Классические производные функторы

Часть 1. Теорема вложения и диаграмный поиск

В привычных абелевых категориях, таких как Ab и $R-\mathsf{mod}$ стандартным способом проверять раличные соотношения между объектами и морфизмами является так называемый диаграмный поиск (рассматриваются “элементы” абелевой группы и для каждого элемента, проверяется необходимые включения или равенства). В произвольной абелевой категории, объекты уже не имеют “элементов” в наивном смысле, поэтому приходится либо боказывать все, пользуясь формальными свойствами категорий, либо использовать один из следующих двух (по существу равносильных) трюков.

Первый — для любого объекта $X \in \mathcal{A}$ можно определить множество его Y-элементов (где Y — любой другой объект) как $\mathrm{Hom}(Y, X)$ и проверять все необходимые включения и равенства для Y-элементов с произвольными Y. По существу это означает, что мы отождествляем категорию $\mathcal{A}$ с подкатегорией представимых функторов в категорию $\mathsf{Fun}(\mathcal{A}^\circ, \mathsf{Ab})$, а для функторов проверяем необходимые включения и равенства поточечно.

Другой подход состоит в использовании следующей теоремы Митчела.

Теорема 1.1. *Пусть $\mathcal{A}_0$ — малая абелева категория. Тогда существует кольцо R и строго полный точный функтор $F : \mathcal{A}_0 \to R-\mathsf{Mod}$.*

Из теоремы Митчела следует, что всякое утверждение, сформулированное в терминах точности последовательностей, существования и равенства морфизмов, и т.д., включающее в себя конечное число объектов и морфизмов и верное в категории модулей над кольцом, верно и в произвольной абелевой категории $\mathcal{A}$. В самом деле, можно рассмотреть полную абелеву подкатегорию $\mathcal{A}_0$ в $\mathcal{A}$, порожденную объектами, фигурирующими в утверждении, построить функтор $F : \mathcal{A}_0 \to R-\mathsf{Mod}$, и воспользоваться его строгой полнотой и точностью.

Упражнение 1.2. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"'] & Y_1 \arrow[r] \arrow[d, "g_1"'] & Z_1 \arrow[r] \arrow[d, "h_1"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_2 \arrow[r] & Y_2 \arrow[r] & Z_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

с точными строчками (то есть морфизм точных троек). Покажите, что из нее возникает точная последовательность $0 \to \mathrm{Ker}\, f_1 \to \mathrm{Ker}\, g_1 \to \mathrm{Ker}\, h_1 \to \mathrm{Coker}\, f_1 \to \mathrm{Coker}\, g_1 \to \mathrm{Coker}\, h_1 \to 0$.

Квадрат

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "p"] \\
Z \arrow[r, "q"] & W
\end{tikzcd}$$

называется **декартовым**, если $\mathrm{Hom}(-, X) = \{ (\phi, \psi) \in \mathrm{Hom}(-, Y) \times \mathrm{Hom}(-, Z) \mid p\phi = q\psi \}$ (X есть расслоенное произведение Y и Z над W); и **кодекартовым**, если $\mathrm{Hom}(W, -) = \{ (\phi, \psi) \in \mathrm{Hom}(Y, -) \times \mathrm{Hom}(Z, -) \mid \phi f = \psi g \}$ (W является корасслоенным копроизведением Y и Z под X).

Упражнение 1.3. Докажите, что последовательность

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow X \xrightarrow{\binom{f}{g}} Y \oplus Z \xrightarrow{(p,-q)} W \longrightarrow 0$$

(a) является комплексом $\iff$ соответствующий квадрат коммутативен; (b) точна слева $\iff$ квадрат декартов; (c) точна справа $\iff$ квадрат кодекартов.

Упражнение 1.4. Пусть H^0, H^1 и H^2 — когомологии последовательности $(*)$. Покажите, что
(a) $H^0 = \operatorname{Ker}(g : \operatorname{Ker} f \to \operatorname{Ker} q)$; (b) $H^2 = \operatorname{Coker}(p : \operatorname{Coker} f \to \operatorname{Coker} q)$;
(c) существует точная тройка $0 \to \operatorname{Coker}(g : \operatorname{Ker} f \to \operatorname{Ker} q) \to H^1 \to \operatorname{Ker}(p : \operatorname{Coker} f \to \operatorname{Coker} q) \to 0$.

