Абелевы категории

Часть 1. Аддитивные категории

Категория $\mathcal{C}$ называется $\mathbb{Z}$-категорией, если

AB1: на множествах $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ заданы структуры абелевых групп, так что отображение композиции $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)$ билинейно.

Аддитивная категория — это $\mathbb{Z}$-категория $\mathcal{A}$, в которой

AB2: начальный $0_{\mathcal{A}}$ и конечный $1_{\mathcal{A}}$ объект существуют и равны, т.е. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(0_{\mathcal{A}}, X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, 0_{\mathcal{A}}) = 0$;
AB3: сущестуют попарные (а значит и конечные) произведения.

Упражнение 1.1. Категории абелевых групп Ab, левых и правых модулей над кольцом R–mod и mod–R, векторных расслоений на топологическом пространстве $\mathsf{VB}(X)$, пучков абелевых групп $\mathsf{Sh}(X)$ и квазикогерентных пучков на алгебраическом многообразии $\mathsf{Qcoh}(X)$ аддитивны. Категория $*_M$ является $\mathbb{Z}$-категорией $\iff M$ — кольцо с единицей, но не является аддитивной.

Упражнение 1.2. Если $\mathcal{A}$ — аддитивная категория, то категория $\mathsf{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{A})$ аддитивна для любой малой категории $\mathcal{C}$.

Лемма 1.3. *В аддитивной категории произведение является также и копроизведением:* $X \sqcup Y \cong X \times Y$.

Доказательство. Напомним, что $\mathrm{Hom}(Z, X\times Y) = \mathrm{Hom}(Z,X) \times \mathrm{Hom}(Z,Y)$. Морфизм $\mathrm{id}_{X\times Y}$ дает пару морфизмов $p_X : X\times Y \to X$ и $p_Y : X\times Y \to Y$, причем вышеуказанный изоморфизм переводит $\phi \in \mathrm{Hom}(Z, X\times Y)$ в $(p_X\circ\phi, p_Y\circ\phi)$ (это следует из доказательства леммы Ионеды — изоморфизм $\mathrm{Hom}(Z,U) = h_U(Z) \cong F(Z)$ задается применением морфизма $F(\phi) : F(U) \to F(Z)$ к образу $\mathrm{id}_U \in h_U(U)$ в $F(U)$). Обозначим через $i_X : X \to X\times Y$ морфизм, соответствующий паре $(\mathrm{id}_X, 0) \in \mathrm{Hom}(X,X)\times\mathrm{Hom}(X,Y)$, а через $i_Y : Y \to X\times Y$ морфизм, соответствующий паре $(0,\mathrm{id}_Y) \in \mathrm{Hom}(Y,X)\times\mathrm{Hom}(Y,Y)$. Тогда в силу вышеприведенного замечания имеем

$$p_X\circ i_X = \mathrm{id}_X,\quad p_Y\circ i_X = 0,\qquad p_X\circ i_Y = 0,\quad p_Y\circ i_Y = \mathrm{id}_Y\,. \tag{1}$$

Заметим также, что выполняется равенство

$$i_X\circ p_X + i_Y\circ p_Y = \mathrm{id}_{X\times Y}\,. \tag{2}$$

В самом деле, $p_X\circ(i_X\circ p_X + i_Y\circ p_Y) = (p_X\circ i_X)\circ p_X + (p_X\circ i_Y)\circ p_Y = \mathrm{id}_X\circ p_X + 0\circ p_Y = p_X$ и аналогично $p_Y\circ(i_X\circ p_X + i_Y\circ p_Y) = p_Y$. Теперь построим морфизмы между $\mathrm{Hom}(X,Z)\times\mathrm{Hom}(Y,Z)$ и $\mathrm{Hom}(X\times Y, Z)$ формулами

$$(\phi,\psi)\mapsto \phi\circ p_X + \psi\circ p_Y,\qquad \chi\mapsto(\chi\circ i_X, \chi\circ i_Y).$$

Легко видеть, что $\chi\circ i_X\circ p_X + \chi\circ i_Y\circ p_Y = \chi\circ(i_X\circ p_X + i_Y\circ p_Y) = \chi$, $(\phi\circ p_X+\psi\circ p_Y)\circ i_X = \phi\circ p_X\circ i_X + \psi\circ p_Y\circ i_X = \phi$ и аналогично $(\phi\circ p_X + \psi\circ p_Y)\circ i_Y = \psi$. Таким образом $h^{X\times Y} \cong h^X \times h^Y$, что и требовалось. □

Упражнение 1.4. Покажите, что в аддитивной категории любые конечные произведения существуют и совпадают с копроизведениями. Проверьте, что при этом бесконечные копроизведения вообще говоря отличаются от произведений.

