Примеры производных функторов

Часть 1. Функторы Ext

Важнейшим примеров производных функторов являются производные функторы от функтора Hom. Поскольку это функтор от двух аргументов, есть выбор — по какому аргументу рассматривать производный функтор. Оказывается, что ответ получается одинаковым в обоих случаях, но так как априори это не очевидно, обозначим

$$\mathrm{Ext}_1^i(X,Y) = (R^i\,\mathrm{Hom}(-,Y))(X), \qquad \mathrm{Ext}_2^i(X,Y) = (R^i\,\mathrm{Hom}(X,-))(Y).$$

Заметим, что $\mathrm{Hom}(X,-) : \mathcal{A} \to \mathsf{Ab}$ — точный слева функтор, поэтому для его вычисления надо объект Y заменять на его инъективную резольвенту в $\mathcal{A}$. С другой стороны, $\mathrm{Hom}(-,Y) : \mathcal{A}^\circ \to \mathsf{Ab}$ — точный слева функтор, поэтому для его вычисления надо объект X заменять на его инъективную резольвенту в $\mathcal{A}^\circ$, то есть на проективную резольвенту в $\mathcal{A}$.

Для доказательства того, что $\mathrm{Ext}_1^k(X,Y) \cong \mathrm{Ext}_2^k(X,Y)$ рассмотрим третье определение, принадлежащее Ионеде. Рассмотрим множество $E^k(X,Y)$ всех точных последовательностей вида

$$0 \to Y \to Z_k \to Z_{k-1} \to \cdots \to Z_2 \to Z_1 \to X \to 0.$$

Две таких точных последовательности $Z_\bullet$ и $Z'_\bullet$ называются **элементарно эквивалентными**, если существует коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & Z_k \arrow[r] \arrow[d] & Z_{k-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & Z_2 \arrow[r] \arrow[d] & Z_1 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z'_k \arrow[r] & Z'_{k-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Z'_2 \arrow[r] & Z'_1 \arrow[r] & X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Далее, две таких точных последовательности $Z_\bullet$ и $W_\bullet$ называются **эквивалентными**, если существует последовательность элементарных эквивалентностей $Z_\bullet \sim Z'_\bullet \sim \cdots \sim Z^{(n)}_\bullet \sim W_\bullet$ (в которой направление морфизмов может меняться!). При $k \geqslant 1$ определим $\mathrm{Ext}_I^k(X,Y)$ как фактор $E^k(X,Y)$ по этому отношению эквивалентности, а при $k=0$ положим $\mathrm{Ext}_I^0(X,Y) = \mathrm{Hom}(X,Y)$.

Лемма 1.1. $\mathrm{Ext}_I^k(X,Y)$ *— бифунктор, ковариантный по Y и контравариантный по X.*

Доказательство. Рассмотрим класс в $\mathrm{Ext}_I^k(X,Y)$, представленный последовательностью $Z_\bullet$ и пусть $X' \to X$ — морфизм. Пусть $Z'_1 = \mathrm{Ker}(Z_1 \oplus X' \to X)$ — корасслоенное произведение Z_1 и X' над X, и $Z'_i = Z_i$ при $2 \leqslant i \leqslant k$. Легко видеть, что $Z'_\bullet$ задает некоторый класс в $E^k(X',Y)$, причем при замене $Z_\bullet$ на элементарно эквивалентную последовательность, $Z'_\bullet$ тоже заменяется на элементарно эквивалентную. Поэтому получаем корректно определенное отображение $f^* : \mathrm{Ext}_I^k(X,Y) \to \mathrm{Ext}_I^k(X',Y)$, причем легко проверить, что для любого морфизма $g : X'' \to X'$ выполнено $(f\circ g)^* = g^* \circ f^*$, так что $\mathrm{Ext}_I^k(X,Y)$ функториален по первому аргументу. Функториальность по второму аргументу доказывается аналогично. □

Теорема 1.2. *Существуют изоморфизмы функторов* $\mathrm{Ext}_1^k(X,Y) \cong \mathrm{Ext}_I^k(X,Y) \cong \mathrm{Ext}_2^k(X,Y)$.

Доказательство. Построим, например, первый изоморфизм. Для этого проверим, что $\mathrm{Ext}_I^\bullet$ является стирающим δ-функтором по первому аргументу. Вначале покажем, что если P проективен, то $\mathrm{Ext}_I^i(P,Y) = 0$ для всех Y и $i \geqslant 1$. В самом деле, так как всякая сюръекция $Z_1 \to P$ изоморфна проекции $Z_1 = Z'_1 \oplus P \to P$, всякий элемент из $E^i(P,Y)$ эквивалентен элементу, имеющему вид $0 \to Y \to Y \oplus P \to P \to 0$, если $i=1$ и $0 \to Y \to Y \to 0 \to \cdots \to 0 \to P \to P \to 0$, если $i \geqslant 2$, который мы и будем считать нулем.

