Классические производные функторы — построение

Часть 1. Комплексы

Пусть $(X^\bullet, d^\bullet)$ — комплекс в абелевой категории $\mathcal{A}$. Обозначим через

$$H^i(X^\bullet) := \operatorname{Ker} d^i / \operatorname{Im} d^{i-1} = \operatorname{Coker}(\operatorname{Im} d^{i-1} \to \operatorname{Ker} d^i) \cong \operatorname{Ker}(\operatorname{Coker} d^{i-1} \to \operatorname{Coim} d^i)$$

когомологию комплекса в члене X^i. Точные последовательности — это комплексы, у которых все когомологии равны нулю. Такие комплексы также называются ацикличными.

Морфизм комплексов $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ — это набор отображений $f^i : X^i \to Y^i$, таких что

$$d_Y^i \circ f^i = f^{i+1} \circ d_X^i.$$

Ясно, что мофризм комплексов индуцирует морфизм когомологий $H^i(f^\bullet) : H^i(X^\bullet) \to H^i(Y^\bullet)$.

Упражнение 1.1. Покажите, что (a) если категория $\mathcal{A}$ абелева, то категория комплексов $\operatorname{Com}(\mathcal{A})$ тоже абелева; (b) $H^i : \operatorname{Com}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ — аддитивный функтор, точный посередине.

Упражнение 1.2 (Лемма о змее)**.** Пусть $0 \to X^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} Y^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} Z^\bullet \to 0$ — точная тройка комплексов (то есть для всякого i последовательность $0 \to X^i \to Y^i \to Z^i \to 0$ точна). (a) Покажите, что из нее возникает длинная точная последовательность когомологий

$$\dots \to H^{i-1}(Z^\bullet) \xrightarrow{\delta^{i-1}} H^i(X^\bullet) \to H^i(Y^\bullet) \to H^i(Z^\bullet) \xrightarrow{\delta^i} H^{i+1}(X^\bullet) \to \dots$$

(b) Проверьте, что если тройка почленно расщепима (то есть $Y^k \cong X^k \oplus Z^k$ для каждого k, так что f^k и g^k — стандартное вложение и проекция), то δ^k индуцирован морфизмом комплексов $p_{X^{k+1}} \circ d_Y^k \circ i_{Z^k}$.

На категории комплексов определен функтор сдвига на произвольное целое число t, который обозначается как $[t]$, $X^\bullet \mapsto X^\bullet[t]$. По определению

$$(X^\bullet[t])^k = X^{k+t}, \qquad d^k_{X^\bullet[t]} = (-1)^t d_X^{k+t}.$$

Упражнение 1.3. Покажите, что (a) $[t]$ — автоморфизм категории комплексов, причем $[t] \circ [s] = [t+s]$ для всех $t, s \in \mathbb{Z}$; (b) $H^i(X[t]) \cong H^{i+t}(X)$.

Морфизм комплексов $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ называется квазиизоморфизмом, если $H^i(f^\bullet) : H^i(X^\bullet) \to H^i(Y^\bullet)$ — изоморфизм при всех i.

Упражнение 1.4. Покажите, что $X^\bullet$ ацикличен $\iff$ нулевой морфизм $X^\bullet \to X^\bullet$ — квазиизоморфизм.

Морфизмы комплексов $f^\bullet, g^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ называются гомотопными (записывается $f \sim g$), если существует набор морфизмов $h^i : X^i \to Y^{i+1}$, такой что

$$f^i - g^i = d_Y^{i-1} \circ h^i + h^{i+1} \circ d_X^i.$$

Комплексы $X^\bullet$ и $Y^\bullet$ называются гомотопными, если существуют морфизмы комплексов $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ и $g^\bullet : Y^\bullet \to X^\bullet$, такие что $g^\bullet \circ f^\bullet \sim \mathrm{id}_X$, $f^\bullet \circ g^\bullet \sim \mathrm{id}_Y$.