Упражнение 1.5. Докажите, что (a) квадрат декартов $\iff$ g индуцирует изоморфизм $\operatorname{Ker} f \cong \operatorname{Ker} q$, а p индуцирует мономорфизм $\operatorname{Coker} f \hookrightarrow \operatorname{Coker} q$; (b) квадрат кодекартов $\iff$ p индуцирует изоморфизм $\operatorname{Coker} f \cong \operatorname{Coker} q$, а g индуцирует эпиморфизм $\operatorname{Ker} f \twoheadrightarrow \operatorname{Ker} q$.

Однако, при обращении с теоремой Митчела надо соблюдать некоторую осторожность.

Упражнение 1.6. Покажите, что в категории $R-\mathsf{Mod}$ бесконечное произведение точных троек точно, а в категории $\mathsf{Sh}(X)$ вообще говоря нет.

Часть 2. Инъективные и проективные объекты

Объект P в абелевой категории $\mathcal{A}$ называется **проективным**, если функтор $\operatorname{Hom}(P, -)$ точен. Объект I в абелевой категории $\mathcal{A}$ называется **инъективным**, если функтор $\operatorname{Hom}(-, I)$ точен. Так как функторы $\operatorname{Hom}(X, -)$ и $\operatorname{Hom}(-, X)$ всегда точны слева, проективность P равносильна тому, что для любой сюръекции $Y \twoheadrightarrow Z$ и любого морфизма $\phi : P \to Z$ найдется морфизм $\tilde{\phi} : P \to Y$, такой что диаграмма

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, dotted, "\tilde{\phi}"'] \arrow[dr, "\phi"] & & \\ Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

коммутативна. Аналогично, инъективность I равносильна тому, что для любой инъекции $X \hookrightarrow Y$ и любого морфизма $\phi : X \to I$ найдется морфизм $\tilde{\phi} : Y \to I$, такой что диаграмма

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[dr, "\phi"'] & Y \arrow[d, dotted, "\tilde{\phi}"] \\ & & I \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Упражнение 2.1. Покажите, что инъективные объекты в $\mathcal{A}$ совпадают с проективными объектами в $\mathcal{A}^\circ$.

Лемма 2.2. *(a) P проективен $\iff$ для любой сюрьекции $p : X \twoheadrightarrow P$ существует изоморфизм $X \cong X' \oplus P$, при котором $p = p_P$; (b) I инъективен $\iff$ для любой иньекции $i : I \hookrightarrow X$ существует изоморфизм $X \cong X' \oplus I$, при котором $i = i_P$.*

Доказательство. Докажем первое. Следствие $\Longrightarrow$ очевидно. Если $p : X \twoheadrightarrow P$ — сюръекция, то существует $i : P \to X$, так что $p \circ i = \mathrm{id}_P$. Положим $X' = \operatorname{Ker} p$ и пусть $i' : X' \to X$ — естественное вложение (тогда $p \circ i' = 0$). Заметим, что $p \circ (\mathrm{id}_X - i \circ p) = p - p \circ i \circ p = p - p = 0$, поэтому существует $p' : X \to X'$, такое что $\mathrm{id}_X - i \circ p = i' \circ p'$. Покажем, что $p' \circ i' = \mathrm{id}_{X'}$, $p' \circ i = 0$. Это следует из равенств $(\mathrm{id}_X - i \circ p) \circ i' = i' - i \circ p \circ i' = i'$ и $(\mathrm{id}_X - i \circ p) \circ i = i - i \circ p \circ i = i - i = 0$. Проверим теперь ($\Longleftarrow$). В самом деле, пусть $\pi : Y \twoheadrightarrow Z$ — сюръекция, а $\phi : P \to Z$ — произвольный морфизм. Положим $X = \operatorname{Ker}((-\pi, \phi) : Y \oplus P \to Z)$ и пусть $p : X \to P$ и $q : X \to Y$ — композиции $X \to Y \oplus P \to P$ и $X \to Y \oplus P \to Y$. Из сюръективности π следует сюръективность p (воспользуемся диаграмным поиском — пусть $x \in P$, найдем $y \in Y$, так что $\pi(y) = \phi(x)$; тогда $(y, x) \in X$ и $p(y, x) = x$). Следовательно, $X \cong X' \oplus P$. В частности, существует морфизм $s : P \to X$, такой что $p \circ s = \mathrm{id}_P$. Пусть $\tilde{\phi} = q \circ s$. Тогда $\pi \circ \tilde{\phi} = \pi \circ q \circ s = \phi \circ p \circ s = \phi$, что и требовалось. □

Объект Y называется **расширением** объекта Z с помощью X, если дана точная тройка $0 \to X \to Y \to Z \to 0$.

