# Классические производные функторы — построение

## Часть 1. Комплексы

Пусть $(X^\bullet, d^\bullet)$ — комплекс в абелевой категории $\mathcal{A}$. Обозначим через

$$H^i(X^\bullet) := \operatorname{Ker} d^i / \operatorname{Im} d^{i-1} = \operatorname{Coker}(\operatorname{Im} d^{i-1} \to \operatorname{Ker} d^i) \cong \operatorname{Ker}(\operatorname{Coker} d^{i-1} \to \operatorname{Coim} d^i)$$

когомологию комплекса в члене $X^i$. Точные последовательности — это комплексы, у которых все когомологии равны нулю. Такие комплексы также называются ацикличными.

Морфизм комплексов $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ — это набор отображений $f^i : X^i \to Y^i$, таких что

$$d^i_Y \circ f^i = f^{i+1} \circ d^i_X.$$

Ясно, что мофризм комплексов индуцирует морфизм когомологий $H^i(f^\bullet) : H^i(X^\bullet) \to H^i(Y^\bullet)$.

**Упражнение 1.1.** Покажите, что (a) если категория $\mathcal{A}$ абелева, то категория комплексов $\operatorname{Com}(\mathcal{A})$ тоже абелева; (b) $H^i : \operatorname{Com}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ — аддитивный функтор, точный посередине.

**Упражнение 1.2** (Лемма о змее)**.** Пусть $0 \to X^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} Y^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} Z^\bullet \to 0$ — точная тройка комплексов (то есть для всякого $i$ последовательность $0 \to X^i \to Y^i \to Z^i \to 0$ точна). (a) Покажите, что из нее возникает длинная точная последовательность когомологий

$$\dots \to H^{i-1}(Z^\bullet) \xrightarrow{\delta^{i-1}} H^i(X^\bullet) \to H^i(Y^\bullet) \to H^i(Z^\bullet) \xrightarrow{\delta^i} H^{i+1}(X^\bullet) \to \dots$$

(b) Проверьте, что если тройка почленно расщепима (то есть $Y^k \cong X^k \oplus Z^k$ для каждого $k$, так что $f^k$ и $g^k$ — стандартное вложение и проекция), то $\delta^k$ индуцирован морфизмом комплексов $p_{X^{k+1}} \circ d^k_Y \circ i_{Z^k}$.

На категории комплексов определен функтор сдвига на произвольное целое число $t$, который обозначается как $[t]$, $X^\bullet \mapsto X^\bullet[t]$. По определению

$$(X^\bullet[t])^k = X^{k+t}, \qquad d^k_{X^\bullet[t]} = (-1)^t d^{k+t}_X.$$

**Упражнение 1.3.** Покажите, что (a) $[t]$ — автоморфизм категории комплексов, причем $[t] \circ [s] = [t+s]$ для всех $t, s \in \mathbb{Z}$; (b) $H^i(X[t]) \cong H^{i+t}(X)$.

Морфизм комплексов $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ называется квазиизоморфизмом, если $H^i(f^\bullet) : H^i(X^\bullet) \to H^i(Y^\bullet)$ — изоморфизм при всех $i$.

**Упражнение 1.4.** Покажите, что $X^\bullet$ ацикличен $\iff$ нулевой морфизм $X^\bullet \to X^\bullet$ — квазиизоморфизм.

Морфизмы комплексов $f^\bullet, g^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ называются гомотопными (записывается $f \sim g$), если существует набор морфизмов $h^i : X^i \to Y^{i+1}$, такой что

$$f^i - g^i = d^{i-1}_Y \circ h^i + h^{i+1} \circ d^i_X.$$

Комплексы $X^\bullet$ и $Y^\bullet$ называются гомотопными, если существуют морфизмы комплексов $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ и $g^\bullet : Y^\bullet \to X^\bullet$, такие что $g^\bullet \circ f^\bullet \sim \mathrm{id}_X$, $f^\bullet \circ g^\bullet \sim \mathrm{id}_Y$.