Лемма 1.5. *Гомотопные морфизмы индуцируют одинаковые отображения на когомологиях. В частности, гомотопные комплексы квазиизоморфны.*

Доказательство. Достаточно проверить, что морфизм гомотопный нулю индуцирует нулевое отображение на когомологиях. Пусть $f^i = d_Y^{i-1} \circ h^i + h^{i+1} \circ d_X^i$. Тогда $f^i_{|\operatorname{Ker} d_X^i} = d_Y^{i-1} \circ h^i$ — пропускается через $\operatorname{Im} d_Y^{i-1}$, то есть $H^i(f^\bullet) = 0$. □

В отличие от квазиизоморфности, гомотопическая эквивалентность сохраняется при действии любых аддитивных функторов. Если два морфизма (комплекса) гомотопны, они остаются гомотопными после применения любого аддитивного функтора,

Часть 2. Конус морфизма

Очень полезное понятие — конус морфизма комплексов. Пусть $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ — морфизм комплексов. Положим

$$C(f)^k = Y^k \oplus X^{k+1}, \qquad d^k_{C(f)} = \begin{pmatrix} d^k_Y & f^{k+1} \\ 0 & -d^{k+1}_X \end{pmatrix}.$$

Определим также

$$i^k = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{Y^k} \\ 0 \end{pmatrix} : Y^k \to C(f)^k, \qquad p^k = (0, \mathrm{id}^{k+1}_X) : C(f)^k \to X^{k+1}.$$

Лемма 2.1. *$(C(f)^\bullet, d^\bullet_{C(f)})$ — комплекс, а $i^\bullet : Y^\bullet \to C(f)^\bullet$ и $p^\bullet : C(f)^\bullet \to X^\bullet[1]$ — морфизмы комплексов. Более того, последовательность*

$$(\dagger) \qquad \dots \longrightarrow H^{i-1}(C(f)^\bullet) \xrightarrow{H^{i-1}(p^\bullet)} H^i(X^\bullet) \xrightarrow{H^i(f^\bullet)} H^i(Y^\bullet) \xrightarrow{H^i(i^\bullet)} H^i(C(f)^\bullet) \xrightarrow{H^i(p^\bullet)} H^i(X^\bullet) \longrightarrow \dots$$

точна.

Доказательство. Равенства $d^{k+1}_{C(f)} \circ d^k_{C(f)} = 0$, $d^k_{C(f)} \circ i^k = i^{k+1} \circ d^k_Y$ и $p^{k+1} \circ d^k_{C(f)} = d^k_{X[1]} \circ p^k$ проверяются непосредственно. Кроме того, легко видеть, что $p^\bullet \circ i^\bullet = 0$, а морфизмы $i^\bullet \circ f^\bullet$ и $f^\bullet[1] \circ p^\bullet$ гомотопны нулю (гомотопии задаются отображениями $\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{id}_{X^k} \end{pmatrix} : X^k \to C(f)^{k-1}$ и $(\mathrm{id}_{Y^k}\ 0) : C(f)^k \to (Y^\bullet[1])^{k-1}$ соответственно), поэтому последовательность $(\dagger)$ является комплексом. Для доказательства точности заметим, что морфизмы $i^\bullet : Y^\bullet \to C(f)^\bullet$ и $p^\bullet : C(f)^\bullet \to X^\bullet[1]$ образуют точную тройку комплексов

$$0 \to Y^\bullet \to C(f)^\bullet \to X^\bullet[1] \to 0.$$

Пользуясь леммой о змее, получаем длинную точную последовательность когомологий, причем согласно второй части леммы о змее связывающий гомоморфизм в ней индуцирован морфизмом f. $\square$

Следствие 2.2. *Морфизм комплексов $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ — квазиизоморфизм $\Longleftrightarrow$ его конус $C(f)$ ацикличен.*

Всякий объект категории $\mathcal{A}$ можно рассматривать как комплекс сосредоточенный в градуировке нуль.

Упражнение 2.3. Покажите, что всякий ограниченный комплекс получается последовательными операциями взятиями конуса морфизма и сдвига из объектов категории $\mathcal{A}$.