В дальнейшем, для обозначении конечных (ко)произведений в аддитивной категории будем пользоваться знаком $\oplus$.

Упражнение 1.5. Пусть Z — объект в аддитивной категории $\mathcal{A}$ и даны морфизмы $i'_X : X\to Z$, $i'_Y : Y \to Z$, $p'_X : Z\to X$, $p'_Y : Z \to Y$, удовлетворяющие условиям (1) и (2). Покажите, что существует единственный изоморфизм $\phi : Z \to X\times Y$, для которого $p_X\circ\phi = p'_X$, $p_Y\circ\phi = p'_Y$, $\phi\circ i'_X = i_X$, $\phi\circ i'_Y = i_Y$.

Для любых объектов X, Y в произвольной категории $\mathcal{C}$ определены морфизмы $\Delta_X = \mathrm{id}_X \times \mathrm{id}_X : X \to X \times X$ и $\nabla_Y = \mathrm{id}_Y \sqcup \mathrm{id}_Y : Y \sqcup Y \to Y$. Кроме того, для любых $f \in \mathrm{Hom}(X_1, Y_1)$, $g \in \mathrm{Hom}(X_1, Y_2)$ определен морфизм $f \times g : \mathrm{Hom}(X_1 \times X_2, Y_1 \times Y_2)$ (он соответствует морфизмам $f \circ p_{X_1} : X_1 \times X_2 \to X_1 \to Y_1$ и $g \circ p_{X_2} : X_1 \times X_2 \to X_2 \to Y_2$).

Упражнение 1.6. Пусть $\mathcal{A}$ — аддитивна, $f, g \in \mathrm{Hom}(X, Y)$. Покажите, что $f + g = \nabla_Y \circ (f \times g) \circ \Delta_X$.

Замечание 1.7. Отсюда видно, что аддитивность — это не дополнительная структура на категории, а ее свойство. Категрия $\mathcal{C}$ аддитивна $\iff$ в $\mathcal{C}$ существуют начальный объект, совпадающий с конечным, произведения, совпадающие с копроизведениями, и операция, определяемая формулой из упражнения задает структуру абелевой группы на морфизмах, относительно которой композиция билинейна.

Упражнение 1.8. Покажите, что (a) если $\mathcal{A}$ аддитивна, то $\mathcal{A}^\circ$ тоже аддитивна; (b) если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ аддитивны, то $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ тоже аддитивна.

Часть 2. Аддитивные функторы

Функтор $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ между аддитивными категориями **аддитивен**, если $F : \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(F(X), F(Y))$ — гомоморфизм абелевых групп для всех $X, Y \in \mathcal{A}$.

Примеры 2.1. Следующие функторы аддитивны:

(1) функтор забвения $\mathsf{fg} : R\!-\!\mathsf{mod} \to \mathsf{Ab}$;
(2) функтор сечений $\Gamma : \mathsf{VB}(X) \to \mathsf{Sh}(X)$;
(3) функтор прямой суммы $\oplus : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$;
(4) тензорное умножение на R-модуль $R\!-\!\mathsf{mod} \to \mathsf{Ab}$ (если R коммутативно, то $R\!-\!\mathsf{mod} \to R\!-\!\mathsf{mod}$);
(5) ограничения скаляров $B\!-\!\mathsf{mod} \to A\!-\!\mathsf{mod}$, если B — A-алгебра;
(6) расширения скаляров $A\!-\!\mathsf{mod} \to B\!-\!\mathsf{mod}$, если B — A-алгебра;
(7) функторы прямого и обратного образа $f_* : \mathsf{Sh}(X) \to \mathsf{Sh}(Y)$, $f^* : \mathsf{VB}(Y) \to \mathsf{VB}(X)$, если $f : X \to Y$ морфизм многообразий.

Пример важного неаддитивного функтора — функтор тензорного квадрата $M \mapsto M \otimes M$, R–$\mathsf{mod} \to R$–mod, где R — коммутативное кольцо.

