Производные категории

Часть 1. Локализация категорий

Определение производной категории очень просто. Производная категория абелевой категории $\mathcal{A}$ — это локализация категории комплексов $\mathrm{Com}(\mathcal{A})$ относительно класса квазиизоморфизмов. Единственное нетривиальное место здесь — это понятие локализации категории. Как это часто бывает, здесь есть два подхода.

Во-первых, есть формальное определение через универсальное свойство, от которого, на первый взгляд, мало толку. Однако оно часто очень удачно работает. Например, с его помощью легко строить функторы из локализованной категории (в частности из производной категории).

Во-вторых, есть явная (относительно) конструкция локализованной категории, которая по началу сильно облегчает жизнь. Однако, это эффект чисто психологический — явная конструкция при работе с производными категориями практически никогда не используется.

Начнем с формального определения. Для всякой категории $\mathcal{C}$ обозначим через $\mathrm{Iso}(\mathcal{C})$ класс всех изоморфизмов в $\mathcal{C}$. Пусть теперь $\mathcal{C}$ — категория, а S — какой-либо класс морфизмов в $\mathcal{C}$. Локализацией категории $\mathcal{C}$ относительно класса S называется пара, состоящая из категории $\mathcal{C}[S^{-1}]$ и функтора $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[S^{-1}]$, такие что

(1) $Q(S) \subset \mathrm{Iso}(\mathcal{C}[S^{-1}])$;
(2) для любого функтора $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, такого что $F(S) \subset \mathrm{Iso}(\mathcal{C}')$ существует единственный с точностью до изоморфизма функтор $F' : \mathcal{C}[S^{-1}] \to \mathcal{C}'$, такой что $F' \circ Q \cong F$.

Лемма 1.1. *Если локализация $\mathcal{C}[S^{-1}]$ существует, то она определена однозначно с точностью до эквивалентности категорий.*

Доказательство. Пусть $Q_1 : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_1$ и $Q_2 : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_2$ — две локализации категории $\mathcal{C}$ относительно одного и того же класса морфизмов S. Так как $Q_1(S) \subset \mathrm{Iso}(\mathcal{C}_1)$ и $Q_2(S) \subset \mathrm{Iso}(\mathcal{C}_2)$, по универсальному свойству получаем функторы $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ и $G : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1$, такие что $F \circ Q_1 \cong Q_2$ и $G \circ Q_2 \cong Q_1$. Следовательно, $G \circ F \circ Q_1 \cong Q_1$, поэтому в силу единственности функтора в универсальном свойстве, получаем изоморфизм $G \circ F \cong \mathrm{id}_{\mathcal{C}_1}$. Аналогично $F \circ G \cong \mathrm{id}_{\mathcal{C}_2}$. Значит F и G взаимно обратные эквиваллентности. □

Упражнение 1.2. Покажите, что (a) если $S \subset \mathrm{Iso}(\mathcal{C})$, то $\mathcal{C}[S^{-1}] \cong \mathcal{C}$, $Q \cong \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$; (b) если $S = \mathrm{Hom}(\mathcal{C})$, то $\mathcal{C}[S^{-1}] \cong \pi_0(\mathcal{C})$, где $\pi_0(\mathcal{C})$ — это категория, такая что $\mathrm{Ob}(\pi_0(\mathcal{C}))$ — это классы изоморфизма объектов в $\mathcal{C}$, а морфизмы — только тождественные.

Если S — произвольный класс морфизм, обозначим через $\overline{S}$ минимальный класс, содержащий S, $\mathrm{Iso}(\mathcal{C})$, и такой что если $f \circ g = h$ и два из трех морфизмов f, g и h содержатся в S, то содержится и третий. Класс морфизмов S называется насыщеным, если $\overline{S} = S$.

Лемма 1.3. *Если одна из категорий $\mathcal{C}[S^{-1}]$ и $\mathcal{C}[\overline{S}^{-1}]$ существует, то существует и вторая и они эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{C}[S^{-1}]$ существует, $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[S^{-1}]$ функтор локализации, а $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ — функтор, такой что $F(\overline{S}) \subset \mathrm{Iso}(\mathcal{C}')$. Так как $S \subset \overline{S}$, существует единственный функтор $F' : \mathcal{C}[S^{-1}] \to \mathcal{C}'$, такой что $F \cong F' \circ Q$. При этом ясно, что $Q(\overline{S}) \subset \overline{Q(S)} \subset \overline{\mathrm{Iso}} = \mathrm{Iso}$. Поэтому $\mathcal{C}[S^{-1}]$ является локализацией $\mathcal{C}$ в $\overline{S}$.

