сосредоточенный в степени 0). Легко видеть, что $h^\bullet : X \mapsto h^X$ и $h_\bullet : X \mapsto h_X$ — $DG$-функторы $\mathcal{A}^\circ \to \mathcal{A}{-}\mathsf{DGMod}$ и $\mathcal{A} \to \mathsf{DGMod}{-}\mathcal{A}$ соответственно.

**Упражнение 2.4.** Покажите, что функторы $h^\bullet$ и $h_\bullet$ строго полны.

**Лемма 2.5.** *Если $\mathcal{A}$ — малая $DG$-категория, то категория $\mathcal{H}(\mathcal{A}) := H^0(\mathcal{A}{-}\mathsf{DGMod})$ — триангулирована.*

*Доказательство.* Пусть $M$ — $DG$-модуль над $\mathcal{A}$. Определим $M[1](X) = M(X)[1]$. Ясно, что $[1]$ — автоморфизм категории $\mathcal{A}$–$\mathsf{DGMod}$. Аналогично, пусть $f : M \to N$ — замкнутый морфизм $\mathcal{A}$-$DG$-модулей степени 0, то есть $f \in \mathrm{Hom}_{Z^0(\mathcal{A}\text{–}\mathsf{DGMod})}(M,N)$. Для каждого объекта $X$ категории $\mathcal{A}$ он задает морфизм комплексов $f(A) : M(A) \to N(A)$. Определим $DG$-модуль $C(f)$ формулой

$$C(f)(A) = C(f(A)).$$

В силу функториальности конуса морфизма на категории комплексов, $C(f)$ является $DG$-функтором из категории $\mathcal{A}$ в $\mathcal{C}_{\mathsf{dg}}(\mathsf{k})$, то есть $DG$-модулем. При этом возникает естественный треугольник

$$M \to N \to C(f) \to M[1].$$

Определенный выше функтор сдвига и класс треугольников, изоморфных треугольникам указанного вида, задает на $\mathcal{H}(\mathcal{A}) = H^0(\mathcal{A}{-}\mathsf{DGMod})$ структуру триангулированной категории. В самом деле, доказательство триангулированности гомотопической категории дословно проходит и в этой ситуации — нужно только следить за функториальностью (по $\mathcal{A}$) всех возникающих морфизмов. $\square$

## Часть 3. Производная категория $DG$-категории

Морфизм $\mathcal{A}$-$DG$-модулей $f : M \to N$ (замкнутый, степени 0) называется квазиизоморфизмом, если для всех $X \in \mathcal{A}$ морфизм комплексов $f_X : M(X) \to N(X)$ — квазиизоморфизм. Повторяя рассуждение для гомотопической категории, можно проверить следующее.

**Упражнение 3.1.** Пусть $\mathcal{A}$ — малая $DG$-категория. Докажите, что класс квазиизоморфизмов в категории $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ удовлетворяет условиям Оре и согласован с триангулированной структурой.

Локализация категории $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ относительно квазиизоморфизмов называется производной категорией категории $\mathcal{A}$-$DG$-модулей и обозначается $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. В силу предыдущего упражнения она триангулирована, а функтор локализации $\mathcal{H}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{A})$ — точен.

$DG$-модуль $M$ над $\mathcal{A}$ называется ацикличным, если для всех $X \in \mathcal{A}$ комплекс $M(X)$ ацикличен. Обозначим через $\mathrm{Acycl}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}(\mathcal{A})$ подкатегорию ацикличных $DG$-модулей. Ясно, что $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{H}(\mathcal{A})/\,\mathrm{Acycl}(\mathcal{A})$.

Производные категории от малых $DG$-категорий — достаточно большой класс триангулированных категорий. Например, известно, что если $X$ — схема достаточно общего вида (квазикомпактная и квазиотделимая), то категория $\mathcal{D}(\mathsf{QCoh}(X))$ эквивалентна категории $\mathcal{D}(A)$ для $DG$-категории с одним объектом! Ввиду вышесказанного очень полезна следующая теорема.

**Теорема 3.2** (Keller)**.** *Подкатегория* $\mathrm{Acycl}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}(\mathcal{A})$ *допустима. В частности, всякий точный функтор* $F : \mathcal{H}(\mathcal{A}) \to \mathcal{T}$ *имеет левый и правый производные функторы* $RF, LF : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{T}$.

Правый и левый ортогоналы к $\mathrm{Acycl}(\mathcal{A})$ в $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ (то есть $h$-проективные и $h$-инъективные объекты) описать не очень просто. Хотя очевидно, что всякий представимый $\mathcal{A}$-модуль $h$-проективен, а всякий копредставимый $\mathcal{A}$-модуль $h$-инъективен.

## Часть 4. Претриангулированные категории

Как уже отмечалось, категория $H^0(\mathcal{A})$ сама бывает триангулированной.