Лемма 2.2. *Если $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — аддитивный функтор между аддитивными категориями, то существует канонический изоморфизм $F(X \oplus Y) \cong F(X) \oplus F(Y)$.*

Доказательство. Применим к (1) и (2) функтор F и воспользуемся упражнением 1.5. $\square$

Упражнение 2.3. Покажите, что категория $\mathsf{Fun}_{\mathsf{add}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ аддитивных функторов аддитивна и является строго полной подкатегорией в $\mathsf{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Упражнение 2.4. Покажите, что эквивалентность $\mathsf{Fun}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mathcal{C}) \cong \mathsf{Fun}(\mathcal{A}, \mathsf{Fun}(\mathcal{B}, \mathcal{C}))$ отождествляет подкатегории $\mathsf{Fun}_{\mathsf{add}}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mathcal{C})$ и $\mathsf{Fun}_{\mathsf{add}}(\mathcal{A}, \mathsf{Fun}_{\mathsf{add}}(\mathcal{B}, \mathcal{C}))$.

Если категория $\mathcal{A}$ аддитивна, то $h_X(Y) = \mathrm{Hom}(Y, X)$ — абелева группа. Значит представимый функтор h_X мы можем (и будем!) рассматривать как функтор $\mathcal{A}^\circ \to \mathsf{Ab}$ (а функтор h_X в старом смысле получается его композицией с $\mathsf{fg} : \mathsf{Ab} \to \mathsf{Sets}$). То же относится и к копредставимым функторам.

Упражнение 2.5. Покажите, что (ко)представимые функторы аддитивны. Проверьте, что функторы $h_* : \mathcal{A} \to \mathsf{Fun}_{\mathsf{add}}(\mathcal{A}^\circ, \mathsf{Ab})$ и $h^* : \mathcal{A}^\circ \to \mathsf{Fun}_{\mathsf{add}}(\mathcal{A}, \mathsf{Ab})$ аддитивны.

Лемма 2.6. *Пусть $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — аддитивный функтор между аддитивными категориями. Если F обладает сопряженным функтором G, то G также аддитивен, а изоморфизм сопряжения согласован со структурами абелевых групп.*

Доказательство. Разберем случай, когда G — правый сопряженный к F. Тогда изоморфизм сопряжения $\mathrm{Hom}(X, G(Y)) \to \mathrm{Hom}(F(X), Y)$ задается формулой $\psi \mapsto \eta_Y \circ F(\psi)$, где $\eta : F \circ G \to \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ — коединица сопряжения. Отображение $\psi \mapsto F(\psi)$ аддитивно, так как функтор F аддитивен, а отображение $\phi \mapsto \eta_Y \circ \phi$ аддитивно, так как категория $\mathcal{B}$ аддитивна. Наконец аддитивность функтора G следует из упр. 2.4 — функтор $\mathrm{Hom}(-, G(-)) \cong \mathrm{Hom}(F(-), -) : \mathcal{A}^\circ \times \mathcal{B} \to \mathsf{Ab}$ аддитивен в силу аддитивности F, значит G тоже аддитивен. $\square$

Часть 3. Абелевы категории

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — аддитивные категории, а $\alpha : F \to G$ — морфизм аддитивных функторов из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$. Определим функтор $\mathrm{Ker}\,\alpha$ формулой

$$\mathrm{Ker}\,\alpha(X) := \mathrm{Ker}(\,F(X) \xrightarrow{\alpha_X} G(X)\,).$$

Легко видеть, что это аддитивный функтор. В самом деле, для всякого морфизма $\phi : X \to Y$ имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\,\alpha(X) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & F(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "F(\phi)"'] & G(X) \arrow[d, "G(\phi)"'] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\,\alpha(Y) \arrow[r] & F(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

Легко видеть, что пунктирная стрелка существует и единственна, откуда следует функториальность ядра, а также его аддитивность. Кроме того, ясно что из функтора $\mathrm{Ker}\,\alpha$ есть естественный морфизм в функтор F, являющийся вложением.