Теперь построим морфизмы δ. Пусть $0 \to X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X'' \to 0$ — точная тройка, а последовательность $Z'_\bullet$ задает элемент из $E^{k-1}(X',Y)$. Положим $Z''_1 = X$, а $Z''_{i+1} = Z'_i$ при $1 \leqslant i \leqslant k-1$. Тогда $Z''_\bullet \in E^k(X'',Y)$. Получаем отображение $E^{k-1}(X',Y) \to E^k(X'',Y)$. Оно очевидно согласовано с нашим отношением эквивалентности, поэтому индуцирует отображение $\delta^{k-1} : \mathrm{Ext}_I^{k-1}(X',Y) \to \mathrm{Ext}_I^k(X'',Y)$.

Упражнение 1.3. Покажите, что построенное отображение δ функториально относительно морфизмов точных последовательностей.

Упражнение 1.4. Покажите, что последовательность

$$\cdots \to \mathrm{Ext}_I^{k-1}(X,Y) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Ext}_I^{k-1}(X',Y) \xrightarrow{\delta^{k-1}} \mathrm{Ext}_I^k(X'',Y) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Ext}_I^k(X,Y) \to \dots$$

точна.

Таким образом, $\mathrm{Ext}_I^\bullet$ является стирающим δ-функтором по первому аргументу. Применяя теорему из предыдущей лекции, получаем $\mathrm{Ext}_1^k(X,Y) \cong \mathrm{Ext}_I^k(X,Y)$. Аналогично строится второй изоморфизм. $\square$

Следствие 1.5. *Функторы* Ext_I^k *аддитивны.*

Упражнение 1.6. Опишите операцию сложения на $\mathrm{Ext}_I^k(X,Y)$ в терминах точных последовательностей.

Упражнение 1.7. Пусть $P^\bullet \cong X$ — проективная резольвента и $f : P^k \to Y$ — морфизм, представляющий класс в $\mathrm{Ext}_1^k(X,Y)$. Постройте по нему элемент в $E^k(X,Y)$, представляющий его образ в $\mathrm{Ext}_I^k(X,Y)$.

Так как Ext_1^k канонически изоморфно Ext_k^2, мы не будем их различать, и будем писать просто Ext^k.

Упражнение 1.8. Покажите, что в категории Ab выполнено $\mathrm{Ext}^i(X,Y) = 0$ при $i \geqslant 2$. Вычислите $\mathrm{Ext}^i(X,Y)$ для $X,Y = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Упражнение 1.9. Пусть $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ — точная тройка. Покажите, что
(a) морфизм $X' \to Y$ продолжается до морфизма $X \to Y \iff$ его образ в $\mathrm{Ext}^1(X'',Y)$ равен нулю;
(b) морфизм $Y \to X''$ поднимается до морфизма $Y \to X \iff$ его образ в $\mathrm{Ext}^1(Y,X')$ равен нулю.

Упражнение 1.10. Покажите, что (a) объект P проективен $\iff \mathrm{Ext}^1(P,Y) = 0$ для всех Y; (b) объект I инъективен $\iff \mathrm{Ext}^1(X,I) = 0$ для всех X.

Часть 2. Функторы Tor

Рассмотрим категории $R-\mathsf{mod}$ и $\mathsf{mod}-R$ левых и правых модулей над кольцом R и функтор тензорного произведения над R: $\otimes_R : (\mathsf{mod}-R) \times (R-\mathsf{mod}) \to \mathsf{Ab}$, $(M,N) \mapsto M \otimes_R N$.

Лемма 2.1. *Функтор тензорного произведения точен справа по каждому из аргументов.*

Доказательство. По определению тензорного произведения имеем $\mathrm{Hom}(M\otimes_R N, L) \cong \mathrm{Hom}_R(N, \mathrm{Hom}(M,L))$, значит функтор $M \otimes_R - : R-\mathsf{mod} \to \mathsf{Ab}$ сопряжен слева к функтору $\mathrm{Hom}(M,-) : \mathsf{Ab} \to R-\mathsf{mod}$. Но левый сопряженный функтор всегда точен справа. Значит тензорное произведение точно по второму аргументу. Точность по первому аргументу доказывается аналогино. $\square$

Аналогично случаю с функтором Hom мы можем рассмотреть левые производные функторы по первому и по второму аргументу. Опять же, априори их связь не очевидна, поэтому обозначим пока

$$\mathrm{Tor}_i^1(X,Y) = R^i(- \otimes_R Y)(X), \qquad \mathrm{Tor}_i^2(X,Y) = R^i(X \otimes_R -)(Y).$$

Так как $\otimes_R$ — точный справа функтор, для вычисления функторов Tor надо объекты X и Y заменять на проективную резольвенту. Рассмотрим функтор $\mathrm{Tor}_i^1(X,Y)$ как функтор от Y.