**Лемма 4.1.** *Вложение* $h_\bullet : \mathcal{A} \to \mathsf{DGMod}-\mathcal{A}$ *индуцирует функтор* $H^0(\mathcal{A}) \to H^0(\mathsf{DGMod}-\mathcal{A}) = \mathcal{H}(\mathcal{A})$, *являющийся строго полным.*

*Доказательство.* Согласно $DG$-лемме Ионеда (упражнение 2.4) функтор $h_\bullet$ индуцирует изоморфизм комплексов $\mathrm{Hom}^\bullet(X, Y) \to \mathrm{Hom}^\bullet(h_X, h_Y)$, значит $H^0(h_\bullet)$ индуцирует изоморфизм их нулевых когомологий. □

Функтор $H^0(\mathcal{A}) \to \mathcal{H}(\mathcal{A})$ совершенно не обязан быть эквивалентностью. Например, если $\mathcal{A} = A$ — категория с одним объектом, то его образ — сам комплекс $A$. Зато используя его легко установить критерий триангулированности категории $H^0(\mathcal{A})$. Будем говорить, что $DG$-модуль $M$ гомотопически представим, если $M \cong h_X$ в категории $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ для какого-либо $X \in \mathcal{A}$.

**Лемма 4.2.** *Категория* $H^0(\mathcal{A})$ *триангулирована, если выполнены два условия:*

- *для любых* $X \in \mathcal{A}$, $t \in \mathbb{Z}$ *правый* $DG$*-модуль* $h_X[t]$ *гомотопически представим;*
- *для любого* $f \in \mathrm{Hom}_{Z^0(\mathcal{A})}(X, Y)$ *правый* $DG$*-модуль* $C(h_f : h_X \to h_Y)$ *гомотопически представим.*

*Доказательство.* Указанные условия гарантируют инвариантность образа категории $H^0(\mathcal{A})$ в $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ относительно сдвигов и конусов морфизмов, а значит его триангулированность. Но так как вкладывающий функтор строго полон, категория $H^0(\mathcal{A})$ эквивалентна своему образу, а значит и сама триангулирована. □

$DG$-категория $\mathcal{A}$, для которой выполнены условия леммы называется претриангулированной.

**Упражнение 4.3.** Покажите, что если $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ претриангулированные $DG$-категории, а $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ — $DG$-функтор, то функтор $H^0(F) : H^0(\mathcal{A}) \to H^0(\mathcal{A}')$ точен.

Для претриангулированной категории $\mathcal{A}$ категория $H^0(\mathcal{A})$ триангулирована. В противном случае, все равно можно рассмотреть триангулированную оболочку в $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ категории $H^0(\mathcal{A})$. Она обозначается $\mathcal{A}^{\mathsf{tr}}$.

Скрученным комплексом над $\mathcal{A}$ называется формальное выражение $(\oplus_{i=1}^n X_i[r_i], q)$, где

- $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{A}$;
- $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Z}$; и
- $q = (q_{ij})$, $q_{ij} \in \mathrm{Hom}^{r_i - r_j + 1}(X_j, X_i)$,

таких что $dq + q^2 = 0$ (то есть $dq_{ij} + \sum_{k=1}^n q_{ik} q_{kj} = 0$ для всех $i, j$). Скрученный комплекс называется односторонним, если $q_{ij} = 0$ для $i \geqslant j$ (то есть матрица $q$ строго верхнетреугольная). Всякий объект $X$ категории $\mathcal{A}$ можно рассматривать как тривиальный скрученный комплекс, полагая $n = 1$, $X_1 = X$, $r_1 = 0$, $q_{11} = 0$. Кроме того, всякий замкнутый морфизм $f : X \to Y$ в категории $\mathcal{A}$ можно рассматривать как скрученный комплекс, полагая $n = 2$, $X_1 = Y$, $X_2 = X$, $r_1 = r_2 = 0$, $q_{12} = f$.

**Упражнение 4.4.** Введите на скрученных комплексах структуру $DG$-категории, такую что односторонние и тривиальный скрученные комплексы являются в ней $DG$-подкатегориями.

Категория скрученных комплексов над $\mathcal{A}$ обозначается $\mathsf{Tw}(\mathcal{A})$, а категория односторонних скрученных комплексов — $\mathsf{Tw}^+(\mathcal{A})$.

**Упражнение 4.5.** Постройте строго полный $DG$-функтор $\mathsf{tot} : \mathsf{Tw}(\mathcal{A}) \to \mathsf{DGMod}{-}\mathcal{A}$, такой что $\mathsf{tot}_{|\mathcal{A}} = h_\bullet$. Покажите, что функтор $H^0(\mathsf{tot}) : H^0(\mathsf{Tw}(\mathcal{A})) \to \mathcal{H}(\mathcal{A})$ строго полон, и что $H^0(\mathsf{Tw}^+(\mathcal{A})) = \mathcal{A}^{\mathsf{tr}}$. В частности, категория $\mathsf{Tw}^+(\mathcal{A})$ претриангулирована.