Упражнение 2.4. Определим цилиндр морфизма f формулой $\mathrm{Cyl}(f) = C(i[-1] : C(f)[-1] \to X^\bullet)$, или явно

$$\mathrm{Cyl}(f)^k = Y^k \oplus X^k \oplus X^{k+1}, \qquad d^k_{\mathrm{Cyl}(f)} = \begin{pmatrix} d^k_Y & 0 & f^{k+1} \\ 0 & d^k_X & -\mathrm{id}_{X^{k+1}} \\ 0 & 0 & -d^{k+1}_X \end{pmatrix}.$$

Покажите, что существует точная последовательность $X^\bullet \xrightarrow{\bar f} \mathrm{Cyl}(f) \xrightarrow{\pi} C(f)$ и морфизмы $Y^\bullet \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Cyl}(f) \xrightarrow{\beta} Y^\bullet$, такие что $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_{Y^\bullet}$, $\alpha \circ \beta \sim \mathrm{id}_{\mathrm{Cyl}(f)}$, $\beta \circ \bar f = f$, $\pi \circ \alpha = i$.

Часть 3. Резольвенты

Резольвентой объекта $X \in \mathcal{A}$ называется любой комплекс квазиизоморфный X.

Если в категории $\mathcal{A}$ достаточно много проективных объектов, то всякий объект $X \in \mathcal{A}$ обладает проективной резольвентой, сосредоточенной в неположительных степенях:

$$\dots \to P^{-3} \to P^{-2} \to P^{-1} \to P^0 \to 0.$$

Мы докажем чуть более общее утверждение.

Лемма 3.1. *Пусть $X^\bullet$ — комплекс ограниченный сверху. Тогда существует комплекс $P^\bullet$, составленный из проективных объектов и квазиизоморфизм $f^\bullet : P^\bullet \to X^\bullet$.*

Доказательство. Будем строить P^i и f^i последовательно. Для таких k, что $X^i = 0$ при $i \geqslant k$, положим $P^k = 0$. Предположим, что P^i и морфизмы f^i с $i > k$ уже построены, причем так конус построенного морфизма ацикличен в степенях $\geqslant k+1$.

$$\begin{tikzcd}
& P^k \arrow[r, dotted, "d_P^k"] \arrow[d, dotted, "f^k"'] & P^{k+1} \arrow[r, "d_P^{k+1}"] \arrow[d, "f^{k+1}"] & P^{k+2} \arrow[r] \arrow[d, "f^{k+2}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & X^{k-1} \arrow[r, "d_X^{k-1}"] & X^k \arrow[r, "d_X^k"] & X^{k+1} \arrow[r, "d_X^{k+1}"] & X^{k+2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Пусть $Y = \operatorname{Ker}\left(\begin{pmatrix} d_X^k & f^{k+1} \\ 0 & -d_P^{k+1} \end{pmatrix} : X^k \oplus P^{k+1} \to X^{k+1} \oplus P^{k+2}\right)$. Выберем проективную накрывающую $P^k \to Y$ и пусть композиция $P^k \to Y \to X^k \oplus P^{k+1}$ задается морфизмами $f^k : P^k \to X^k$ и $-d_P^k : P^k \to P^{k+1}$. Тогда $\begin{pmatrix} d_X^k & f^{k+1} \\ 0 & -d_P^{k+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f^k \\ -d_P^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_X^k f^k - f^{k+1} d_P^k \\ d_P^{k+1} d_P^k \end{pmatrix}$, откуда следуют равенства $d_X^k f^k = f^{k+1} d_P^k$ и $d_P^{k+1} d_P^k = 0$. Значит морфизмы f^k и d_P^k определяют морфизм комплексов, причем такой, что его конус ацикличен также и в степени k. □

Упражнение 3.2. Покажите, что если $P^\bullet$ — проективная резольвента объекта X, то существует морфизм $\epsilon : P_0 \to X$, такой что комплекс $\cdots \to P^{-3} \to P^{-2} \to P^{-1} \to P^0 \xrightarrow{\epsilon} X \to 0$ ацикличен.