Упражнение 2.2. Покажите, что (a) если P проективен, то $\mathrm{Tor}_i^1(X,P) = 0$, а функтор $- \otimes_R P$ — точен;
(b) если $P^\bullet$ — проективная резольвента для X, а $0 \to Y_1 \to Y_2 \to Y_3 \to 0$ — точная последовательность, то $0 \to P^\bullet \otimes Y_1 \to P^\bullet \otimes Y_2 \to P^\bullet \otimes Y_3 \to 0$ — точная последовательность комплексов;
(c) $\mathrm{Tor}_\bullet^1(X,-)$ — стирающий δ-функтор по второму аргументу.

Из упражнения следует, что $\mathrm{Tor}_i^1(X,Y) \cong \mathrm{Tor}_i^2(X,Y)$, так что мы не будем их различать, а будем писать просто $\mathrm{Tor}_i(X,Y)$.

Упражнение 2.3. Покажите, что в категории Ab выполнено $\mathrm{Tor}_i(X,Y) = 0$ при $i \geqslant 2$. Вычислите $\mathrm{Tor}_i(X,Y)$ для $X,Y = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Часть 3. Когомологии групп

Пусть G — конечная группа, а $G-\mathsf{mod}$ — категория модулей над групповым кольцом $\mathbb{Z}[G]$ (= категория абелевых групп с линейным действием группы G = категория аддитивных функторов из $*_G$ в Ab). Ясно, что в этой категории достаточно проективных и инъективных объектов.

Рассмотрим функторы инвариантов и коинвариантов $G-\mathsf{mod} \to \mathsf{Ab}$,

$$M \mapsto M^G := \{\, m \in M \mid gm = m \ \forall g \in G \,\}, \qquad M \mapsto M^G := M/\langle m - gm \rangle_{m\in M,\ g\in G}.$$

Легко видеть, что функтор инвариантов точен слева, а коинвариантов — справа. Их производные функторы называются когомологиями и гомологиями группы G с коэффициентами в G-модуле M соответственно

$$H^i(G, M) = R^i(-^G)(M), \qquad H_i(G, M) = L_i(-_G)(M).$$

Упражнение 3.1. Покажите, что $H^i(G, M) \cong \mathrm{Ext}^i(\mathbb{Z}, M)$, $H_i(G, M) = \mathrm{Tor}_i(\mathbb{Z}, M)$, где $\mathbb{Z}$ — тривиальный G-модуль.

Упражнение 3.2. Покажите, что если G — циклическая группа, то $H^{i+2}(G, M) \cong H^i(G, M)$, $H_{i+2}(G, M) \cong H_i(G, M)$ при $i \geqslant 1$ (постройте для $\mathbb{Z}$ периодическую проективную резольвенту).

Часть 4. Ацикличные резольвенты

Пусть функтор $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ точен справа. Объект Y называется F-ацикличным, если $L_iF(Y) = 0$ для $i > 0$. Аналогично, объект Y называется F-ацикличным для точного слева функтора F, если $R^iF(Y) = 0$ для $i > 0$.

Упражнение 4.1. Покажите, что для точного справа функтора F все проективные объекты F-ацикличны, а для точного слева функтора F все инъективные объекты F-ацикличны.

Лемма 4.2. *Если F точен справа, то ядро эпиморфизма F-ацикличных объектов F-ациклично.*

Доказательство. Следует из длинной точной последовательности производных функторов. □

Лемма 4.3. *Если F точен справа, а $Y^\bullet$ — ограниченный сверху ацикличный комплекс, сотоящий из F-ацикличных объектов, то комплекс $F(Y^\bullet)$-ацикличен.*

Доказательство. Пусть $Z^i = \mathrm{Ker}(d^i : Y^i \to Y^{i+1})$. Тогда морфизм d^i раскладывается в композицию $Y^i \twoheadrightarrow Z^{i+1} \hookrightarrow Y^{i+1}$, причем каждая из последовательностей $0 \to Z^i \to Y^i \to Z^{i+1} \to 0$ точна. Убывающей индукцией по i легко проверить, что все Z^i являются F-ацикличными. Поэтому для каждого i последовательность $0 \to F(Z^i) \to F(Y^i) \to F(Z^{i+1}) \to 0$ точна. Но $f(d^i)$ раскладывается в композицию $F(Y^i) \to F(Z^{i+1}) \to F(Y^{i+1})$, значит комплекс $F(Y^\bullet)$-ацикличен. □

Теорема 4.4. *Если $Y^\bullet \cong X$ — ограниченная справа F-ацикличная резольвента, то $L_iF(X) \cong H^{-i}(F(Y^\bullet))$.*