**Лемма 1.5.** *Гомотопные морфизмы индуцируют одинаковые отображения на когомологиях. В частности, гомотопные комплексы квазиизоморфны.*

*Доказательство.* Достаточно проверить, что морфизм гомотопный нулю индуцирует нулевое отображение на когомологиях. Пусть $f^i = d^{i-1}_Y \circ h^i + h^{i+1} \circ d^i_X$. Тогда $f^i_{|\operatorname{Ker} d^i_X} = d^{i-1}_Y \circ h^i$ — пропускается через $\operatorname{Im} d^{i-1}_Y$, то есть $H^i(f^\bullet) = 0$. □

В отличие от квазиизоморфности, гомотопическая эквивалентность сохраняется при действии любых аддитивных функторов. Если два морфизма (комплекса) гомотопны, они остаются гомотопными после применения любого аддитивного функтора,

## Часть 2. Конус морфизма

Очень полезное понятие — конус морфизма комплексов. Пусть $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ — морфизм комплексов. Положим

$$C(f)^k = Y^k \oplus X^{k+1}, \qquad d^k_{C(f)} = \begin{pmatrix} d^k_Y & f^{k+1} \\ 0 & -d^{k+1}_X \end{pmatrix}.$$

Определим также

$$i^k = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{Y^k} \\ 0 \end{pmatrix} : Y^k \to C(f)^k, \qquad p^k = (0, \mathrm{id}^{k+1}_X) : C(f)^k \to X^{k+1}.$$

**Лемма 2.1.** *$(C(f)^\bullet, d^\bullet_{C(f)})$ — комплекс, а $i^\bullet : Y^\bullet \to C(f)^\bullet$ и $p^\bullet : C(f)^\bullet \to X^\bullet[1]$ — морфизмы комплексов. Более того, последовательность*

$$(\dagger) \qquad \ldots \longrightarrow H^{i-1}(C(f)^\bullet) \xrightarrow{H^{i-1}(p^\bullet)} H^i(X^\bullet) \xrightarrow{H^i(f^\bullet)} H^i(Y^\bullet) \xrightarrow{H^i(i^\bullet)} H^i(C(f)^\bullet) \xrightarrow{H^i(p^\bullet)} H^i(X^\bullet) \longrightarrow \ldots$$

*точна.*

*Доказательство.* Равенства $d^{k+1}_{C(f)} \circ d^k_{C(f)} = 0$, $d^k_{C(f)} \circ i^k = i^{k+1} \circ d^k_Y$ и $p^{k+1} \circ d^k_{C(f)} = d^k_{X[1]} \circ p^k$ проверяются непосредственно. Кроме того, легко видеть, что $p^\bullet \circ i^\bullet = 0$, а морфизмы $i^\bullet \circ f^\bullet$ и $f^\bullet[1] \circ p^\bullet$ гомотопны нулю (гомотопии задаются отображениями $\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{id}_{X^k} \end{pmatrix} : X^k \to C(f)^{k-1}$ и $\begin{pmatrix} \mathrm{id}_{Y^k} & 0 \end{pmatrix} : C(f)^k \to (Y^\bullet[1])^{k-1}$ соответственно), поэтому последовательность (†) является комплексом. Для доказательства точности заметим, что морфизмы $i^\bullet : Y^\bullet \to C(f)^\bullet$ и $p^\bullet : C(f)^\bullet \to X^\bullet[1]$ образуют точную тройку комплексов

$$0 \to Y^\bullet \to C(f)^\bullet \to X^\bullet[1] \to 0.$$

Пользуясь леммой о змее, получаем длинную точную последовательность когомологий, причем согласно второй части леммы о змее связывающий гомоморфизм в ней индуцирован морфизмом $f$. □

**Следствие 2.2.** *Морфизм комплексов $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ — квазиизоморфизм $\iff$ его конус $C(f)$ ацикличен.*

Всякий объект категории $\mathcal{A}$ можно рассматривать как комплекс сосредоточенный в градуировке нуль.

**Упражнение 2.3.** Покажите, что всякий ограниченный комплекс получается последовательными операциями взятиями конуса морфизма и сдвига из объектов категории $\mathcal{A}$.