Лемма 3.3. *Пусть $P^\bullet$ — проективная резольвента для X, а $Q^\bullet$ — проективная резольвента для Y. Тогда для любого морфизма $f : X \to Y$ существует единственный с точностью до гомотопии морфизм комплексов $f^\bullet : P^\bullet \to Q^\bullet$, такой что $H^0(f^\bullet) = f$.*

Доказательство. Построим последовательно морфизмы $f^i : P^i \to Q^i$, начиная с f^0. Обозначим $P^1 = X$, $d_P^0 = \epsilon_X$, $Q^1 = Y$, $d_Q^0 = \epsilon_Y$, $f^1 = f$ и предположим, что морфизмы f^i с $i > k$ уже построены.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P^{k-1} \arrow[r, "d_P^{k-1}"] & P^k \arrow[r, "d_P^k"] \arrow[d, dotted, "f^k"'] \arrow[dr, "\phi^k"] & P^{k+1} \arrow[r, "d_P^{k+1}"] \arrow[d, "f^{k+1}"] & P^{k+2} \arrow[r] \arrow[d, "f^{k+2}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Q^{k-1} \arrow[r, "d_Q^{k-1}"] & Q^k \arrow[r, "d_Q^k"] & Q^{k+1} \arrow[r, "d_Q^{k+1}"] & Q^{k+2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Рассмотрим морфизм $\phi^k = f^{k+1} \circ d_P^k$. Заметим, что $d_Q^{k+1} \circ \phi^k = d_Q^{k+1} \circ f^{k+1} \circ d_P^k = f^{k+2} \circ d_P^{k+1} \circ d_P^k = 0$. Но так как комплекс $Q^\bullet$ точен, это значит что $\operatorname{Im}\phi^k \subset \operatorname{Ker} d_Q^{k+1} = \operatorname{Im} d_Q^k$. Так как морфизм $Q^k \to \operatorname{Im} d_Q^k$ сюръективен, а P^k проективен, найдется морфизм $f^k : P^k \to Q^k$, такой что $\phi^k = d_Q^k \circ f^k$. Повторяя эту процедуру строим $f^\bullet$.

Пусть теперь $f^\bullet$ и $g^\bullet$ — два морфизма, такие что $H^0(f^\bullet) = H^0(g^\bullet)$. Будем строить h^i последовательно, начиная с h^0. Обозначим $Q^1 = Y$, $d_Q^0 = \epsilon_Y$ и предположим, что морфизмы h^i с $i > k$ уже построены.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P^{k-1} \arrow[r, "d_P^{k-1}"] & P^k \arrow[r, "d_P^k"] \arrow[dl, dotted, "h^k"'] \arrow[d, shift right, "g^k"'] \arrow[d, shift left, "f^k"] & P^{k+1} \arrow[r, "d_P^{k+1}"] \arrow[dl, "h^{k+1}"'] \arrow[d, shift right, "g^{k+1}"'] \arrow[d, shift left, "f^{k+1}"] & P^{k+2} \arrow[r] \arrow[dl, "h^{k+2}"'] \arrow[d, shift right, "g^{k+2}"'] \arrow[d, shift left, "f^{k+2}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Q^{k-1} \arrow[r, "d_Q^{k-1}"'] & Q^k \arrow[r, "d_Q^k"'] & Q^{k+1} \arrow[r, "d_Q^{k+1}"'] & Q^{k+2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Заметим, что $d_Q^k \circ (f^k - g^k - h^{k+1} \circ d_P^k) = (f^{k+1} - g^{k+1} - d_Q^k \circ h^{k+1}) \circ d_P^k = h^{k+2} \circ d_P^{k+1} \circ d_P^k = 0$. Но так как комплекс $Q^\bullet$ точен, это значит что $\operatorname{Im}(f^k - g^k - h^{k+1} \circ d_P^k) \subset \operatorname{Ker} d_Q^k = \operatorname{Im} d_Q^{k-1}$. Так как морфизм $Q^k \to \operatorname{Im} d_Q^k$ сюръективен, а P^k проективен, найдется морфизм $h^k : P^k \to Q^k$, такой что $f^k - g^k - h^{k+1} \circ d_P^k = d_Q^{k-1} \circ h^k$. Повторяя эту процедуру строим $h^\bullet$. □

Заметим, что в доказательстве нигде не использовалась проективность Q^i и точность комплекса $P^\bullet$. Поэтому ровно то же рассуждение доказывает, следующую лемму.