Доказательство. Выберем для $Y^\bullet$ проективную резольвенту $P^\bullet$. Тогда $P^\bullet$ также является проективной резольвентой для X. Пусть $f : P^\bullet \to Y^\bullet$ — квазиизоморфизм. Получаем треугольник $P^\bullet \to Y^\bullet \to C(f)$. Из длинной точной последовательности когомологий следует, что $C(f)$ ацикличен. Кроме того, он ограничен сверху (поскольку и $Y^\bullet$ и $P^\bullet$ ограничены сверху), и состоит из F-ацикличных объектов, так как каждый его член — это сумма Y^i и P^{i+1}. Значит по предыдущей лемме $F(C(f))$ ацикличен. Но $F(C(f)) \cong C(F(f))$, значит $F(f) : F(P^\bullet) \to F(Y^\bullet)$ — квазиизоморфизм, то есть $H^{-i}(F(Y^\bullet)) \cong H^{-i}(F(P^\bullet)) =: L_iF(X)$. □

Упражнение 4.5. Покажите, что если Y ацикличен для функторов $\mathrm{Hom}(-, X)$ для всех X, то он проективен (аналогично, если Y ацикличен для функторов $\mathrm{Hom}(X, -)$ для всех X, то он инъективен).

R-модуль M называется плоским, если он ацикличен для функторов $- \otimes_R N$ для всех N.

Упражнение 4.6. Покажите, что (a) всякий проективный модуль плоский, поэтому плоских модулей достаточно много; (b) для вычисления функторов Tor можно использовать плоские резольвенты.

Для нетерова коммутативного кольца R можно проверить, что конечно порожденный модуль M плоский $\iff$ он проективен. Однако бывают не проективные, но плоские бесконечномерные модули.

Часть 5. Функторы между категориями пучков

Пусть X — топологическое пространство, а $\mathcal{A} = \mathsf{Sh}(X)$ — категория пучков абелевых групп на X. Пусть также $\mathsf{PreSh}(X)$ — категория предпучков абелевых групп на X. По определению, $\mathsf{Sh}(X)$ — строго полная подкатегория в $\mathsf{PreSh}(X)$. Обозначим через $i : \mathsf{Sh}(X) \to \mathsf{PreSh}(X)$ — функтор вложения. Хорошо известно, что он обладает левым сопряженным функтором $a : \mathsf{PreSh}(X) \to \mathsf{Sh}(X)$ (функтором пучковизации). Функтор a точен, а функтор i точен слева!

Лемма 5.1. *В категории пучков достаточно много инъективных объектов.*

Доказательство. Выберем для каждой точки $x \in X$ абелеву группу G_x и рассмотрим топологическое пространство $\tilde{G} = \sqcup_{x\in X} G_x$ с дискретной топологией. Пусть $\pi : \tilde{G} \to X$ — естественная проекция. Рассмотрим его пучок сечений, то есть предпучок $\mathcal{G}$ на X, такой что $\mathcal{G}(U) = \{ s : X \to \pi^{-1}(U) \subset \tilde{G} \mid \pi \circ s = \mathrm{id}_U \}$. Легко видеть, что он на самом деле пучок. Пучки такого вида называются **пучками разрывных сечений**.

Пусть теперь $\mathcal{F}$ — произвольный пучок на X. Для каждой точки $x \in X$ обозначим через $\mathcal{F}_x = \varinjlim_{x\in U} \mathcal{F}(U)$ — его слой в точке x. Заметим, что $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \prod_{x\in X} \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_x, G_x)$. В самом деле, если $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, то для каждой точки $x \in X$ композиция $\mathcal{F}_x \xrightarrow{\phi_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{\mathrm{ev}_x} G_x$ задает морфизм $\mathcal{F}_x \to G_x$. Обратно, если $\{ \phi_x \}_{x\in X}$ — набор морфизмов $\mathcal{F}_x \to G_x$ положим $\phi(s)(x) = \phi_x(s_x)$, где $s \in \mathcal{F}(U)$, $x \in U$, и s_x — образ s в $\mathcal{F}_x$. Легко видеть, что ϕ — морфизм пучков. Более того, легко видеть, что построенные отображения между $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ и $\prod_{x\in X} \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_x, G_x)$ — взаимно обратные изоморфизмы.

Из доказанного сразу следует, что если каждая из групп G_x инъективна, то и пучок $\mathcal{G}$ инъективен. Поэтому, чтобы вложить пучок $\mathcal{F}$ в инъективный пучок, достаточно для каждой точки $x \in X$ найти вложение группы $\mathcal{F}_x$ в инъективную абелеву группу G_x. □

Упражнение 5.2. Покажите, что (a) последовательность пучков точна $\iff$ она точна послойна;
(b) слои предпучка совпадают со слоями его пучковизации.