Упражнение 2.3. Покажите, что (a) классы проективных и инъективных объектов замкнуты относительно прямых сумм и расширений; (b) классы проективных и инъективных объектов замкнуты относительно взятия прямых слагаемых; (c) класс проективных объектов замкнут относительно ядер эпиморфизмов; (d) класс инъективных объектов замкнут относительно коядер мономорфизмов.

В категории $R-\mathsf{Mod}$ всегда много инъективных и проективных объектов.

Лемма 2.4. *Свободный модуль с любым множеством образующих проективен.*

Доказательство. Пусть $R\langle S\rangle$ — свободный R-модуль с множеством образующих S. Тогда $\mathrm{Hom}(R\langle S\rangle, M) = \mathrm{Hom}(S, \mathsf{fg}(M)) = \prod_{s\in S} M$ — точен. $\square$

Следствие 2.5. *Проективные R-модули — это прямые слагаемые в свободных R-модулях.*

Следствие 2.6. *Всякий R-модуль накрывается проективным R-модулем.*

Доказательство. Пусть M — R-модуль. Выберем произвольное множество S образующих для M (например, можно взять $S = M$) и рассмотреть морфизм $R\langle S\rangle \to M$, индуцированный вложением $S \to M$. Он очевидно сюръективен. $\square$

Описать инъективные модули сложнее. Но для проверки того, что их достаточно много, можно воспользоваться следующими простыми соображениями.

Лемма 2.7. *Левый R-модуль I инъективен $\Longleftrightarrow$ любой морфизм $\phi : \mathfrak{a} \to I$ из любого левого идеала $\mathfrak{a} \subset R$ можно продолжить до морфизма из $\tilde{\phi} : R \to I$.*

Доказательство. $\Longrightarrow$ очевидно. Докажем обратное. Пусть $X \subset Y$ и $\phi : X \to I$. Рассмотрим множество всех пар (X', ϕ'), где $X \subset X' \subset Y$ и $\phi' : X' \to I$, такой что $\phi = \phi'_{|X}$. По лемме Цорна в нем есть максимальный элемент (X_0, ϕ_0). Покажем, что $X_0 = Y$. В самом деле, иначе существует $y \in Y\backslash X_0$. Пусть $X_1 = X_0 + Ry \subset Y$. Получаем точную последовательность $0 \to \mathfrak{a} \to X_0 \oplus R \to X_1 \to 0$. Из инъективности морфизма $X_0 \to X_1$ следует инъективность морфизма $\mathfrak{a} \to R$, значит $\mathfrak{a}$ — идеал в R. Рассмотрим композицию $\psi : \mathfrak{a} \to X_0 \stackrel{\phi_0}{\to} I$ и Продолжим ее до морфизма $\tilde{\psi} : R \to I$. Так как X_1 — корасслоенное копроизведение X_0 и R под $\mathfrak{a}$, морфизмы ϕ_0 и $\tilde{\psi}$ дают морфизм $\phi_1 : X_1 \to I$, причем его ограничение на X_0 совпадает с ϕ_0. Получаем противоречие с максимальностью пары (X_0, ϕ_0). Значит $X_0 = Y$, в частности морфизм ϕ продолжился до морфизма $Y \to I$. $\square$

Следствие 2.8. *Абелева группа $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ инъективна.*

Доказательство. Абелевы группы — это $\mathbb{Z}$-модули, а все идеалы в $\mathbb{Z}$ имеют вид $n\mathbb{Z}$. Морфизм $n\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ задается элементом $t \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (образом n), а чтобы продолжить его до морфизма $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, надо найти $t' \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, такой что $nt' = t$, что в группе $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ заведомо возможно. $\square$

Лемма 2.9. *Пусть $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ и $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ — пара сопряженных функторов. Если F точен, то G сохраняет инъективность. Аналогично, если G точен, то F сохраняет проективность.*