Обратно, пусть $\mathcal{C}[\overline{S}^{-1}]$ существует, $\overline{Q} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[\overline{S}^{-1}]$ функтор локализации, а $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ — функтор, такой что $F(S) \subset \mathrm{Iso}(\mathcal{C}')$. Тогда $F(\overline{S}) \subset \overline{F(S)} \subset \overline{\mathrm{Iso}} = \mathrm{Iso}$, поэтому существует единственный функтор $F' : \mathcal{C}[\overline{S}^{-1}] \to \mathcal{C}'$, такой что $F \cong F' \circ \overline{Q}$. При этом $\overline{Q}(S) \subset \overline{Q}(\overline{S}) \subset \mathrm{Iso}$. Поэтому $\mathcal{C}[\overline{S}^{-1}]$ является локализацией $\mathcal{C}$ в S. □

Упражнение 1.4. Покажите, что если $S \subset T$, то $\mathcal{C}[T^{-1}] \cong \mathcal{C}[S^{-1}][Q_S(T)^{-1}]$.

Часть 2. Исчисление частных

Явно категория $\mathcal{C}[S^{-1}]$ строится с помощью "исчисления частных". Для удобства будем считать класс S насыщенным. Пусть $X, Y \in \mathcal{C}$. Рассмотрим диаграммы

$$\begin{tikzcd} & Z & \\ X \arrow[ur, "f"] & & Y \arrow[ul, "s"'] \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} X & & Y \\ & Z \arrow[ul, "s"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

в которых $s \in S$, а f — произвольный морфизм. Первую из этих диаграмм будем называть **левой S-дробью** и обозначать $s^{-1} \circ f$, а вторую — **правой S-дробью** и обозначать $f \circ s^{-1}$. При этом f будем называть числителем дроби, а s — знаменателем.

Кроме того, рассмотрим диаграммы вида

$$\begin{tikzcd} & Z_1 & & Z_2 & & \cdots & & Z_{n-1} & & Z_n & \\ X \arrow[ur, "f_1"] & & W_1 \arrow[ul, "s_1"'] \arrow[ur, "f_2"] & & \arrow[ul, "s_2"'] & \cdots & \arrow[ur, "f_{n-1}"] & & W_{n-1} \arrow[ul, "s_{n-1}"'] \arrow[ur, "f_n"] & & Y \arrow[ul, "s_n"'] \end{tikzcd}$$

в которых $s_i \in S$, а f_i — произвольные морфизмы. Такие диаграммы будем называть **сложными S-дробями**. Две сложные дроби будем называть элементарно эквивалентными, если одна из них получается

- добавлением в цепочку морфизмов фрагмента $s^{-1} \circ s$ или $s \circ s^{-1}$ для некоторого $s \in S$;
- заменой фрагмента $g \circ \mathrm{id}^{-1} \circ f$ на $(g \circ f)$;
- заменой фрагмента $s^{-1} \circ \mathrm{id} \circ t^{-1}$ на $(t \circ s)^{-1}$;

и просто эквивалентными, если их можно соединить цепочкой элементарных эквивалентностей.

Можно определить категорию $\mathcal{C}[S^{-1}]$ следующим образом. Объекты в $\mathcal{C}[S^{-1}]$ — это объекты в $\mathcal{C}$, морфизмы из X в Y— классы эквивалентности сложных дробей, начинающиеся в X и кончающиеся в Y, а композиция морфизмов — присоединение сложных дробей (она очевидно согласована с отношением эквивалентности). При этом левая дробь $\mathrm{id}^{-1} \circ \mathrm{id}$ очевидно является тождественным морфизмом. Единственная сложность — вообще говоря, морфизмы в этой категории не будут образовывать множество, а будут образовывать лишь класс. Чтобы бороться с этой проблемой, приходится вводить ограничения на категорию $\mathcal{C}$. Например, можно ограничиться рассмотрением лишь малых категорий $\mathcal{C}$. Действительно, если категория $\mathcal{C}$ малая, то все сложные дроби образуют множество.