Рассмотрим функтор глобальных сечений $\Gamma(X, -) : \mathsf{Sh}(X) \to \mathsf{Ab}$. Легко видеть, что он точен слева (в этом состоит определение пучка). Поскольку в категории пучков достаточно много инъективных объектов, он обладает правым производным функтором, который называется функтором когомологий X с коэффициентами в пучке:

$$H^i(X, \mathcal{F}) = R^i\Gamma(X, \mathcal{F}).$$

В частном случае, когда $\mathcal{F}$ — постоянный пучок (пучковизация постоянного предпучка), построенный по группе A, пишут $H^i(X, \mathcal{F}) = H^i(X, A)$. Для вычисления когомологий гораздо удобнее использовать ацикличные резольвенты вместо инъективных.

Пусть X паракомпактно (то есть отделимо и у каждого открытого покрытия есть локально конечное подпокрытие). Пучок $\mathcal{F}$ называется

- **вялым**, если $\forall$ открытого $U \subset X$ отображение ограничения $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(U)$ сюръективно;
- **мягким**, если $\forall$ замкнутого $Y \subset X$ отображение $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y) := \varinjlim_{Y\subset U} \mathcal{F}(U)$ сюръективно;
- **тонким**, если $\forall$ замкнутых $Y_1, Y_2 \subset X$, таких что $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$ существует автоморфизм ϕ пучка $\mathcal{F}$, такой что $\phi_{|Y_1} = \mathrm{id}$, $\phi_{|Y_2} = 0$.

Упражнение 5.3. Покажите, что (a) вялые, мягкие и тонкие пучки Γ-ацикличны; (b) пучки гладких сечений гладких расслоений мягкие; (c) пучки непрерывных сечений непрерывных расслоений мягкие.

Из пункта (b) следует, что пучок гладких дифференциальных форм Ω^i_X на X мягкий, поэтому комплекс де Рама $\Omega^\bullet_X$ является мягкой (а значит ацикличной) резольвентой постоянного пучка $\mathbb{R}$. Отсюда сразу следует

Теорема 5.4 (теорема де Рама). *Существует изоморфизм $H^i(X, \mathbb{R}) \cong H^i(\Gamma(X, \Omega^\bullet_X))$.*

Часть 6. Прямой и обратный образ

Пусть $f : X \to Y$ морфизм топологических пространств, $\mathcal{F}$ — пучок на X, а $\mathcal{G}$ — пучок на Y. Определим пучок $f_*\mathcal{F}$ на Y и пучок $f^{-1}\mathcal{G}$ на X формулами

$$f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U)), \qquad f^{-1}\mathcal{G} = a(U \mapsto \varinjlim_{f(U)\subset V} \mathcal{G}(V)).$$

Лемма 6.1. *Функтор $f^{-1} : \mathsf{Sh}(Y) \to \mathsf{Sh}(X)$ сопряжен слева к функтору $f_* : \mathsf{Sh}(X) \to \mathsf{Sh}(Y)$. Функтор f^{-1} точен, а функтор f_* точен слева.*

Доказательство. Обозначим предпучок $U \mapsto \varinjlim_{f(U)\subset V} \mathcal{G}(V)$ через $f'\mathcal{G}$. Пусть $\phi : f^{-1}\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ — морфизм пучков. В частности, ϕ дает морфизм $f^{-1}\mathcal{G}(f^{-1}(U)) \to \mathcal{F}(f^{-1}(U))$. Компонируя его с морфизмом из предпучка $f'\mathcal{G}$ в его пучковизацию $f^{-1}\mathcal{G}$, получаем морфизм $\mathcal{G}(U) = f'\mathcal{G}(f^{-1}(U)) \to \mathcal{F}(f^{-1}(U)) = f_*\mathcal{F}(U)$, что дает нам морфизм $\mathcal{G} \to f_*\mathcal{F}$.

Обратно, пусть $\psi : \mathcal{G} \to f_*\mathcal{F}$ — морфизм пучков. Для каждой пары $U \subset X$, $V \subset Y$ такой, что $f(U) \subset V$, получаем морфизм $\mathcal{G}(V) \to f_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \to \mathcal{F}(U)$. Переходя к пределу по V получаем морфизм предпучков $f'\mathcal{G} \to \mathcal{F}$, который по определению пучковизации пропускается через $a(f'\mathcal{G}) = f^{-1}\mathcal{G}$.

Построенные отображения очевидно взаимно обратны, что доказывает сопряженность функторов. Далее, функтор f_* будучи правым сопряженным точен слева, а f^{-1} аналогично точен справа. Поэтому надо проверить лишь то, что f^{-1} точен слева, то есть сохраняет мономорфизмы. Для этого достаточно заметить, что $(f^{-1}\mathcal{G})_x = \varinjlim_{x\in U\subset f^{-1}(V)} \mathcal{G}(V) = \mathcal{G}_{f(y)}$ и что морфизм пучков мономорфизм $\iff$ он мономорфизм на слоях. $\square$

Упражнение 6.2. Покажите, что функтор f_* переводит инъективные пучки в инъективные.