Доказательство. Докажем первое. Пусть I инъективен в $\mathcal{B}$. Тогда $\mathrm{Hom}(-, G(I)) \cong \mathrm{Hom}(F(-), I)$ — точный функтор, значит $G(I)$ инъективен. $\square$

Построим теперь взаимно сопряженные точные функторы между категориями $R{-}\mathsf{Mod}$ и $(\mathsf{Mod}{-}R)^\circ$. Тогда инъективные объекты в $(\mathsf{Mod}{-}R)^\circ$ (то есть проективные правые R-модули) перейдут в инъективные объекты в $R{-}\mathsf{Mod}$. А именно, рассмотрим функторы

$$D : R{-}\mathsf{Mod} \to (\mathsf{Mod}{-}R)^\circ \quad \text{и} \quad D' : (\mathsf{Mod}{-}R)^\circ \to R{-}\mathsf{Mod}, \qquad M \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Лемма 2.10. *Функторы D и D' точны и сопряжены друг другу.*

Доказательство. Точность сразу следует из инъективности $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Для проверки сопряженности заметим, что для всякого левого M существует морфизм $c_M : M \to D'(D(M))$ (переводящий $m \in M$ в морфизм $DM \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \mapsto f(m)$), а для всякого правого R-модуля морфизм $c'_M : M \to D(D'(M))$, которые как не сложно проверить задают морфизмы функторов. Заметим, что $c'_M \in \mathrm{Hom}_{(\mathsf{Mod}-R)^\circ}(D(D'(M)), M)$. Покажем, что c и c' устанавливают сопряжение функторов D и D'. Для этого надо проверить, что композиции $DM \stackrel{c'_{DM}}{\to} DD'DM \stackrel{Dc_M}{\to} DM$ и $D'M \stackrel{c_{D'M}}{\to} D'DD'M \stackrel{D'c'_M}{\to} D'M$ тождественны. Поскольку D и D' задаются одной и той же формулой, достаточно проверить первое. Заметим, что c'_{DM} переводит $f \in DM$ в морфизм $D'DM \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $x \in \mathrm{Hom}(D'M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \mapsto x(f)$. С другой стороны, Dc_M переводит элемент $\xi \in DD'DM$ в морфизм $m \mapsto \xi(c_M(m))$. Значит $Dc_M \circ c'_{DM}$ переводит f в $m \mapsto f(c_M(m)) = f(m)$, то есть в f. $\square$

Следствие 2.11. *Всякий R-модуль вкладывается в инъективный R-модуль.*

Доказательство. Пусть M — левый R-модуль. Тогда DM — правый R-модуль. Выберем сюръекцию $P \to DM$ из проективного правого R-модуля P и рассмотрим композицию $M \to D'DM \to D'P$. Во-первых, как было отмечено выше, P — инъективный объект в $(\mathsf{Mod}-R)^\circ$, значит в силу лемм 2.9 и 2.10 объект $DD'P$ инъективен в $R-\mathsf{Mod}$. Остается проверить, что морфизм $M \to D'P$ инъективен. Для проверки инъективности морфизма $c_M : M \to D'DM$ надо проверить, что для любого $m \in M$ найдется $f : M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, так что $f(m) \neq 0$. Рассмотрим циклическую подгруппу $\langle m \rangle$ в M, порожденную m. Если $\langle m \rangle \cong \mathbb{Z}$, определим $f : \langle m \rangle \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, положив $f(m) = 1/2$, а если $\langle m \rangle \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ — положив $f(m) = 1/n$, а затем продолжим на все M, воспользовавшись инъективностью $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Таким образом c_M инъективно. Остается заметить, что D' точен, поэтому переводит сюръекцию $P \to DM$ в инъекцию $D'DM \to D'P$. □

Часть 3. Классические производные функторы

Основным вычислительным средством в абелевых категориях являются точные последовательности. С их помощью интересные объекты выражаются через более простые. Основную же сложность при вычислениях доставляет не точность функторов — если надо применить функтор F к объекту X, выраженному, скажем через точную последовательность $0 \to X \to X_1 \to X_2 \to 0$, то последовательность $0 \to F(X) \to F(X_1) \to F(X_2) \to 0$ уже не будет точна, то есть $F(X)$ не будет выражаться через $F(X_1)$ и $F(X_2)$. Чтобы контролировать ситуацию вводятся так называемые производные функторы. С одной стороны, они позволяют производить вычисления, а с другой, сами дают важные примеры функторов.