Лемма 2.1. *Если $\mathcal{C}$ — малая категория, то определенная выше категория $\mathcal{C}[S^{-1}]$ является локализацией категории $\mathcal{C}$ относительно S.*

Доказательство. Покажем, что построенная категория в самом деле является локализацией. Определим функтор $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[S^{-1}]$, являющийся тождественным на объектах и переводящим морфизм f в левую дробь $\mathrm{id}^{-1} \circ f$. Так как $\mathrm{id}^{-1} \circ g \circ \mathrm{id}^{-1} \circ f \sim \mathrm{id}^{-1} \circ (g \circ f)$ это действительно функтор. Пусть теперь $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ — функтор, такой что $F(S) \subset \mathrm{Iso}(\mathcal{C}')$. Определим функтор $F' : \mathcal{C}[S^{-1}] \to \mathcal{C}'$ таким образом. На объектах F' совпадает с F, а дробь $s_n^{-1} \circ f_n \circ \cdots \circ s_1^{-1} \circ f_1$ переводит в морфизм $F(s_n)^{-1} \circ F(f_n) \circ \cdots \circ F(s_1)^{-1} \circ F(f_1)$. Легко видеть, что эквивалентные дроби переходят в один и тот же морфизм, и что композиция морфизмов переходит в композицию. Поэтому это функтор. Единственность такого функтора тоже ясна. $\square$

Чтобы сокращать сложные дроби, надо уметь переносить знаменатели справа налево или слева направо.

Лемма 2.2. *Предположим композиции морфизмов $W_1 \xrightarrow{s_1} Z_1 \xrightarrow{g} Z$ и $W_1 \xrightarrow{f_2} Z_2 \xrightarrow{t} Z$ равны, причем $s_1, t \in S$. Тогда $s_2^{-1} \circ f_2 \circ s_1^{-1} \circ f_1 \sim (t \circ s_2)^{-1} \circ (g \circ f_1)$.*

Доказательство. В самом деле,

$$\begin{aligned} s_2^{-1} \circ f_2 \circ s_1^{-1} \circ f_1 &\sim s_2^{-1} \circ \mathrm{id} \circ \mathrm{id}^{-1} \circ f_2 \circ s_1^{-1} \circ f_1 \sim s_2^{-1} \circ \mathrm{id} \circ t^{-1} \circ t \circ \mathrm{id}^{-1} \circ f_2 \circ s_1^{-1} \circ f_1 \sim \\ &\sim (ts_2)^{-1} \circ (tf_2) \circ s_1^{-1} \circ f_1 = (ts_2)^{-1} \circ (gs_1) \circ s_1^{-1} \circ f_1 \sim (ts_2)^{-1} \circ g \circ \mathrm{id}^{-1} \circ s_1 \circ s_1^{-1} \circ f_1 \sim \\ &\sim (ts_2)^{-1} \circ g \circ \mathrm{id}^{-1} \circ f_1 \sim (ts_2)^{-1} \circ (gf_1). \end{aligned}$$

$\square$

Лемма 2.3. *Если $\mathcal{C}$ имеет нулевой объект $0_{\mathcal{C}}$, то он же является нулевым объектом в $\mathcal{C}[S^{-1}]$.*

Доказательство. Заметим вначале, что всякая левая дробь $0 \xrightarrow{0} Z \xleftarrow{s} X$ эквивалентна дроби $0 \xrightarrow{0} X \xleftarrow{\mathrm{id}} X$. В самом деле $s^{-1} \circ 0 \sim s^{-1} \circ s \circ \mathrm{id}^{-1} \circ 0 \sim \mathrm{id}^{-1} \circ 0$. При этом, композицию последней дроби с любой другой можно свернуть $s^{-1} \circ f \circ \mathrm{id}^{-1} \circ 0 \sim (\mathrm{id}\, s)^{-1} \circ (f0) = s^{-1} \circ 0$. Пользуясь этими двумя замечаниями легко показать, что $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}(0, Y)$ состоит из одного элемента, то есть 0 является начальным объектом.