**Упражнение 2.4.** Определим цилиндр морфизма $f$ формулой $\mathrm{Cyl}(f) = C(i[-1] : C(f)[-1] \to X^\bullet)$, или явно

$$\mathrm{Cyl}(f)^k = Y^k \oplus X^k \oplus X^{k+1}, \qquad d^k_{\mathrm{Cyl}(f)} = \begin{pmatrix} d^k_Y & 0 & f^{k+1} \\ 0 & d^k_X & -\mathrm{id}_{X^{k+1}} \\ 0 & 0 & -d^{k+1}_X \end{pmatrix}.$$

Покажите, что существует точная последовательность $X^\bullet \xrightarrow{\bar f} \mathrm{Cyl}(f) \xrightarrow{\pi} C(f)$ и морфизмы $Y^\bullet \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Cyl}(f) \xrightarrow{\beta} Y^\bullet$, такие что $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_{Y^\bullet}$, $\alpha \circ \beta \sim \mathrm{id}_{\mathrm{Cyl}(f)}$, $\beta \circ \bar f = f$, $\pi \circ \alpha = i$.

## Часть 3. Резольвенты

Резольвентой объекта $X \in \mathcal{A}$ называется любой комплекс квазиизоморфный $X$.

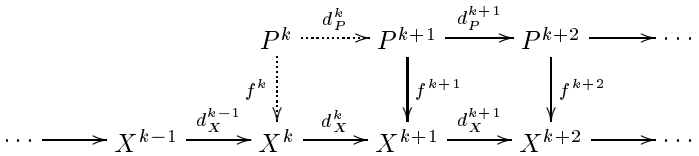
Если в категории $\mathcal{A}$ достаточно много проективных объектов, то всякий объект $X \in \mathcal{A}$ обладает проективной резольвентой, сосредоточенной в неположительных степенях:

$$\ldots \to P^{-3} \to P^{-2} \to P^{-1} \to P^0 \to 0.$$

Мы докажем чуть более общее утверждение.

**Лемма 3.1.** *Пусть $X^\bullet$ — комплекс ограниченный сверху. Тогда существует комплекс $P^\bullet$, составленный из проективных объектов и квазиизоморфизм $f^\bullet : P^\bullet \to X^\bullet$.*

*Доказательство.* Будем строить $P^i$ и $f^i$ последовательно. Для таких $k$, что $X^i = 0$ при $i \geqslant k$, положим $P^k = 0$. Предположим, что $P^i$ и морфизмы $f^i$ с $i > k$ уже построены, причем так конус построенного морфизма ацикличен в степенях $\geqslant k+1$.

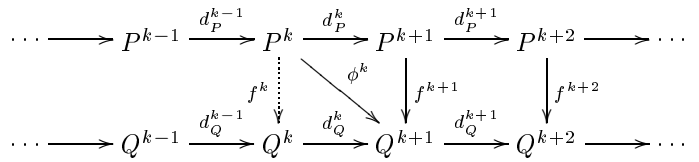


Пусть $Y = \operatorname{Ker}\left(\begin{pmatrix} d_X^k & f^{k+1} \\ 0 & -d_P^{k+1} \end{pmatrix} : X^k \oplus P^{k+1} \to X^{k+1} \oplus P^{k+2}\right)$. Выберем проективную накрывающую $P^k \to Y$ и пусть композиция $P^k \to Y \to X^k \oplus P^{k+1}$ задается морфизмами $f^k : P^k \to X^k$ и $-d_P^k : P^k \to P^{k+1}$. Тогда $\begin{pmatrix} d_X^k & f^{k+1} \\ 0 & -d_P^{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^k \\ -d_P^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_X^k f^k - f^{k+1} d_P^k \\ d_P^{k+1} d_P^k \end{pmatrix}$, откуда следуют равенства $d_X^k f^k = f^{k+1} d_P^k$ и $d_P^{k+1} d_P^k = 0$. Значит морфизмы $f^k$ и $d_P^k$ определяют морфизм комплексов, причем такой, что его конус ацикличен также и в степени $k$. □

**Упражнение 3.2.** Покажите, что если $P^\bullet$ — проективная резольвента объекта $X$, то существует морфизм $\epsilon : P_0 \to X$, такой что комплекс $\cdots \to P^{-3} \to P^{-2} \to P^{-1} \to P^0 \xrightarrow{\epsilon} X \to 0$ ацикличен.