Пусть теперь $f : X \to Y$ — морфизм в аддитивной категории $\mathcal{A}$. **Ядром** f называется объект $\mathrm{Ker}\, f$, представляющий функтор $\mathrm{Ker}\, h_f : h_X \to h_Y$ (если он существует), а **коядром** f называется объект $\mathrm{Coker}\, f$, копредставляющий функтор $\mathrm{Ker}\, h^f : h^Y \to h^X$ (если он существует). Заметим, что морфизмы функторов $\mathrm{Ker}\, h_f \to h_X$ и $\mathrm{Ker}\, h^f \to h^Y$ по лемме Ионеды дают морфизмы $\kappa : \mathrm{Ker}\, f \to X$ и $\gamma : Y \to \mathrm{Coker}\, f$.

Упражнение 3.1. Покажите, что в категориях Ab, $R\text{−}\mathsf{mod}$, $\mathsf{mod}\text{−}R$ категорные ядра и коядра совпадают с обычными ядрами и коядрами.

С коядрами в категории пучков ситуация сложнее. Дело в том, что наивное коядро морфизма пучков не является пучком (оно только предпучок). Однако, функтор вложения $\mathsf{Sh}(X) \to \mathsf{PreSh}(X)$ категории пучков в категорию предпучков обладает левым сопряженным функтором $a : \mathsf{PreSh}(X) \to \mathsf{Sh}(X)$ (функтором пучковизации) и можно показать, что пучковизация наивного коядра является коядром в категорном смысле.

Упражнение 3.2. Пусть $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ — строго полная аддитивная подкатегория в аддитивной категории, и пусть функтор вложения $i : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ (он автоматически аддитивен) обладает левым сопряженным функтором $a : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Покажите, что если морфизм $i(f) : i(X) \to i(Y)$ имеет коядро в $\mathcal{B}$, то $a(\mathrm{Ker}\, i(f))$ — коядро морфизма f в $\mathcal{A}$.

Лемма 3.3. *Пусть $f : X \to Y$ — произвольный морфизм.*
(a) Если $\exists\, \mathrm{Ker}\, f$ и $g : X' \to X$, то $f \circ g = 0 \iff g = \kappa \circ g'$ для некоторого единственного $g' : X' \to \mathrm{Ker}\, f$.
(b) Если $\exists\, \mathrm{Coker}\, f$ и $h : Y \to Y'$, то $h \circ f = 0 \iff h = h' \circ \gamma$ для некоторого единственного $h' : \mathrm{Coker}\, f \to Y'$.

Доказательство. Докажем (a). Ясно, что $f \circ g = 0 \iff g \in h_X(X')$ лежит в ядре $h_f : h_X(X') \to h_Y(X')$, то есть в $(\mathrm{Ker}\, h_f)(X')$, что равносильно тому, что $g = \kappa \circ g'$ для некоторого $g' : X' \to \mathrm{Ker}\, f$. Такой морфизм g' единственнен, так как $(\mathrm{Ker}\, h_f)(X') \subset h_X(X')$. $\square$

Упражнение 3.4. Предположим, что в аддитивной категории $\mathcal{A}$ существуют ядра у всех морфизмов. Покажите, что $(f : X \to Y) \mapsto (\kappa : \mathrm{Ker}\, f \to X)$ является аддитивным функтором из категории представлений колчана $\bullet \to \bullet$ в $\mathcal{A}$ (**категории стрелок в** $\mathcal{A}$) в себя. Аналогично для коядер.

Кообразом морфизма $f : X \to Y$ называется коядро ядра f (то есть естественного морфизма $\mathrm{Ker}\, f \to X$), а **образом морфизма** f — ядро коядра f (то есть естественного морфизма $Y \to \mathrm{Coker}\, f$):

$$\mathrm{Coim}\, f = \mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}\, f \to X), \qquad \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}(Y \to \mathrm{Coker}\, f).$$

Лемма 3.5. *Если у морфизма $f : X \to Y$ существуют образ и кообраз, то существует единственный морфизм $\bar{f} : \operatorname{Coim} f \to \operatorname{Im} f$, такой что диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} f \arrow[r, "\kappa"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\gamma'"'] & Y \arrow[r, "\gamma"] & \operatorname{Coker} f \\
& \operatorname{Coim} f \arrow[r, "\bar{f}"] & \operatorname{Im} f \arrow[u, "\kappa'"'] &
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Доказательство. По лемме 3.3(a) имеем $f \circ \kappa = 0$. Значит по лемме 3.3(b) существует единственный морфизм $f' : \operatorname{Coim} f \to Y$, такой что $f = f' \circ \gamma'$. Покажем, что $\gamma \circ f' = 0$. В самом деле, $\gamma \circ f' \circ \gamma' = \gamma \circ f = 0$ по лемме 3.3(b), но в то же время $\gamma \circ 0 = 0$. Значит в силу единственности в лемме 3.3(b) имеем $\gamma \circ f' = 0$. Применяя теперь лемму 3.3(a), находим $\bar{f}$. □

Аддитивная категория $\mathcal{A}$ называется абелевой, если

AB4: у всех морфизмов в $\mathcal{A}$ существуют ядра и коядра, а естественный морфизм кообраза в образ морфизма — изоморфизм.