Следствие 3.4. *Всякий морфизм из ограниченного сверху комплекса состоящего из проективных объектов в ацикличный комплекс гомотопен нулю.*

Аналогичные результаты верны для инъективных резольвент, если в категории достаточно много инъективных объектов.

Лемма 3.5. *Пусть $X^\bullet$ — комплекс ограниченный снизу. Тогда существует комплекс $I^\bullet$, составленный из инъективных объектов и квазиизоморфизм $f^\bullet : X^\bullet \to I^\bullet$. В частности, всякий объект $X \in \mathcal{A}$ обладает* инъективной резольвентой*, сосредоточенной в неотрицательных степенях:*

$$0 \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to I^3 \to \dots$$

Если $I^\bullet$ — инъективная резольвента для объекта X, а $J^\bullet$ — инъективная резольвента для Y, то для любого морфизма $f : X \to Y$ существует единственный с точностью до гомотопии морфизм комплексов $f^\bullet : I^\bullet \to J^\bullet$, такой что $H^0(f^\bullet) = f$. Всякий морфизм из ацикличного комплекса в ограниченный снизу комплекс состоящий из инъективных объектов гомотопен нулю.

Часть 4. Построение производных функторов

Теорема 4.1. *Пусть функтор $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ точен справа, а в категории $\mathcal{A}$ достаточно много проективных объектов. Для всякого объекта $X \in \mathcal{A}$ выберем произвольную проективную резольвенту $P^\bullet \cong X$ и положим $L_iF(X) = H^{-i}(F(P^\bullet))$. Тогда L_iF — производные функторы функтора F.*

Доказательство. Во-первых, докажем функториальность. Пусть $P^\bullet \cong X$ и $Q^\bullet \cong Y$ — проективные резольвенты, а $f : X \to Y$ — произвольный морфизм. Пусть $f^\bullet : P^\bullet \to Q^\bullet$ — произвольный морфизм резольвент, такой что $H^0(f^\bullet) = f$. Положим $L_iF(f) = H^{-i}(F(f^\bullet))$. Надо проверить, что данное определение не зависит от выбора $f^\bullet$. Но как мы знаем, разные $f^\bullet$ гомотопны, поэтому разные $F(f^\bullet)$ тоже гомотопны, а значит отображения на когомологиях одинаковы.

Кроме того, надо проверить, что определение $L_iF(X)$ не зависит от выбора резольвенты. В самом деле, если $Q^\bullet \to X$ — другая резольвента, то отображение $\mathrm{id}_X : X \to X$ дает морфизмы $f^\bullet : P^\bullet \to Q^\bullet$ и $g^\bullet : Q^\bullet \to P^\bullet$, причем композиции $g^\bullet \circ f^\bullet : P^\bullet \to P^\bullet$ и $f^\bullet \circ g^\bullet : Q^\bullet \to Q^\bullet$ гомотопны тождественным. Применяя функтор F заключаем, что комплексы $F(P^\bullet)$ и $F(Q^\bullet)$ гомотопны, а значит имеют одинаковые когомологии.