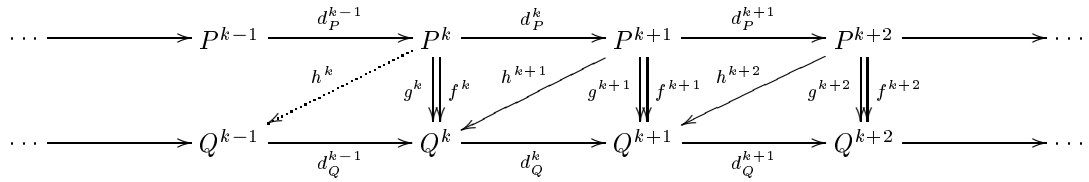
**Лемма 3.3.** *Пусть $P^\bullet$ — проективная резольвента для $X$, а $Q^\bullet$ — проективная резольвента для $Y$. Тогда для любого морфизма $f : X \to Y$ существует единственный с точностью до гомотопии морфизм комплексов $f^\bullet : P^\bullet \to Q^\bullet$, такой что $H^0(f^\bullet) = f$.*

*Доказательство.* Построим последовательно морфизмы $f^i : P^i \to Q^i$, начиная с $f^0$. Обозначим $P^1 = X$, $d_P^0 = \epsilon_X$, $Q^1 = Y$, $d_Q^0 = \epsilon_Y$, $f^1 = f$ и предположим, что морфизмы $f^i$ с $i > k$ уже построены.



Рассмотрим морфизм $\phi^k = f^{k+1} \circ d_P^k$. Заметим, что $d_Q^{k+1} \circ \phi^k = d_Q^{k+1} \circ f^{k+1} \circ d_P^k = f^{k+2} \circ d_P^{k+1} \circ d_P^k = 0$. Но так как комплекс $Q^\bullet$ точен, это значит что $\operatorname{Im}\phi^k \subset \operatorname{Ker} d_Q^{k+1} = \operatorname{Im} d_Q^k$. Так как морфизм $Q^k \to \operatorname{Im} d_Q^k$ сюръективен, а $P^k$ проективен, найдется морфизм $f^k : P^k \to Q^k$, такой что $\phi^k = d_Q^k \circ f^k$. Повторяя эту процедуру строим $f^\bullet$.

Пусть теперь $f^\bullet$ и $g^\bullet$ — два морфизма, такие что $H^0(f^\bullet) = H^0(g^\bullet)$. Будем строить $h^i$ последовательно, начиная с $h^0$. Обозначим $Q^1 = Y$, $d_Q^0 = \epsilon_Y$ и предположим, что морфизмы $h^i$ с $i > k$ уже построены.



Заметим, что $d_Q^k \circ (f^k - g^k - h^{k+1} \circ d_P^k) = (f^{k+1} - g^{k+1} - d_Q^k \circ h^{k+1}) \circ d_P^k = h^{k+2} \circ d_P^{k+1} \circ d_P^k = 0$. Но так как комплекс $Q^\bullet$ точен, это значит что $\operatorname{Im}(f^k - g^k - h^{k+1} \circ d_P^k) \subset \operatorname{Ker} d_Q^k = \operatorname{Im} d_Q^{k-1}$. Так как морфизм $Q^k \to \operatorname{Im} d_Q^k$ сюръективен, а $P^k$ проективен, найдется морфизм $h^k : P^k \to Q^k$, такой что $f^k - g^k - h^{k+1} \circ d_P^k = d_Q^{k-1} \circ h^k$. Повторяя эту процедуру строим $h^\bullet$. □

Заметим, что в доказательстве нигде не использовалась проективность $Q^i$ и точность комплекса $P^\bullet$. Поэтому ровно то же рассуждение доказывает, следующую лемму.