Упражнение 6.3. Пусть X_d — множество точек X с дискретной топологией, а $\xi : X_d \to X$ — морфизм, тождественный на точках. Покажите, что (a) $\mathsf{Sh}(X_d) \cong \mathsf{Fun}_{\mathsf{add}}(X, \mathsf{Ab})$, где X рассматривается как дискретная категория (не имеющая морфизмов кроме тождественных); (b) $\mathrm{Inj}(\mathsf{Sh}(X_d)) = \mathsf{Fun}_{\mathsf{add}}(X, \mathrm{Inj}(\mathsf{Ab}))$; (c) пучок разрывных сечений пучка $\mathcal{F}$ совпадает с $\xi_*\xi{-}1\mathcal{F}$.

Упражнение 6.4. Определим пучок $f_!\mathcal{F}$ равенством $f_!\mathcal{F}(U) = \{\, s \in \mathcal{F}(f^{-1}(U)) \mid \mathrm{supp}(s) \text{ собственен над } U \,\}$. Покажите, что функтор $f_!$ сопряжен слева к f^{-1}.

Пусть $\{\, U_i \,\}_{i\in I}$ — открытое покрытие X. Выберем на I полный порядок и для каждого набора индексов $\{\, i_0 < i_1 < \dots < i_n \,\} \in I$ рассмотрим подмножество $U_{i_0,\dots,i_n} = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_n}$ и пучок $\mathcal{F}_{i_0,\dots,i_n} = j_*j^{-1}\mathcal{F}$, где $j : U_{i_0,\dots,i_n} \to X$ — вложение. Для каждого $i_k < i < i_{k+1}$ пусть $i : U_{i_0,\dots,i_k,i,i_{k+1},\dots,i_n} \to U_{i_0,\dots,i_n}$ — вложение. Рассмотрим естественное отображение $\mathcal{F}_{i_0,\dots,i_n} = j_*j^{-1}\mathcal{F} \to j_*i_*i^{-1}j^{-1}\mathcal{F}$, индуцированное сопряженностью i_* и i^{-1}. Положим

$$C^n(\{\, U_i \,\}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0<i_1<\dots<i_n} \mathcal{F}_{i_0,\dots,i_n}$$

и определим отображение $\delta : C^n(\{\, U_i \,\}, \mathcal{F}) \to C^{n+1}(\{\, U_i \,\}, \mathcal{F})$ формулой

$$\alpha = (\alpha_{i_0,\dots,i_n}) \mapsto (\delta\alpha)_{i_0,\dots,i_{n+1}} := \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \alpha_{i_0,\dots,\hat{i}_k,\dots,i_n},$$

где в правой части неявно используются построенный выше отображения. Легко видеть, что $C^\bullet(\{\, U_i \,\}, \mathcal{F})$ — комплекс. Он называется **комплексом Чеха** пучка $\mathcal{F}$.

Упражнение 6.5. Покажите, что (a) комплекс Чеха является резольвентой пучка $\mathcal{F}$; (b) если все множества $U_{i_0,\dots,i_n}$ стягиваемы, то резольвента Чеха — Г-ациклична.

Часть 7. Функторы между категориями когерентных пучков

Пусть X — **схема**, то есть локально окольцованное топологическое пространство локально изоморфное **аффинной схеме**, то есть спектру некоторого коммутативного кольца. Пучок колец на X обозначается $\mathcal{O}_X$. Пучок $\mathcal{F}$ на X называется **пучком $\mathcal{O}_X$-модулей**, если на каждой группе $\mathcal{F}(U)$ задана структура модуля над кольцом $\mathcal{O}_X(U)$, так что отображения ограничения являются гомоморфизмами модулей. Пучок $\mathcal{O}_X$-модулей называется **квазикогерентным**, если $\mathcal{F}(U) \cong \mathcal{F}(V) \otimes_{\mathcal{O}_X(V)} \mathcal{O}_X(U)$ для всех достаточно маленьких $U \subset V \subset X$, и **когерентным**, если он квазикогерентен и $\mathcal{F}(U)$ конечно порожден над $\mathcal{O}_X(U)$ для всех достаточно маленьких U. Категории $\mathsf{QCoh}(X)$ квазикогерентных и $\mathsf{Coh}(X)$ когерентных пучков являются связующим звеном между алгеброй и геометрией.