Теперь надо построить связывающие гомоморфизмы δ. Пусть $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ — точная тройка в $\mathcal{A}$. Выберем проективные резольвенты $P^\bullet \cong X$ и $Q^\bullet \cong Y$ и продолжим f до морфизма резольвент $f^\bullet : P^\bullet \to Q^\bullet$. Пусть $R^\bullet = C(f)$. Из леммы 2.1 получаем, что $P^\bullet \cong Z$. При этом все $R^k = Q^k \oplus P^{k+1}$ проективны, так что $R^\bullet$ — проективная резольвента для объекта Z. Применяя к тругольнику $P^\bullet \to Q^\bullet \to R^\bullet \to P^\bullet[1]$ функтор F получаем тройку комплексов $F(P^\bullet) \to F(Q^\bullet) \to F(R^\bullet) \to F(P^\bullet[1])$. Заметим, что в силу аддитивности F имеем

$$F(R^\bullet) = F(C(f)) \cong C(F(f)), \qquad F(P^\bullet[1]) = F(P^\bullet)[1].$$

Применяя к этому треугольнику лемму 2.1, получаем длинную точную последовательность

$$\dots \to L_2F(Z) \xrightarrow{\delta_1} L_1F(X) \to L_1F(Y) \to L_1F(Z) \xrightarrow{\delta_0} L_0F(X) \to L_0F(Y) \to L_0F(Z) \to 0$$

Теперь проверим функториальность связывающих гомоморфизмов. Рассмотрим морфизм

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\xi"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\eta"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\zeta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r, "f_1"] & Y_1 \arrow[r, "g_1"] & Z_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

точных троек. Пусть $P^\bullet \cong X$, $Q^\bullet \cong Y$, $P_1^\bullet \cong X_1$, $Q_1^\bullet \cong Y_1$ — проективные резольвенты, а $f^\bullet : P^\bullet \to Q^\bullet$ и $f_1^\bullet : P_1^\bullet \to Q_1^\bullet$ — продолжения f и f_1. Пусть также $\xi^\bullet : P^\bullet \to P_1^\bullet$ и $\eta^\bullet : Q^\bullet \to Q_1^\bullet$ — продолжения ξ и η. Тогда $f_1^\bullet \circ \xi^\bullet \sim \eta^\bullet \circ f^\bullet$. Пусть $h^k : P^k \to Q_1^{k-1}$ — гомотопия, такая что

$$\eta^k \circ f^k - f_1^k \circ \xi^k = d_{Q_1}^{k-1} \circ h^k + h^{k+1} \circ d_P^k.$$

Определим отображение $\gamma_k : R^k = Q^k \oplus P^{k+1} \to R_1^k = Q_1^k \oplus P_1^{k+1}$ формулой $\begin{pmatrix} \eta^k & h^{k+1} \\ 0 & \xi^k \end{pmatrix}$. Легко проверить, что γ^k — морфизм комплексов, такой что в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
P^\bullet \arrow[r, "f^\bullet"] \arrow[d, "\xi^\bullet"] & Q^\bullet \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\eta^\bullet"] & R^\bullet \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\gamma^\bullet"] & P^\bullet[1] \arrow[d, "\xi^\bullet[1]"] \\
P_1^\bullet \arrow[r, "f_1^\bullet"] & Q_1^\bullet \arrow[r, "i_1"] & R_1^\bullet \arrow[r, "p_1"] & P_1^\bullet
\end{tikzcd}$$

первый квадрат гомотопически коммутативен, а два другие квадрата коммутативны. Рассматривая индуцированный морфизм на когомологиях, и пользуясь тем, что $\xi^\bullet$ и $\eta^\bullet$ индуцируют морфизмы $\xi : X \to X_1$ и $\eta : Y \to Y_1$, легко видеть, что $\gamma^\bullet$ индуцирует морфизм $\zeta : Z \to Z_1$. Следовательно, $H^{-i}(F(\xi^\bullet)) = L_iF(\xi)$, $H^{-i}(F(\eta^\bullet)) = L_iF(\eta)$, и $H^{-i}(F(\gamma^\bullet)) = L_iF(\zeta)$. Остается заметить, что морфизмы δ_k индуцированы морфизмами p и p_1 соответственно, поэтому из коммутативности правого квадрата следует их функториальность.

Таким образом, мы показали, что L_iF определенные выше являются δ-функтором. Остается проверить его универсальность. Для этого нам понадобится следующие свойства.