**Следствие 3.4.** *Всякий морфизм из ограниченного сверху комплекса состоящего из проективных объектов в ациклический комплекс гомотопен нулю.*

Аналогичные результаты верны для инъективных резольвент, если в категории достаточно много инъективных объектов.

**Лемма 3.5.** *Пусть $X^\bullet$ — комплекс ограниченный снизу. Тогда существует комплекс $I^\bullet$, составленный из инъективных объектов и квазиизоморфизм $f^\bullet : X^\bullet \to I^\bullet$. В частности, всякий объект $X \in \mathcal{A}$ обладает* инъективной резольвентой, *сосредоточенной в неотрицательных степенях:*

$$0 \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to I^3 \to \dots$$

*Если $I^\bullet$ — инъективная резольвента для объекта $X$, а $J^\bullet$ — инъективная резольвента для $Y$, то для любого морфизма $f : X \to Y$ существует единственный с точностью до гомотопии морфизм комплексов $f^\bullet : I^\bullet \to J^\bullet$, такой что $H^0(f^\bullet) = f$. Всякий морфизм из ациклического комплекса в ограниченный снизу комплекс состоящий из инъективных объектов гомотопен нулю.*

## Часть 4. Построение производных функторов

**Теорема 4.1.** *Пусть функтор $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ точен справа, а в категории $\mathcal{A}$ достаточно много проективных объектов. Для всякого объекта $X \in \mathcal{A}$ выберем произвольную проективную резольвенту $P^\bullet \cong X$ и положим $L_iF(X) = H^{-i}(F(P^\bullet))$. Тогда $L_iF$ — производные функторы функтора $F$.*

*Доказательство.* Во-первых, докажем функториальность. Пусть $P^\bullet \cong X$ и $Q^\bullet \cong Y$ — проективные резольвенты, а $f : X \to Y$ — произвольный морфизм. Пусть $f^\bullet : P^\bullet \to Q^\bullet$ — произвольный морфизм резольвент, такой что $H^0(f^\bullet) = f$. Положим $L_iF(f) = H^{-i}(F(f^\bullet))$. Надо проверить, что данное определение не зависит от выбора $f^\bullet$. Но как мы знаем, разные $f^\bullet$ гомотопны, поэтому разные $F(f^\bullet)$ тоже гомотопны, а значит отображения на когомологиях одинаковы.

Кроме того, надо проверить, что определение $L_iF(X)$ не зависит от выбора резольвенты. В самом деле, если $Q^\bullet \to X$ — другая резольвента, то отображение $\mathrm{id}_X : X \to X$ дает морфизмы $f^\bullet : P^\bullet \to Q^\bullet$ и $g^\bullet : Q^\bullet \to P^\bullet$, причем композиции $g^\bullet \circ f^\bullet : P^\bullet \to P^\bullet$ и $f^\bullet \circ g^\bullet : Q^\bullet \to Q^\bullet$ гомотопны тождественным. Применяя функтор $F$ заключаем, что комплексы $F(P^\bullet)$ и $F(Q^\bullet)$ гомотопны, а значит имеют одинаковые когомологии.

Теперь надо построить связывающие гомоморфизмы $\delta$. Пусть $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ — точная тройка в $\mathcal{A}$. Выберем проективные резольвенты $P^\bullet \cong X$ и $Q^\bullet \cong Y$ и продолжим $f$ до морфизма резольвент $f^\bullet : P^\bullet \to Q^\bullet$. Пусть $R^\bullet = C(f)$. Из леммы 2.1 получаем, что $P^\bullet \cong Z$. При этом все $R^k = Q^k \oplus P^{k+1}$ проективны, так что $R^\bullet$ — проективная резольвента для объекта $Z$. Применяя к тругольнику $P^\bullet \to Q^\bullet \to R^\bullet \to P^\bullet[1]$ функтор $F$ получаем тройку комплексов $F(P^\bullet) \to F(Q^\bullet) \to F(R^\bullet) \to F(P^\bullet[1])$. Заметим, что в силу аддитивности $F$ имеем

$$F(R^\bullet) = F(C(f)) \cong C(F(f)), \qquad F(P^\bullet[1]) = F(P^\bullet)[1].$$