Лемма 7.1. *Если $X = \operatorname{Spec} A$ — аффинная схема, то функтор $\Gamma(X, -) : \mathsf{QCoh}(X) \to A-\mathsf{Mod}$ — точная эквивалентность категорий, отождествляющая $\mathsf{Coh}(X)$ с $A-\mathsf{mod}$.*

Мы не будем приводить доказательства этой леммы, а также других результатов, которые можно отнести к основаниям алгебраической геометрии. Вместо этого мы приведем краткое определение основных алгебро-геометрических функторов и перечислим их основные свойства.

В алгебро-геометрической ситуации можно определить как чисто алгебраические функторы (типа Ext и Tor), так и геометрические (глобальные сечения, прямые и обратные образы). Начнем с алгебраических.

Функторы Hom и Ext. Как и во всякой абелевой категории на категории квазикогерентных пучков определен функтор Hom. Хотя проективных объектов в этой категории практически нет, но инъективных объектов достаточно много (к тому же можно вместо инъективных квазикогерентных пучков использовать инъективные пучки $\mathcal{O}_X$-модулей), поэтому определены и функторы Ext.

Функторы $\mathcal{H}om$ и $\mathcal{E}xt$. Можно также определить локальные аналоги функторов Hom и Ext. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ квазикогрентные пучки, а $U \subset X$ — аффинное открытое подмножество. Тогда $\mathcal{F}(U)$ и $\mathcal{G}(U)$ — $\mathcal{O}_X(U)$-модули. При этом группа $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{F}(U), \mathcal{G}(U))$ тоже обладает естественной структурой $\mathcal{O}_X(U)$-модуля (так как $\mathcal{O}_X(U)$ коммутативно). Можно убедиться, что эти структуры согласованы для разных U, то есть эти модули склеиваются в квазикогерентный пучок, который обозначается $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Функтор $\mathcal{H}om$ точен слева по каждому аргументу.

Аналогично, модули $\operatorname{Ext}^i_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{F}(U), \mathcal{G}(U))$ определяют квазикогерентный пучок $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Легко убедиться, что $\mathcal{E}xt^i$ — стирающий δ-функтор по каждому из аргументов, поэтому является правым производным от $\mathcal{H}om$. Для вычисления функторов $\mathcal{E}xt^i$ удобнее всего использовать локально свободные резольвенты первого аргумента (локально свободные пучки очевидно $\mathcal{H}om(-, \mathcal{F})$-ацикличны для любого $\mathcal{F}$).

Функторы $\mathcal{H}om$ и $\mathcal{E}xt$ сохраняют когерентность (если оба аргумента когерентны, то и результат когерентен).

Тензорное произведение и функторы Tor. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ квазикогрентные пучки, а $U \subset X$ — аффинное открытое подмножество. Тогда $\mathcal{F}(U)$ и $\mathcal{G}(U)$ — $\mathcal{O}_X(U)$-модули, значит определен $\mathcal{O}_X(U)$-модуль $\mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$. Можно убедиться, что эти структуры согласованы для разных U, то есть эти модули склеиваются в квазикогерентный пучок, который обозначается $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ или $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$. Функтор $\otimes$ точен справа по каждому аргументу.

Аналогично, модули $\operatorname{Tor}_i^{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{F}(U), \mathcal{G}(U))$ определяют квазикогерентный пучок $\operatorname{Tor}_i(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Легко убедиться, что Tor_i — стирающий δ-функтор по каждому из аргументов, поэтому является левым производным от $\otimes$. Для вычисления функторов Tor_i удобнее всего использовать локально свободные резольвенты любого из аргументов (локально свободные пучки очевидно $\otimes$-ацикличны).

Функторы $\otimes$ и Tor сохраняют когерентность (если оба аргумента когерентны, то и результат когерентен).

Замечание 7.2. Формула $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})(U) \cong \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$ и аналогичные формулы для Tor_i, $\mathcal{H}om$ и $\mathcal{E}xt^i$ верны только для аффинных открытых подмножеств $U \subset X$.

Глобальные сечения. Так как когерентный пучок является пучком абелевых групп, определен функтор $\Gamma(X, -) : \mathsf{QCoh}(X) \to \mathsf{Ab}$. Пусть $R = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Тогда R — коммутативное кольцо, а функтор Γ пропускается через категорию R-модулей. В частности, если X — схема над полем k, то Γ пропускается через категорию k-векторных пространств.

Функтор Γ точен слева и имеет производные функторы $H^i(X, -)$. Для аффинной схемы X функтор Γ точен на категории квазикогерентных пучков, поэтому $H^i(X, -) = 0$ для $i > 0$.

Упражнение 7.3. Покажите, что если функтор F точен, то положив $T_0 = F$, $T_i = 0$ при $i > 0$, получим стирающий δ-функтор, значит $L_i F = 0$ для $i > 0$. Аналогично для правых производных функторов.