Лемма 4.2. *Если объект P проективен, то $L_0F(P) \cong P$, $L_iF(P) = 0$ при $i > 0$.*

Доказательство. Если P проективен, то в качестве проективной резольвенты мы можем взять комплекс $P^\bullet$ с $P^0 = P$, $P^i = 0$ при $i \neq 0$. Применяя функтор F получим комплекс с единственным членом $F(P)$ в степени 0, а его когомологии, очевидно, имеют указанный вид. □

Лемма 4.3. *Для любого X имеем изоморфизм функторов $L_0F(X) \cong F(X)$.*

Доказательство. Выберем для X проективную резольвенту $P^\bullet \cong X$. Она дает точную справа тройку $P^{-1} \to P^0 \to X \to 0$. Применяя F получаем последовательность $F(P^{-1}) \to F(P^0) \to F(X) \to 0$, которая также точна справа (так как F точен справа). Отсюда $H^0(F(P^\bullet)) = \mathrm{Coker}(F(P^{-1}) \to F(P^0)) \cong F(X)$. Функториальность изоморфизма легко проверяется. □

Левый (правый) δ-функтор $(E_\bullet, \delta_\bullet)$ называется **стирающим**, если для всякого $i > 0$ и всякого X найдется сюръекция $Y \to X$ (инъекция $X \to Y$), такая что $E_i(Y) = 0$. Заметим, что $L_\bullet F$ является стирающим в силу предыдущей леммы (в качестве Y можно взять проективную накрывающую), причем $L_0F \cong F$. Поэтому остается воспользоваться следующим результатом. □

Теорема 4.4. *Пусть (E_i, δ_i) — стирающий δ-функтор с $E_0 \cong F$. Тогда он универсален.*

Доказательство. Пусть (T_i, δ_i) — произвольный δ-функтор, а $f_0 : T_0 \to E_0$ — морфизм функторов. Предположим, что $f_i : T_i \to E_i$ при $i < k$ уже построены. Построим $f_k : T_k \to E_k$. Пусть X — произвольный объект, а $Y \to X$ — сюръекция, такая что $E_k(Y) = 0$. Положим $X' = \mathrm{Ker}(Y \to X)$ и рассмотрим точную тройку

$$0 \to X' \to Y \to X \to 0.$$

Получим коммутативную диаграмму с точными строками

$$(\ddagger) \qquad \begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & T_k(Y) \arrow[r] & T_k(X) \arrow[r, "\delta_{k-1}"] \arrow[d, dashed] & T_{k-1}(X') \arrow[r] \arrow[d, "f_{k-1,X'}"'] & T_{k-1}(Y) \arrow[d, "f_{k-1,Y}"'] \\
\cdots \arrow[r] & E_k(Y) \arrow[r] & E_k(X) \arrow[r, "\delta_{k-1}"] & E_{k-1}(X') \arrow[r] & E_{k-1}(Y)
\end{tikzcd}$$

Но $E_k(Y) = 0$, поэтому $E_k(X) = \mathrm{Ker}(E_{k-1}(X') \to E_{k-1}(Y))$, следовательно морфизм $T_k(X) \to T_{k-1}(X') \to E_{k-1}(X')$ пропускается через $E_k(X)$, то есть существует единственная пунктирная стрелка, делающая диаграмму коммутативной. Обозначим ее f_{kX}.

Осталось проверить, что построенный морфизм не зависит от выбора накрывающей Y и что f_k и f_{k-1} коммутируют с δ_{k-1}. Для этого рассмотрим коммутативную диаграмму

$$(\star)\qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X_1' \arrow[r] \arrow[d, "\phi'"'] & Y_1 \arrow[r] \arrow[d] & X_1 \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X_2' \arrow[r] & Y_2 \arrow[r] & X_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