Применяя к этому треугольнику лемму 2.1, получаем длинную точную последовательность

$$\dots \to L_2F(Z) \xrightarrow{\delta_1} L_1F(X) \to L_1F(Y) \to L_1F(Z) \xrightarrow{\delta_0} L_0F(X) \to L_0F(Y) \to L_0F(Z) \to 0$$

Теперь проверим функториальность связывающих гомоморфизмов. Рассмотрим морфизм

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \xi} & & \downarrow{\scriptstyle \eta} & & \downarrow{\scriptstyle \zeta} & & \\ 0 & \longrightarrow & X_1 & \xrightarrow{f_1} & Y_1 & \xrightarrow{g_1} & Z_1 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

точных троек. Пусть $P^\bullet \cong X$, $Q^\bullet \cong Y$, $P_1^\bullet \cong X_1$, $Q_1^\bullet \cong Y_1$ — проективные резольвенты, а $f^\bullet : P^\bullet \to Q^\bullet$ и $f_1^\bullet : P_1^\bullet \to Q_1^\bullet$ — продолжения $f$ и $f_1$. Пусть также $\xi^\bullet : P^\bullet \to P_1^\bullet$ и $\eta^\bullet : Q^\bullet \to Q_1^\bullet$ — продолжения $\xi$ и $\eta$. Тогда $f_1^\bullet \circ \xi^\bullet \sim \eta^\bullet \circ f^\bullet$. Пусть $h^k : P^k \to Q_1^{k-1}$ — гомотопия, такая что

$$\eta^k \circ f^k - f_1^k \circ \xi^k = d_{Q_1}^{k-1} \circ h^k + h^{k+1} \circ d_P^k.$$

Определим отображение $\gamma_k : R^k = Q^k \oplus P^{k+1} \to R_1^k = Q_1^k \oplus P_1^{k+1}$ формулой $\begin{pmatrix} \eta^k & h^{k+1} \\ 0 & \xi^k \end{pmatrix}$. Легко проверить, что $\gamma^k$ — морфизм комплексов, такой что в диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc} P^\bullet & \xrightarrow{f^\bullet} & Q^\bullet & \xrightarrow{i} & R^\bullet & \xrightarrow{p} & P^\bullet[1] \\ \downarrow{\scriptstyle \xi^\bullet} & & \downarrow{\scriptstyle \eta^\bullet} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma^\bullet} & & \downarrow{\scriptstyle \xi^\bullet[1]} \\ P_1^\bullet & \xrightarrow{f_1^\bullet} & Q_1^\bullet & \xrightarrow{i_1} & R_1^\bullet & \xrightarrow{p_1} & P_1^\bullet \end{array}$$

первый квадрат гомотопически коммутативен, а два другие квадрата коммутативны. Рассматривая индуцированный морфизм на когомологиях, и пользуясь тем, что $\xi^\bullet$ и $\eta^\bullet$ индуцируют морфизмы $\xi : X \to X_1$ и $\eta : Y \to Y_1$, легко видеть, что $\gamma^\bullet$ индуцирует морфизм $\zeta : Z \to Z_1$. Следовательно, $H^{-i}(F(\xi^\bullet)) = L_iF(\xi)$, $H^{-i}(F(\eta^\bullet)) = L_iF(\eta)$, и $H^{-i}(F(\gamma^\bullet)) = L_iF(\zeta)$. Остается заметить, что морфизмы $\delta_k$ индуцированы морфизмами $p$ и $p_1$ соответственно, поэтому из коммутативности правого квадрата следует их функториальность.

Таким образом, мы показали, что $L_iF$ определенные выше являются $\delta$-функтором. Остается проверить его универсальность. Для этого нам понадобится следующие свойства.