Идея состоит в следующем. Пусть, например, функтор $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ точен справа. Тогда левые классические производные функторы от F — это последовательность функторов $L_iF : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $L_0F \cong F$ и морфизмов функторов $\delta_i : L_{i+1}F(X'') \to L_iF(X')$ между функторами

$$(0 \to X' \to X \to X'' \to 0) \mapsto L_{i+1}F(X'') \quad \text{и} \quad (0 \to X' \to X \to X'' \to 0) \mapsto L_iF(X'),$$

из категории точных троек в $\mathcal{A}$ в категорию $\mathcal{B}$, такие что для всякой точной тройки $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ последовательность

$$\cdots \to L_2F(X'') \xrightarrow{\delta_1} L_1F(X') \to L_1F(X) \to L_1F(X'') \xrightarrow{\delta_0} L_0F(X') \to L_0F(X) \to L_0F(X'') \to 0$$

точна, удовлетворяющая свойству универсальности.

Замечание 3.1. Такая последовательность функторов T_i (без изоморфизма $T_0 \cong F$) и морфизмов функторов $\delta_i : T_{i+1}(X'') \to T_i(X')$ называется левым δ-функтором.

Свойство универсальности формулируется так: для любого левого δ-функтора $(T_\bullet, \delta_\bullet)$ и любого морфизма функторов $f_0 : L_0F \to T_0$ существует единственная последовательность морфизмов функторов $f_i : L_iF \to T_i$, коммутирующая с δ.

Аналогично определяются правые производные функторы от точного слева функтора. Правый δ-функтор — это последовательность функторов $T^i : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ и морфизмов функторов $\delta^i : T^i(X'') \to T^{i+1}(X')$ между функторами

$$(0 \to X' \to X \to X'' \to 0) \mapsto T^i(X'') \quad \text{и} \quad (0 \to X' \to X \to X'' \to 0) \mapsto T^{i+1}(X'),$$

из категории точных троек в $\mathcal{A}$ в категорию $\mathcal{B}$, такие что для всякой точной тройки $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ последовательность

$$0 \to T^0(X') \to T^0(X) \to T^0(X'') \xrightarrow{\delta^0} T^1(X') \to T^1(X) \to T^1(X'') \xrightarrow{\delta^1} T^2(X') \to \dots$$

точна.

Правый классические производный функтор от F — это правый δ-функтор (R^iF, δ^i) с $R^0F \cong F$, удовлетворяющий следующему свойству универсальности: для любого правого δ-функтора $(T^\bullet, \delta^\bullet)$ и любого морфизма функторов $f^0 : T^0 \to R^0F$ существует единственная последовательность морфизмов функторов $f^i : T^i \to R^iF$, продолжающая f^0 и коммутирующая с δ.

Возникает естественный вопрос о существовании производных функторов. Есть разные условия, при которых существование можно доказать. Самая простая и наиболее универсальная конструкция такова. Пусть, например, функтор F точен справа и допустим, что в категории $\mathcal{A}$ достаточно много проективных объектов (то есть всякий объект накрывается проективным). Возьмем произвольный объект $X \in \mathcal{A}$ и построим точную последовательность $\cdots \to P^{-3} \xrightarrow{d^{-3}} P^{-2} \xrightarrow{d^{-2}} P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P^0 \to X \to 0$, в которой все объекты P^i проективны. Применяя функтор F получим комплекс $\cdots \to F(P^{-3}) \xrightarrow{F(d^{-3})} F(P^{-2}) \xrightarrow{F(d^{-2})} F(P^{-1}) \xrightarrow{F(d^{-1})} F(P^0) \to 0$. Оказывается, формула $L_iF = \operatorname{Ker} F(d^{-i}) / \operatorname{Im} F(d^{-i-1})$ определяет производные функторы. Но чтобы это доказать, нам потребуются некоторые сведения про комплексы.

Аналогично, если функтор $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ точен слева, а в категории $\mathcal{A}$ достаточно много инъективных объектов, заменяя левую проективную резольвенту на правую инъективную, можно построить правый производный функтор от F.