Аналогично, всякая левая дробь $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{0} 0$ эквивалентна дроби $X \xrightarrow{0} 0 \xleftarrow{0} 0$. В самом деле $0^{-1} \circ f \sim 0^{-1} \circ 0 \circ 0^{-1} \circ f \sim 0^{-1} \circ 0$ (во второй эквивалентности использовалось равенство $0 = \mathrm{id} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(0,0)$). При этом, по той же причине композицию последней дроби с любой другой можно свернуть $0^{-1} \circ 0 \circ s^{-1} \circ f \sim 0^{-1} \circ f$. Таким образом, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}(X, 0)$ состоит из одного элемента, то есть 0 является конечным объектом. □

Часть 3. Условия Оре

Однако, указанная конструкция имеет большие недостатки. Во-первых, множество сложных дробей имеет непростую структуру и его сложно описать. Во-вторых, если, например, исходная категория $\mathcal{C}$ аддитивна, совершенно непонятно, будет ли аддитивной категория $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Обе эти проблемы исчезают, если множество S удовлетворяет следующим свойствам, которые иногда называются (левые) условия Оре:

(1) класс S насыщен;
(2) для всякой правой S-дроби $g \circ t^{-1}$ найдется левая S-дробь $s^{-1} \circ f : X \to Y$, так что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & Z & \\
X \arrow[ur, "f"] & & Y \arrow[ul, "s"'] \\
 & W \arrow[ul, "t"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

коммутативна;
(3) если для морфизмов f, g найдется $s \in S$, такой что $fs = gs$, то найдется и $t \in S$, так что $tf = tg$.

Замечание 3.1. Вместо условий (2) и (3) можно использовать правые условия Оре, в которых левые дроби меняются с правыми ролями.

Лемма 3.2. *Если класс S удовлетворяет левым условиям Оре, то $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}(X, Y)$ есть фактор множества левых S-дробей из X в Y по отношению эквивалентности: $s^{-1} \circ f \approx (ts)^{-1} \circ (tf)$, где $t \in S$.*

Доказательство. Всякую левую дробь можно рассматривать как сложную. Так как

$$s^{-1} \circ f \sim s^{-1} \circ \mathrm{id} \circ \mathrm{id}^{-1} \circ f \sim s^{-1} \circ \mathrm{id} \circ t^{-1} \circ t \circ \mathrm{id}^{-1} \circ f \sim (ts)^{-1} \circ (tf),$$

эквивалентным левым дробям соответствуют эквивалентные сложные дроби, значит мы получаем корректно определенное отображение из множества классов эквивалентности левых дробей в классы эквивалентности сложных дробей.

Построим обратное отображение. Пусть $s_n^{-1} \circ f_n \circ \cdots \circ s_1^{-1} \circ f_1$ — сложная дробь. Пользуясь условием Оре (2), для каждой правой дроби $f_i \circ s_{i-1}^{-1}$ найдем подходящую левую дробь $s_{i-1,i}^{-1} \circ f_{i-1,i}$. Затем для каждой правой дроби $f_{i,i+1} \circ s_{i-1,i}^{-1}$ найдем подходящую левую дробь $s_{i-1,i+1}^{-1} \circ f_{i-1,i+1}$, и т.д. В результате получим коммутативную диаграмму вида

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & Z_{15} & & & & & \\
 & & & & Z_{14} \arrow[ur, "f_{15}"] & & Z_{25} \arrow[ul, "s_{15}"'] & & & & \\
 & & & Z_{13} \arrow[ur, "f_{14}"] & & Z_{24} \arrow[ul, "s_{14}"'] \arrow[ur, "f_{25}"] & & Z_{35} \arrow[ul, "s_{25}"'] & & & \\
 & & Z_{12} \arrow[ur, "f_{13}"] & & Z_{23} \arrow[ul, "s_{13}"'] \arrow[ur, "f_{24}"] & & Z_{34} \arrow[ul, "s_{24}"'] \arrow[ur, "f_{35}"] & & Z_{45} \arrow[ul, "s_{35}"'] & & \\
 & Z_1 \arrow[ur, "f_{12}"] & & Z_2 \arrow[ul, "s_{12}"'] \arrow[ur, "f_{23}"] & & Z_3 \arrow[ul, "s_{23}"'] \arrow[ur, "f_{34}"] & & Z_4 \arrow[ul, "s_{34}"'] \arrow[ur, "f_{45}"] & & Z_5 \arrow[ul, "s_{45}"'] & \\
X \arrow[ur, "f_1"] & & W_1 \arrow[ul, "s_1"'] \arrow[ur, "f_2"] & & W_2 \arrow[ul, "s_2"'] \arrow[ur, "f_3"] & & W_3 \arrow[ul, "s_3"'] \arrow[ur, "f_4"] & & W_4 \arrow[ul, "s_4"'] \arrow[ur, "f_5"] & & Y \arrow[ul, "s_5"']
\end{tikzcd}$$