Упражнение 3.6. Покажите, что категории Ab, $R-\mathsf{mod}$, $R\mathsf{mod}-$, $\mathsf{Sh}(X)$, $\mathsf{Qcoh}(X)$ абелевы, а $\mathsf{VB}(X)$ — не абелева.

Упражнение 3.7. Покажите, что в категории фильтрованных абалевых групп всякий морфизм имеет ядро и коядро, но кообраз не всегда равен образу.

Упражнение 3.8. Покажите, что если категории $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ абелевы, то (a) $\mathcal{A}^\circ$ абелева; (b) $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ абелева; (c) $\mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ абелева для любой малой категории $\mathcal{C}$.

Морфизм с нулевым ядром называется мономорфизмом (или вложением, инъекцией), а морфизм с нулевым коядром — эпиморфизмом (или сюръекцией). Объект X, для которого задан мономорфизм $X \to Y$, называется подобъектом в Y (обозначается $X \subset Y$), а объект X, для которого задан эпиморфизм $Y \to X$, называется факторобъектом объекта Y (обозначается $Y \twoheadrightarrow X$). Легко видеть, что категории подобъектов и факторобъектов фиксированного объекта изоморфны и эквивалентны некоторому частично упорядоченному множеству.

Упражнение 3.9. Пусть $f : X \to Y$ — морфизм. Покажите, что (a) естественный морфизм $\operatorname{Ker} f \to X$ инъективен, а $Y \to \operatorname{Coker} f$ — сюръективен; (b) f — изоморфизм $\iff$ f инъективен и сюръективен.

Упражнение 3.10. Пусть $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ — морфизмы в абелевой категории. Покажите, что
(a) $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$, а если $\operatorname{Ker} g = 0$, то $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker}(g \circ f)$;
(b) $\operatorname{Coker}(g \circ f) \twoheadrightarrow \operatorname{Coker} g$, а если $\operatorname{Coker} f = 0$, то $\operatorname{Coker}(g \circ f) = \operatorname{Coker} g$;
(c) если f сюръективен, то $g = 0 \iff g \circ f = 0$; (d) если g инъективен, то $f = 0 \iff g \circ f = 0$.

Лемма 3.11. *Всякий морфизм $f : X \to Y$ в абелевой категории может быть единственным образом представлен в виде композиции сюръекции $f' : X \to I$ и инъекции $f'' : I \to Y$. При этом $I \cong \operatorname{Coim} f \cong \operatorname{Im} f$, а морфизмы f' и f'' при этом отождествлении совпадают с γ' и κ'.*

Доказательство. Заметим, что γ' сюръективен, а κ' инъективен в силу упражнения. Поэтому достаточно проверить единственность. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} f \arrow[r, "\kappa"] & X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f'"'] \arrow[dd, "\gamma'"'] & & Y \arrow[r, "\gamma"] & \operatorname{Coker} f \\
& & I \arrow[ur, "f''"'] \arrow[dr, dotted, "i''"] & & \\
& \operatorname{Coim} f \arrow[ur, dotted, "i'"] \arrow[rr, "\bar{f}", "\cong"'] & & \operatorname{Im} f \arrow[uu, "\kappa'"'] &
\end{tikzcd}$$

Покажем, что $\gamma \circ f'' = 0$. В самом деле, $\gamma \circ f'' \circ f' = \gamma \circ f = 0$, но f' сюръективен, поэтому $\gamma \circ f'' = 0$. Значит существует единственный морфизм $i'' : I \to \operatorname{Im} f$, такой что $f'' = \kappa' \circ i''$, причем из инъективности f'' следует инъективность i''. Аналогично строится сюръективный морфизм $i' : \operatorname{Coim} f \to I$. Заметим, что по построению $\kappa' \circ i'' \circ i' \circ \gamma' = f'' \circ f' = f$, поэтому в силу единственности $\bar{f}$ получаем $i'' \circ i' = \bar{f}$. Так как $\bar{f}$ изоморфизм, отсюда следует инъективность i' и сюръективность i''. Значит оба они — изоморфизмы. Итак, $f' = i' \circ \gamma'$, $f'' = \kappa' \circ i'' = \kappa' \circ \bar{f} \circ (i')^{-1}$. □