в которой $E_k(Y_1) = 0$. Она дает кубическую диаграмму

$$\begin{tikzcd} T_k(X_1) \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr, "T_k(\phi)"] \arrow[dd, "f_{kX_1}"'] & & T_{k-1}(X_1') \arrow[dr, "T_{k-1}(\phi')"] \arrow[dd, "f_{k-1,X_1'}"' near end] & \\ & T_k(X_2) \arrow[rr, "\delta" near start] \arrow[dd, "f_{kX_2}" near start] & & T_{k-1}(X_2') \arrow[dd, "f_{k-1,X_2'}"] \\ E_k(X_1) \arrow[rr, "\delta"' near end] \arrow[dr, "E_k(\phi)"'] & & E_{k-1}(X_1') \arrow[dr, "E_{k-1}(\phi')"'] & \\ & E_k(X_2) \arrow[rr, "\delta"'] & & E_{k-1}(X_2') \end{tikzcd}$$

Заметим, что все грани кроме левой и передней коммутативны (верхняя и нижняя — так как $T_\bullet$ и $E_\bullet$ — δ-функторы, правая — в силу функториальности f_{k-1}, а задняя — по определению f_k).

Если теперь $E_k(Y_2) = 0$, то передняя грань тоже коммутативна. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \delta \circ f_{kX_2} \circ T_k(\phi) = f_{k-1,X_2'} \circ \delta \circ T_k(\phi) = f_{k-1,X_2'} \circ T_{k-1}(\phi') \circ \delta = \\ = E_{k-1}(\phi') \circ f_{k-1,X_1'} \circ \delta = E_{k-1}(\phi') \circ \delta \circ f_{kX_1} = \delta \circ E_k(\phi) \circ f_{kX_1}. \end{aligned}$$

Но так как $E_k(Y_2) = 0$ морфизм $\delta : E_k(X_2) \to E_{k-1}(X_2')$ инъективен, значит $f_{kX_2} \circ T_k(\phi) = E_k(\phi) \circ f_{kX_1}$, то есть левая грань коммутативна. Значит построенный таким образом морфизм $f_k : T_k \to E_k$ является морфизмом функторов.

Чтобы проверить корректность определения f_{kX} рассмотрим предыдущую ситуацию с $X_1 = X_2 = X$ и $\phi = \mathrm{id}_X$ и $E_k(Y_1) = E_k(Y_2) = 0$. Так как $T_k(\phi) = \mathrm{id}_{T_k(X)}$, $E_k(\phi) = \mathrm{id}_{E_k(X)}$, из коммутативности левой грани следует совпадение морфизмов $f_{kX} : T_k(X) \to E_k(X)$, построенных по Y_1 и Y_2. Остается заметить, что для любых накрывающих $Y_1 \to X$ и $Y_2 \to X$, таких что $E_k(Y_1) = E_k(Y_2) = 0$, найдется накрывающая $Y \to X$, такая что $E_k(Y) = 0$ и морфизмы $Y_1, Y_2 \to X$ пропускаются через Y (достаточно взять $Y = Y_1 \oplus Y_2$). Из предыдущего рассуждения видно, что морфизмы $T_k(X) \to E_k(X)$, построенных по Y_1 и Y_2, совпадают с морфизмом, построенным по Y, а значит и между собой. В частности, в кубической диаграмме левая грань всегда коммутативна.

Рассмотрим теперь коммутативную диаграмму $(\star)$ для $X_1 = X_2 = X$, $\phi = \mathrm{id}_X$ и $E_k(Y_1) = 0$, и соответствующую ей кубическую диаграмму. Как было показано выше в ней верхняя, нижняя, правая и задняя грани коммутативны, а левая грань тоже коммутативна в силу функториальности f_k. Но тогда легко видеть, что передняя грань тоже коммутативна, что и дает согласованность $f_\bullet$ и $\delta_\bullet$. $\square$

Аналогично доказывается

Теорема 4.5. *Пусть функтор $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ точен слева, а в категории $\mathcal{A}$ достаточно много инъективных объектов. Для всякого объекта $X \in \mathcal{A}$ выберем произвольную инъективную резольвенту $I^\bullet \cong X$ и положим $R^iF(X) = H^i(F(I^\bullet))$. Тогда $R^\bullet F$ — стирающий δ-функтор с $R^0F \cong F$. В частности $R^\bullet F$ — правый производный функтор функтора F. Если X инъективен, то $R^iF(X) = 0$ при $i > 0$.*