**Лемма 4.2.** *Если объект $P$ проективен, то $L_0F(P) \cong P$, $L_iF(P) = 0$ при $i > 0$.*

*Доказательство.* Если $P$ проективен, то в качестве проективной резольвенты мы можем взять комплекс $P^\bullet$ с $P^0 = P$, $P^i = 0$ при $i \neq 0$. Применяя функтор $F$ получим комплекс с единственным членом $F(P)$ в степени 0, а его когомологии, очевидно, имеют указанный вид. □

**Лемма 4.3.** *Для любого $X$ имеем изоморфизм функторов $L_0F(X) \cong F(X)$.*

*Доказательство.* Выберем для $X$ проективную резольвенту $P^\bullet \cong X$. Она дает точную справа тройку $P^{-1} \to P^0 \to X \to 0$. Применяя $F$ получаем последовательность $F(P^{-1}) \to F(P^0) \to F(X) \to 0$, которая также точна справа (так как $F$ точен справа). Отсюда $H^0(F(P^\bullet)) = \mathrm{Coker}(F(P^{-1}) \to F(P^0)) \cong F(X)$. Функториальность изоморфизма легко проверяется. □

Левый (правый) $\delta$-функтор $(E_\bullet, \delta_\bullet)$ называется стирающим, если для всякого $i > 0$ и всякого $X$ найдется сюръекция $Y \to X$ (инъекция $X \to Y$), такая что $E_i(Y) = 0$. Заметим, что $L_\bullet F$ является стирающим в силу предыдущей леммы (в качестве $Y$ можно взять проективную накрывающую), причем $L_0F \cong F$. Поэтому остается воспользоваться следующим результатом. □

**Теорема 4.4.** *Пусть $(E_i, \delta_i)$ — стирающий $\delta$-функтор с $E_0 \cong F$. Тогда он универсален.*

*Доказательство.* Пусть $(T_i, \delta_i)$ — произвольный $\delta$-функтор, а $f_0 : T_0 \to E_0$ — морфизм функторов. Предположим, что $f_i : T_i \to E_i$ при $i < k$ уже построены. Построим $f_k : T_k \to E_k$. Пусть $X$ — произвольный объект, а $Y \to X$ — сюръекция, такая что $E_k(Y) = 0$. Положим $X' = \mathrm{Ker}(Y \to X)$ и рассмотрим точную тройку

$$0 \to X' \to Y \to X \to 0.$$

Получим коммутативную диаграмму с точными строками

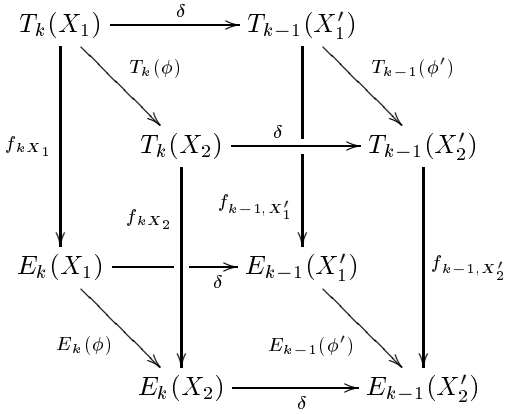
$$(\ddagger) \qquad \begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & T_k(Y) & \longrightarrow & T_k(X) & \xrightarrow{\delta_{k-1}} & T_{k-1}(X') & \longrightarrow & T_{k-1}(Y) \\ & & & & \vdots & & \downarrow{\scriptstyle f_{k-1,X'}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{k-1,Y}} \\ \cdots & \longrightarrow & E_k(Y) & \longrightarrow & E_k(X) & \xrightarrow{\delta_{k-1}} & E_{k-1}(X') & \longrightarrow & E_{k-1}(Y) \end{array}$$

Но $E_k(Y) = 0$, поэтому $E_k(X) = \mathrm{Ker}(E_{k-1}(X') \to E_{k-1}(Y))$, следовательно морфизм $T_k(X) \to T_{k-1}(X') \to E_{k-1}(X')$ пропускается через $E_k(X)$, то есть существует единственная пунктирная стрелка, делающая диаграмму коммутативной. Обозначим ее $f_{kX}$.