На произвольной схеме вычислять когомологии пучков можно, рассматривая инъективные (вялые, мягкие, и т.д.) резольвенты. В частности, можно показать, что если дано аффинное покрытие $\{U_i\}$ схемы X, такое что все $U_{i_0,\dots,i_n}$ тоже аффинны (это заведомо выполнено, если схема X отделима), то комплекс Чеха является Г-ацикличной резольвентой пучка и может быть использован для вычисления когомологий. Отсюда следует, что все $H^i(X,\mathcal{F})$ являются $\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$-модулями.

Упражнение 7.4. Пользуясь резольвентой Чеха, посчитайте когомологии пучков $\mathcal{O}(i)$ на $\mathbb{P}^n$.

При $i > \dim X$ когомологии квазикогерентных пучков обращаются в нуль:

$$H^i(X,\mathcal{F}) = 0 \qquad \text{при } i > \dim X, \text{ если } \mathcal{F} \in \mathsf{QCoh}(X).$$

Прямой образ. Пусть $f : X \to Y$ — морфизм схем (то есть морфизм топологических пространств плюс морфизм пучков колец $f^\# : f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$. Аналогично описанному выше случаю, определен функтор $f_* : \mathsf{QCoh}(X) \to \mathsf{Ab}$. При этом $f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$ является $\mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$-модулем, поэтому морфизм $f^\#$ задает на нем структуру модуля над $f^{-1}\mathcal{O}_Y(f^{-1}(U)) = \mathcal{O}_Y(U)$. Легко проверить, что эти структуры согласованы для разных U, поэтому $f_*\mathcal{F}$ — пучок $\mathcal{O}_Y$-модулей, если $\mathcal{F} \in \mathsf{QCoh}(X)$. Более того, можно проверить, что $f_*\mathcal{F}$ квазикогерентен, так что прямой образ дает функтор $f_* : \mathsf{QCoh}(X) \to \mathsf{QCoh}(Y)$.

Функтор f_* точен слева и имеет производные функторы R^if_*. Если морфизм f аффинный, то функтор f_* точен на категории квазикогерентных пучков, поэтому $R^if_* = 0$ для $i > 0$.

Для произвольного морфизма вычислять прямые образы можно с помощью комплекса Чеха (если дано аффинное покрытие $\{U_i\}$ схемы X, такое что все $U_{i_0,\dots,i_n}$ тоже аффинны , то комплекс Чеха является f_*-ацикличной резольвентой пучка). Отсюда следует, что все $R^if_*\mathcal{F}$ являются квазикогерентными пучками.

Если слои морфизма f имеют размерность не больше n, то

$$R^if_*\mathcal{F} = 0 \qquad \text{при } i > n, \text{ если } \mathcal{F} \in \mathsf{QCoh}(X).$$

Если морфизм f собственный, то (высшие) прямые образы сохраняют когерентность. В частности, если X собственная схема над полем, то когомологии когерентного пучка — конечномерные векторные пространства.

Обратный образ. Пусть $f : X \to Y$ — морфизм схем. Если $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок, то $f^{-1}\mathcal{F}$ не имеет структуры $\mathcal{O}_X$-модуля. Однако, он является $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-модулем, поэтому пользуясь морфизмом $f^\#$ можно получить структуру $\mathcal{O}_X$-модуля на

$$f^*\mathcal{F} := f^{-1}\mathcal{F} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X.$$

Легко видеть, что $f^*\mathcal{F}$ квазикогерентен.

Замечание 7.5. Важно понимать, что функтор обратного образа для когерентных пучков определяется совсем не так, как для пучков абелевых групп. В частности, он обладает совершенно другими свойствами!

Функтор f^* равен композиции точного функтора f^{-1} и точного справа функтора тензорного произведения, поэтому он точен справа. Можно показать, что он имеет производные функторы L_if^*. Если морфизм f плоский (то есть $\mathcal{O}_X$ является плоским $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-модулем), то функтор f^* точен, поэтому $L_if^* = 0$ для $i > 0$.

Аналогично, если $\mathcal{F}$ — плоский $\mathcal{O}_Y$-модуль (например, если $\mathcal{F}$ локально свободен), то $L_if^*\mathcal{F} = 0$. Поэтому для произвольного морфизма вычислять обратные образы можно с помощью локально свободных резольвент. Отсюда следует, что все $L_if^*\mathcal{F}$ являются квазикогерентными пучками.

Обратные образы и их производные функторы сохраняют когерентность.

Между перечисленными функторами есть масса соотношений, которые мы пока не обсуждаем, так как это гораздо удобнее сделать в рамках формализма производных категорий. Ограничимся лишь следующими замечаниями.

Упражнение 7.6. Покажите, что (a) функтор f^* сопряжен слева к f_*; (b) $\otimes$ сопряжен слева к $\mathcal{H}om$.

Упражнение 7.7. Покажите, что если f — открытое вложение, то $f^* = f^{-1}$.