**Упражнение 4.6.** Пусть $\mathcal{A}$ — претриангулированная $DG$-категория. Покажите, что функтор $\mathcal{A} \to \mathsf{Tw}^+(\mathcal{A})$ имеет квазиобратный $DG$-функтор $\mathsf{tot}^+ : \mathsf{Tw}^+(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$, такой что $\mathsf{tot} \cong h_\bullet \circ \mathsf{tot}^+$. Проверьте, что сопоставление $f \in \mathrm{Hom}_{Z^0(\mathcal{A})}(X, Y) \mapsto C(f) := \mathsf{tot}^+(X \oplus Y, f) \in \mathcal{A}$ (“конус морфизма”) $DG$-функториально.

## Часть 5. Оснащения

Оснащением триангулированной категории $\mathcal{T}$ называется претриангулированная $DG$-категория $\mathcal{A}$ и точная эквивалентность $\alpha : H^0(\mathcal{A}) \to \mathcal{T}$. Оснащением точного функтора $F : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ между оснащенными триангулированными категориями называется $DG$-функтор $\tilde{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ между оснащениями и морфизм функторов $\epsilon_F : F \circ \alpha \to \alpha' \circ H^0(\tilde{F})$, делающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} H^0(\mathcal{A}) \arrow[r, "H^0(\tilde{F})"] \arrow[d, "\alpha"'] & H^0(\mathcal{A}') \arrow[d, "\alpha'"] \\ \mathcal{T} \arrow[r, "F"] & \mathcal{T}' \end{tikzcd}$$

коммутативной. Оснащением морфизма $\phi : F \to G$ оснащенных функторов называется замкнутый морфизм $DG$-функторов $\tilde{\phi} : \tilde{F} \to \tilde{G}$, такой что диаграмма

$$\begin{tikzcd} F \circ \alpha \arrow[r, "\epsilon_F"] \arrow[d, "\phi"'] & \alpha' \circ \tilde{F} \arrow[d, "H^0(\tilde{\phi})"] \\ G \circ \alpha \arrow[r, "\epsilon_G"] & \alpha' \circ \tilde{G} \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Наличие оснащения на триангулированной категории имеет множество следствий. Например, такое.

**Лемма 5.1.** *Пусть $\mathcal{T}$ — оснащенная триангулированная категория. Тогда существует точный бифунктор $R\,\mathrm{Hom} : \mathcal{T}^\circ \times \mathcal{T} \to \mathcal{D}^b(\mathsf{k})$, такой что $H^i(R\,\mathrm{Hom}(X, Y)) = \mathrm{Hom}(X, Y[i])$.*

*Доказательство.* Пусть $(\mathcal{A}, \alpha)$ — оснащение для $\mathcal{T}$. По определению $DG$-категории имеем бифунктор $\mathrm{Hom}^\bullet : \mathcal{A}^\circ \times \mathcal{A} \to \mathcal{C}_{\mathsf{dg}}(\mathsf{k})$. Переходя к $H^0$ получаем точный бифунктор $H^0(\mathcal{A}^\circ) \times H^0(\mathcal{A}) \to H^0(\mathcal{C}_{\mathsf{dg}}(\mathsf{k}))$. Но $H^0(\mathcal{C}_{\mathsf{dg}}(\mathsf{k})) = \mathrm{Hot}(\mathsf{k}) = \mathcal{D}(\mathsf{k})$, поэтому пользуясь оснащением, получаем искомый бифунктор. $\square$

Аналогично, наличие оснащения на морфизме функторов очень полезно.

**Лемма 5.2.** *Пусть $\phi : F \to G$ — морфимзм оснащенных функторов $\mathcal{T} \to \mathcal{T}'$, допускающий оснащение. Тогда существует точный функтор $H : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ и морфизмы функторов $\psi : G \to H$, $\chi : H \to F[1]$, такие что для всех $X$ в $\mathcal{T}$ треугольник $F(X) \to G(X) \to H(X) \to F(X)[1]$ точен.*

*Доказательство.* Пусть $\tilde{F}, \tilde{G}$ — оснащения функторов $F, G$, а $\tilde{\phi} : \tilde{F} \to \tilde{G}$ — оснащение морфизма $\phi$. Положим $\tilde{H}(X) = C(\tilde{\phi}_X : \tilde{F}(X) \to \tilde{G}(X))$ и обозначим через $\tilde{\psi}_X$, $\tilde{\chi_X}$ морфизмы в каноническом треугольнике

$$\tilde{F}(X) \xrightarrow{\tilde{\phi}_X} \tilde{G}(X) \xrightarrow{\tilde{\psi}_X} \tilde{H}(X) \xrightarrow{\tilde{\chi}_X} \tilde{F}(X)[1]$$

Ввиду функториальности конуса, $\tilde{H}$ — $DG$-функтор из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}'$, а $\tilde{\psi}$ и $\tilde{\chi}$ — морфизмы $DG$-функторов. Переходя к $H^0$ получаем искомый треугольник на уровне триангулированных категорий. □