Осталось проверить, что построенный морфизм не зависит от выбора накрывающей $Y$ и что $f_k$ и $f_{k-1}$ коммутируют с $\delta_{k-1}$. Для этого рассмотрим коммутативную диаграмму

$(\star)$
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X_1' & \longrightarrow & Y_1 & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \phi'} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \\ 0 & \longrightarrow & X_2' & \longrightarrow & Y_2 & \longrightarrow & X_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

в которой $E_k(Y_1) = 0$. Она дает кубическую диаграмму




Заметим, что все грани кроме левой и передней коммутативны (верхняя и нижняя — так как $T_\bullet$ и $E_\bullet$ — $\delta$-функторы, правая — в силу функториальности $f_{k-1}$, а задняя — по определению $f_k$).

Если теперь $E_k(Y_2) = 0$, то передняя грань тоже коммутативна. Отсюда следует, что

$$\delta \circ f_{kX_2} \circ T_k(\phi) = f_{k-1,X_2'} \circ \delta \circ T_k(\phi) = f_{k-1,X_2'} \circ T_{k-1}(\phi') \circ \delta = \\ = E_{k-1}(\phi') \circ f_{k-1,X_1'} \circ \delta = E_{k-1}(\phi') \circ \delta \circ f_{kX_1} = \delta \circ E_k(\phi) \circ f_{kX_1}.$$

Но так как $E_k(Y_2) = 0$ морфизм $\delta : E_k(X_2) \to E_{k-1}(X_2')$ инъективен, значит $f_{kX_2} \circ T_k(\phi) = E_k(\phi) \circ f_{kX_1}$, то есть левая грань коммутативна. Значит построенный таким образом морфизм $f_k : T_k \to E_k$ является морфизмом функторов.

Чтобы проверить корректность определения $f_{kX}$ рассмотрим предыдущую ситуацию с $X_1 = X_2 = X$ и $\phi = \mathrm{id}_X$ и $E_k(Y_1) = E_k(Y_2) = 0$. Так как $T_k(\phi) = \mathrm{id}_{T_k(X)}$, $E_k(\phi) = \mathrm{id}_{E_k(X)}$, из коммутативности левой грани следует совпадение морфизмов $f_{kX} : T_k(X) \to E_k(X)$, построенных по $Y_1$ и $Y_2$. Остается заметить, что для любых накрывающих $Y_1 \to X$ и $Y_2 \to X$, таких что $E_k(Y_1) = E_k(Y_2) = 0$, найдется накрывающая $Y \to X$, такая что $E_k(Y) = 0$ и морфизмы $Y_1, Y_2 \to X$ пропускаются через $Y$ (достаточно взять $Y = Y_1 \oplus Y_2$). Из предыдущего рассуждения видно, что морфизмы $T_k(X) \to E_k(X)$, построенных по $Y_1$ и $Y_2$, совпадают с морфизмом, построенным по $Y$, а значит и между собой. В частности, в кубической диаграмме левая грань всегда коммутативна.

Рассмотрим теперь коммутативную диаграмму $(\star)$ для $X_1 = X_2 = X$, $\phi = \mathrm{id}_X$ и $E_k(Y_1) = 0$, и соответствующую ей кубическую диаграмму. Как было показано выше в ней верхняя, нижняя, правая и задняя грани коммутативны, а левая грань тоже коммутативна в силу функториальности $f_k$. Но тогда легко видеть, что передняя грань тоже коммутативна, что и дает согласованность $f_\bullet$ и $\delta_\bullet$. □

Аналогично доказывается

**Теорема 4.5.** *Пусть функтор $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ точен слева, а в категории $\mathcal{A}$ достаточно много инъективных объектов. Для всякого объекта $X \in \mathcal{A}$ выберем произвольную инъективную резольвенту $I^\bullet \cong X$ и положим $R^iF(X) = H^i(F(I^\bullet))$. Тогда $R^\bullet F$ — стирающий $\delta$-функтор с $R^0F \cong F$. В частности $R^\bullet F$ — правый производный функтор функтора $F$. Если $X$ инъективен, то $R^iF(X) = 0$ при $i > 0$.*