Положим $f = f_{1n} \circ f_{1,n-1} \circ \dots \circ f_{12} \circ f_1$ и $s = s_{1n} \circ s_{2n} \circ \dots \circ s_{n-1,n} \circ s_n$. Покажем, что левая дробь $s^{-1} \circ f$ определена исходной сложной дробью однозначно с точностью до эквивалентности (то есть меняется на эквивалентную при другом выборе морфизмов s_{ij}, f_{ij} и замене исходной дроби на эквивалентную). В самом деле, поменяем например левую дробь $s_{12}^{-1} \circ f_{12}$ на $t_{12}^{-1} \circ g_{12}$ (так что $f_{12}s_1 = s_{12}f_2$ и $g_{12}s_1 = t_{12}f_2$). Рассмотрим правую дробь $s_{12} \circ t_{12}^{-1}$ и найдем для нее подходящую левую дробь $u^{-1} \circ v$. Тогда $vt_{12} = us_{12}$, причем $u \in S$. В силу насыщенности S получаем также $v \in S$. Теперь $vg_{12}s_1 = vt_{12}f_2 = us_{12}f_2 = uf_{12}s_1$. Пользуясь условием Оре (3), находим $w \in S$, такой что $wvg_{12} = wuf_{12}$. Значит

$$(s_{12}s_2)^{-1} \circ (f_{12}f_1) \approx (wus_{12}s_2)^{-1} \circ (wuf_{12}f_1) = (wvt_{12}s_2)^{-1} \circ (wvg_{12}f_1) \approx (t_{12}s_2)^{-1} \circ (g_{12}f_1).$$

Остается проверить, что результат нашей операции не зависит (с точностью до эквивалентности) от замены одной из левых дробей на эквивалентную. В самом деле, пусть мы меняем $s_i^{-1} \circ f_i$ на $(t_is_i)^{-1} \circ (t_if_i)$. Найдем для правых дробей $t_i \circ s_{i-1,i}^{-1}$ и $f_{i,i+1} \circ t_i^{-1}$ подходящие левые дроби $u^{-1} \circ t_{i-1,i}$ и $t_{i,i+1}^{-1} \circ g$. Как и раньше доказываем $t_{i-1,i} \in S$. Теперь меняем левые дроби $s_{i-1,i}^{-1} \circ f_{i-1,i}$ и $s_{i,i+1}^{-1} \circ f_{i,i+1}$ на $(t_{i-1,i}s_{i-1,i})^{-1} \circ (t_{i-1,i}f_{i-1,i})$ и $(t_{i,i+1}s_{i,i+1}^{-1}) \circ (t_{i,i+1}f_{i,i+1})$ соответственно. Продолжая тем же способом, заменим всю диаграмму, в результате чего будет видно, что результат операции будет заменен на эквивалентную левую дробь. Следовательно, наша операция корректно определена и остается лишь проверить, что она действительно обратная, то есть что композиции тождественны.

Случай одной из композиций очевиден. Если мы берем левую дробь, рассматриваем ее как сложную, то диаграмма тривиальна, и результат — исходная левая дробь. Поэтому остается заметить, что в силу леммы 2.2 левая дробь, построенная по сложной дроби, эквивалентна ей как сложная дробь. □

Другой способ доказать лемму — проверить свойство универсальности.