Последовательность морфизмов $\ldots \longrightarrow X^{i-1} \xrightarrow{f^{i-1}} X^i \xrightarrow{f^i} X^{i+1} \longrightarrow \ldots$ называется комплексом, если для всех i выполняется условие $f^i \circ f^{i-1} = 0$.

Упражнение 3.12. Покажите, что последовательность морфизмов — комплекс $\iff \operatorname{Im} f^{i-1} \subset \operatorname{Ker} f^i$.

Комплекс называется точным в члене X^i, если $\operatorname{Im} f^{i-1} = \operatorname{Ker} f^i$. Комплекс вида $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ называется

- точным слева, если он точен в X и Y;
- точным справа, если он точен в Y и Z;
- точным в середине, если он точен в Y;
- точным, если он точен в X, Y и Z.

Ясно, что точные слева тройки имеют вид $0 \to \operatorname{Ker} f \to X \xrightarrow{f} Y$, а точные справа тройки имеют вид $X \xrightarrow{f} Y \to \operatorname{Coker} f \to 0$.

Лемма 3.13. *Тройка* $0 \to X \to Y \to Z$ *точна слева* $\iff 0 \to \operatorname{Hom}(A, X) \to \operatorname{Hom}(A, Y) \to \operatorname{Hom}(A, Z)$ *точна слева при всех* A. *Тройка* $X \to Y \to Z \to 0$ *точна справа* $\iff 0 \to \operatorname{Hom}(Z, A) \to \operatorname{Hom}(Y, A) \to \operatorname{Hom}(X, A)$ *точна слева при всех* A.

Доказательство. Точность слева последовательности $0 \to \operatorname{Hom}(Z, A) \to \operatorname{Hom}(Y, A) \to \operatorname{Hom}(X, A)$ при всех A равносильна тому, что $h^Z = \operatorname{Ker} h^f$, то есть тому, что $Z = \operatorname{Coker} f$, то есть точности справа тройки $0 \to X \to Y \to Z \to 0$. Первое утверждение доказывается аналогично. □

Часть 4. Точные функторы

Функтор $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ называется

- точным слева, если он всякую точную тройку переводит в последовательность точную слева;
- точным справа, если он всякую точную тройку переводит в последовательность точную справа;
- точным, если он всякую точную тройку переводит в точную тройку.

Примеры 4.1. (1) функторы fg, $\oplus$ и ограничение скаляров из примера 2.1 точны;
(2) функторы Γ и f_* из примера 2.1 точны слева;
(3) функторы $\otimes$, f^* и расширение скаляров из примера 2.1 точны справа.

Упражнение 4.2. Покажите, что ковариантный функтор точен слева (справа) $\iff$ он всякую точную слева (справа) тройку переводит в тройку точную слева (справа).

Лемма 4.3. *Функторы* $h_A = \operatorname{Hom}(-, A) : \mathcal{A}^\circ \to \mathsf{Ab}$ *и* $h^A = \operatorname{Hom}(A, -) : \mathcal{A} \to \mathsf{Ab}$ *точны слева.*

Доказательство. Это немедленно следует из леммы 3.13. □

Лемма 4.4. *Пусть* (F, G) *— пара сопряженных аддитивных функторов. Тогда* F *точен справа, а* G *слева.*

Доказательство. Пусть $X \to Y \to Z \to 0$ — точная справа тройка. Применяя функтор F получим тройку $F(X) \to F(Y) \to F(Z) \to 0$. В силу леммы 3.13 для этого достаточно проверить, что для всех A последовательность $0 \to \operatorname{Hom}(F(Z), A) \to \operatorname{Hom}(F(Y), A) \to \operatorname{Hom}(F(X), A)$ точна слева. Но пользуясь сопряженностью функторов, ее можно переписать в виде $0 \to \operatorname{Hom}(Z, G(A)) \to \operatorname{Hom}(Y, G(A)) \to \operatorname{Hom}(X, G(A))$, и ее точность следует из той же леммы. □