Упражнение 3.3. Положим $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}' = \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y)$ — фактор множества левых S-дробей из X в Y по отношению эквивалентности $\sim$. (a) Введите операцию композиции. (b) Проверьте ее ассоциативность. (c) Покажите, что категория $\mathcal{C}'$ удовлетворяет универсальному свойству локализации.

Пользуясь условиями Оре можно приводить дроби к общему знаменателю, что позволяет их складывать.

Лемма 3.4. *Пусть категория $\mathcal{C}$ аддитивна, а для S выполнены условия Оре. Тогда категория $\mathcal{C}[S^{-1}]$ и функтор $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[S^{-1}]$ аддитивны.*

Доказательство. Введем операцию сложения на $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}(X, Y)$ следующим образом. Пусть $s^{-1} \circ f$ и $t^{-1} \circ g$ — две левых дроби из X в Y. Рассмотрим правую дробь $s \circ t^{-1}$ и найдем для нее подходящую левую дробь $u^{-1} \circ v$. Тогда $w := vt = us$, причем $u \in S$. В силу насыщенности S получаем также $v \in S$. Положим

$$s^{-1} \circ f + t^{-1} \circ g := w^{-1} \circ (uf + vg).$$

Упражнение 3.5. Покажите, что (a) построенная операция задает структуру абелевой группы; (b) операция композиции морфизмов билинейна; (c) функтор $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[S^{-1}]$ линеен на морфизмах.

Остается проверить, что существуют произведения. Для любых объектов $Y_1, Y_2 \in Y$ рассмотрим проекции $p_k : Y_1 \times Y_2 \to Y_k$ и вложения $i_k : Y_k \to Y_1 \times Y_2$. Тогда $p_ki_l = \delta_{kl}$, $i_1p_1 + i_2p_2 = \mathrm{id}$. Так как Q линеен на морфизмах, все те же соотношения выполняются и в $\mathcal{C}[S^{-1}]$, откуда следует, что $Y_1 \times Y_2$ является произведением (а также и копроизведением) объектов Y_1 и Y_2 в $\mathcal{C}[S^{-1}]$. □

Таким образом, при локализации категории по классу морфизмов, удовлетворяющему условиям Оре, аддитивность категории сохраняется. Естественно спросить, сохраняется ли абелевость. Ответ оказывается почти всегда отрицательным. Однако, в дальнейшем мы покажем, что при локализации сохранятся другое важное свойство категории — триангулированность — которое является неплохой заменой абелевости. Пока же вернемся к определению производной категории.

Часть 4. Производная категория как локализация гомотопической

Итак, напомним, что производная категория $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ абелевой категории $\mathcal{A}$ — это локализация категории комплексов $\mathrm{Com}(\mathcal{A})$ относительно класса квазиизоморфизмов Qis:

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) := \mathrm{Com}(\mathcal{A})[\mathrm{Qis}^{-1}].$$

Упражнение 4.1. Покажите, что класс Qis насыщен.

Однако, класс Qis в категории комплексов не удовлетворяет условиям Оре. Поэтому напрямую воспользоваться результатами предыдущей части невозможно. Однако, все становится значительно лучше, если перейти к гомотопической категории.

Гомотопическая категория комплексов $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$ определяется следующим образом:

$$\mathrm{Ob}\,\mathrm{Hot}(\mathcal{A}) = \mathrm{Ob}\,\mathrm{Com}(\mathcal{A}), \qquad \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hot}(\mathcal{A})}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Com}(\mathcal{A})}(X,Y)/\sim_h,$$

где $\sim_h$ — гомотопическая эквивалентность.

Упражнение 4.2. Покажите, что морфизмы гомотопные нулю образуют идеал (то есть набор абелевых подгрупп в морфизмах, инвариантный относительно композиции с произвольными морфизмами). В частности, на $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$ существует структура категории, такая что естественный отображение $H : \mathrm{Com}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Hot}(\mathcal{A})$ (тождественный на объектах и проекция на морфизмах) является функтором. Проверьте, что категория $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$ и функтор H аддитивны.

Лемма 4.3. *Функтор локализации $Q : \mathrm{Com}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{A})$ раскладывается в композицию $Q = Q' \circ H$, где $Q' : \mathrm{Hot}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(A)$. Более того, существует эквивалентность*

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) \cong \mathrm{Hot}(\mathcal{A})[H(\mathrm{Qis})^{-1}],$$

такая что Q' изоморфен функтору локализации $Q_H : \mathrm{Hot}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Hot}(\mathcal{A})[H(\mathrm{Qis})^{-1}]$.

Доказательство. Естественный функтор $Q_H \circ H : \mathrm{Com}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Hot}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Hot}(\mathcal{A})[H(\mathrm{Qis})^{-1}]$ переводит квазиизоморфизмы в изоморфизмы, и, значит пропускается через функтор $F : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Hot}(\mathcal{A})[H(\mathrm{Qis})^{-1}]$. Для построения обратного функтора покажем, что функтор локализации $Q : \mathrm{Com}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{A})$ переводит морфизмы, гомотопные нулю в нуль. В самом деле, пусть $f : X \to Y$ и $f \sim_h 0$. Рассмотрим конус $C(\mathrm{id}_X)$. Заметим, что морфизм

$$c^k = (f^k, h^{k+1}) : C(\mathrm{id}_X)^k = X^k \oplus X^{k+1} \to Y^k$$

является морфизмом комплексов $c : C(\mathrm{id}_X) \to Y$, причем $f = c \circ i : X \to C(\mathrm{id}_X) \to Y$. Значит $Q(f) = Q(c)Q(i)$. С другой стороны, комплекс $C(\mathrm{id}_X)$ ацикличен, то есть квазиизоморфен нулевому, а значит $Q(C(\mathrm{id}_X)) \cong 0$ в $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Таким образом, морфизм $Q(f)$ пропускается через нулевой объект, и значит равен нулю. Следовательно, функтор Q раскладывается в композицию $Q' \circ H$. При этом $Q'(H(\mathrm{Qis})) = Q(\mathrm{Qis}) \subset \mathrm{Iso}$, поэтому Q' раскладывается в композицию $Q' = G \circ Q_H$. Получаем коммутативную диаграмму функторов

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Com}(\mathcal{A}) \arrow[rr, "H"] \arrow[d, "Q"'] & & \mathrm{Hot}(\mathcal{A}) \arrow[d, "Q_H"] \arrow[dll, "Q'"'] \\
\mathrm{Com}(\mathcal{A})[\mathrm{Qis}]^{-1} \arrow[rr, shift left, "F"] & & \mathrm{Hot}(\mathcal{A})[H(\mathrm{Qis})^{-1}] \arrow[ll, shift left, "G"]
\end{tikzcd}$$

Покажем, что F и G квазиобратны. В самом деле, $G \circ F \circ Q = G \circ Q_H \circ H = Q' \circ H = Q$, поэтому в силу универсальности, получаем $G \circ F \cong \mathrm{id}$. Аналогично, $F \circ G \circ Q_H = F \circ Q' = Q_H$, откуда $F \circ G \cong \mathrm{id}$. □

Лемма 4.4. *В гомотопической категории $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$ класс квазиизоморфизмов удовлетворяет и левым и правым условиям Оре.*

Доказательство. Проверим левые условия Оре. Насыщенность класса квазиизоморфизмов очевидна. Докажем свойство (2). Пусть, $g : W \to Y$, $t : W \to X$ — морфизмы в $\mathrm{Com}(\mathcal{A})$ (любые морфизмы в $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$ по определению поднимаются), причем $t \in \mathrm{Qis}$. Рассмотрим морфизм $\phi = t \oplus g : W \to X \oplus Y$ и положим $Z = C(\phi)$. Получим морфизм $i_\phi : X \oplus Y \to Z$, такой что $i_\phi \circ \phi \sim_h 0$ в силу следующего упражнения.

Упражнение 4.5. Пусть $f : X \to Y$ — морфизм комплексов, а $i : Y \to C(f)$ и $p : C(f) \to X[1]$ — естественные морфизмы. Покажите, что $i \circ f \sim_h 0$ и $f[1] \circ p \sim_h 0$.

Пусть $i_\phi = f \oplus s$, где $f : X \to Z$ и $s : Y \to Z$. Тогда $i_\phi \circ \phi = f \circ t + s \circ g \sim_h 0$, откуда $(-f) \circ t \sim_h s \circ g$. Остается проверить, что s — квазиизоморфизм. Для этого напишем точную последовательность когомологий

$$\cdots \to H^{k-1}(Z) \to H^k(W) \overset{H^k(\phi)}{\to} H^k(X) \oplus H^k(Y) \overset{H^k(i_\phi)}{\to} H^k(Z) \to H^{k+1}(W) \to \ldots$$

Так как $\phi = t \oplus g$, а t — квазиизоморфизм, морфизм $H^k(W) \to H^k(X) \oplus H^k(Y)$ инъективен, значит морфизмы $H^k(Z) \to H^{k+1}(W)$ равны нулю, то есть длинная точная последовательность разрезается на точные тройки

$$0 \to H^k(W) \stackrel{H^k(\phi)}{\to} H^k(X) \oplus H^k(Y) \stackrel{H^k(i_\phi)}{\to} H^k(Z) \to 0.$$

Отсюда следует, что квадрат

$$\begin{tikzcd} H^k(W) \arrow[r, "H^k(t)"] \arrow[d, "H^k(g)"'] & H^k(X) \arrow[d, "-H^k(f)"] \\ H^k(Y) \arrow[r, "H^k(s)"] & H^k(Z) \end{tikzcd}$$

декартов и кодекартов, поэтому из того, что $H^k(t)$ изоморфизм следует, что $H^k(s)$ также изоморфизм.

Остается проверить свойство (3). В силу аддитивности достаточно показать, что если для $f : X \to Y$ найдется $s : Z \to X$, $s \in \mathrm{Qis}$, такой что $fs \sim_h 0$, то найдется и $t : Y \to W$, $t \in \mathrm{Qis}$, такой что $tf = 0$. Рассмотрим конус $C(s)$ и морфизм $i : X \to C(s)$. Пусть h — гомотопия для морфизма fs, так что $fs = dh + hd$. Рассмотрим морфизм $g^k = (f^k, h^{k+1}) : C(s)^k = X^k \oplus Z^{k+1} \to Y^k$. Тогда

$$gd_{C(s)} = (f,h)\left(\begin{smallmatrix} d & s \\ 0 & -d \end{smallmatrix}\right) = (fd, fs - hd) = (df, dh) = d(f,h) = d_Y g, \qquad gi_f = (f,h)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = f,$$

значит g — морфизм комплексов и $g \circ i_f = f$. Пусть теперь $W = C(g)$ и $t = i_g : X \to W$. Тогда $tf = i_g g i_f \sim_h 0$ так как $i_g g \sim_h 0$. С другой стороны, $C(s)$ ацикличен, так как s квазиизоморфизм, поэтому из длинной точной последовательности для $C(g)$ следует, что t квазиизоморфизм. $\square$

Следствие 4.6. *Производная категория $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ аддитивна.*

В определении производной категории можно заменить категорию комплексов $\mathrm{Com}(\mathcal{A})$ на любую из следующих подкатегорий:

- $\mathrm{Com}^b(\mathcal{A})$ — категорию ограниченных комплексов;
- $\mathrm{Com}^+(\mathcal{A})$ — категорию ограниченных снизу комплексов;
- $\mathrm{Com}^-(\mathcal{A})$ — категорию ограниченных сверху комплексов.

Поскольку взятие конуса сохраняет свойство ограниченности, все наши рассуждения применимы и в этой ситуации. Следовательно, определены ограниченные производные категории $\mathcal{D}^b(\mathcal{A}) = \mathrm{Com}^b(\mathcal{A})[\mathrm{Qis}^{-1}]$, $\mathcal{D}^+(\mathcal{A}) = \mathrm{Com}^+(\mathcal{A})[\mathrm{Qis}^{-1}]$ и $\mathcal{D}^-(\mathcal{A}) = \mathrm{Com}^-(\mathcal{A})[\mathrm{Qis}^{-1}]$, которые также являются локализациями ограниченных гомотопических категорий $\mathrm{Hot}^b(\mathcal{A})$, $\mathrm{Hot}^+(\mathcal{A})$ и $\mathrm{Hot}^-(\mathcal{A})$, и в частности аддитивны.

Еще один вариант — рассмотреть категорию n-периодических комплексов (и n-периодических морфизмов). Она даст n-периодическую производную категорию.