Триангулированные категории

Часть 1. Аксиомы

Триангулированная категория — это аддитивная категория $\mathcal{T}$ со следующими структурами

- автоэквивалентностью, которая традиционно обозначается $[1] : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$, $X \mapsto X[1]$;
- классом последовательностей вида $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$;

(автоэквивалентность называется **функтором сдвига**, а последовательности — **выделенными треугольниками**), удовлетворяющие следующим аксиомам

TR1: (1) для всякого объекта X треугольник $0 \to X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X \to 0[1]$ выделен;
(2) всякий треугольник изоморфный выделенному выделен;
(3) всякий морфизм $u : X \to Y$ можно дополнить до выделенного треугольника;

TR2: треугольник $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ выделен $\Longleftrightarrow$ треугольник $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1]$ выделен;

TR3: если трекгольники $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ и $X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} X'[1]$ выделены, а $f : X \to X'$ и $g : Y \to Y'$ — морфизмы, такие что $gu = u'f$, то существует морфизм $h : Z \to Z'$, такой что $hv = v'g$ и $f[1]w = w'h$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "h"'] & X[1] \arrow[d, "f[1]"'] \\
X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & X'[1]
\end{tikzcd}$$

TR4: если $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ и $Y \xrightarrow{f} Y' \xrightarrow{g} W \xrightarrow{h} Y[1]$ — выделенные тругольники, то существует коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "p"'] & X[1] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"'] \\
X \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "g"'] & Z' \arrow[r, "w'"] \arrow[d, "q"'] & X[1] \arrow[d, "u[1]"'] \\
 & W \arrow[r, "\mathrm{id}_W"] \arrow[d, "h"'] & W \arrow[r, "h"] \arrow[d, "r"'] & Y[1] \\
 & Y[1] \arrow[r, "v[1]"] & Z[1] &
\end{tikzcd}$$

в которой две верхние строки и два средних столбца — выделенные треугольники.

Последняя из аксом обычно называется **аксиомой октаэдра**, поскольку соответствующую диаграмму можно переписать в виде октаэдра, который сверху и снизу выглядит следующим образом:

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, squiggly, "w"'] & \\
X \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "u'"'] \arrow[ur, phantom, "\star"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[u, "v"'] \arrow[d, "f"] \arrow[ur, phantom, "\square"] \arrow[dr, phantom, "\star"] & W \arrow[ul, squiggly, "r"'] \arrow[l, squiggly, "h"'] \\
 & Y' \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, squiggly, "w"'] \arrow[d, "p"] & \\
X \arrow[dr, "u'"'] \arrow[ur, phantom, "\square"] \arrow[dr, phantom, "\star"] & Z' \arrow[l, squiggly, "w'"'] \arrow[r, "q"] \arrow[ur, phantom, "\star"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & W \arrow[ul, squiggly, "r"'] \\
 & Y' \arrow[u, "v'"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Здесь волнистые стрелки изображают морфизмы в объект сдвинутый на единицу, треугольники помеченные квадратом коммутативны, а звездой — выделены.

Пример 1.1. Введем на категории $\mathsf{k-mod}$ векторных пространств триангулированную структуру следующим образом. Положим $[1] = \mathrm{id}$, а выделенными треугольниками будем называть треугольники вида $U \oplus V \to V \oplus W \to W \oplus U \to U \oplus V$, где каждый морфизм является композицией проекции на второе слагаемое и вложением первого.

Упражнение 1.2. Проверьте триангулированность этой категории.

Упражнение 1.3. Проверьте, что если $\mathcal{T}$ триангулирована, то $\mathcal{T}^\circ$ тоже триангулирована.

Часть 2. Свойства

По определению функтор сдвига является эквивалентностью, значит существует квазиобратный к нему функтор $[-1] : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$, так что $X[1][-1] \cong X \cong X[-1][1]$. Гораздо удобнее считать функтор сдвига автоморфизмом, а функтор $[-1]$ обратным к нему. Этого всегда можно добиться, заменив категорию на эквивалентную.

Упражнение 2.1. Докажите, что существует категория $\mathcal{T}'$, автоморфизм $[1] : \mathcal{T}' \to \mathcal{T}'$ и эквивалентность $\Phi : \mathcal{T}' \to \mathcal{T}$, такие что $\Phi \circ [1] \cong [1] \circ \Phi$. (Указание: $\mathrm{Ob}\,\mathcal{T}' = \{ (X_i, \phi_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mid X_i \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{T},\ \phi_i : X_i[1] \xrightarrow{\cong} X_{i+1} \}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}'}((X_i, \phi_i), (Y_i, \psi_i)) = \{ (f_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X_i, Y_i)) \mid f_{i+1} \circ \phi_i = \psi_i \circ f_i[1] \}$, $(X_i, \phi_i)[1] := (X_{i+1}, \phi_{i+1})$, $\Phi(X_i, \phi_i) := X_0$, $\Phi(f_i) := f_0$.) Проверьте, что если $\mathcal{T}$ триангулирована, то и $\mathcal{T}'$ триангулирована.

В дальнейшем для упрощения формул мы будем считать функтор сдвига автоморфизмом. Пользуясь функтором сдвига и аксиомой (TR2) всякий выделенный треугольник можно продолжить до бесконечной в обе стороны последовательности

$$\dots \xrightarrow{w[-2]} X[-1] \xrightarrow{-u[-1]} Y[-1] \xrightarrow{-v[-1]} Z[-1] \xrightarrow{-w[-1]} X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1] \xrightarrow{-v[1]} Z[1] \xrightarrow{-w[1]} X[2] \xrightarrow{u[2]} \dots,$$

в которой любой четырехэлементный сегмент является выделенным треугольником. Такая последовательность называется **спиралью**, а входящие в нее треугольники — **витками**.

Предложение 2.2. *Пусть $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ — выделенный тругольник. Тогда для любого объекта $U \in \mathcal{T}$ последовательности*

$$\dots \to \mathrm{Hom}(U, X[i]) \xrightarrow{u_*[i]} \mathrm{Hom}(U, Y[i]) \xrightarrow{v_*[i]} \mathrm{Hom}(U, Z[i]) \xrightarrow{w_*[i]} \mathrm{Hom}(U, X[i+1]) \xrightarrow{u_*[i+1]} \mathrm{Hom}(U, Y[i+1]) \to \dots,$$

$$\dots \to \mathrm{Hom}(Z[i], U) \xrightarrow{v^*[i]} \mathrm{Hom}(Y[i], U) \xrightarrow{u^*[i]} \mathrm{Hom}(X[i], U) \xrightarrow{w^*[i-1]} \mathrm{Hom}(Z[i-1], U) \xrightarrow{v^*[i-1]} \mathrm{Hom}(Y[i-1], U) \to \dots$$

точны.

Доказательство. Для первой последовательности достаточно проверить точность в члене $\mathrm{Hom}(U, Y)$. Пусть $g = u_*(f) : U \to Y$, где $f : U \to X$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\mathrm{id}_U"] \arrow[d, "f"'] & U \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & 0 \arrow[r] & U[1] \arrow[d, "f[1]"'] \\ X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & X[1] \end{tikzcd}$$

Верхняя строчка — выделенный треугольник по (TR1) и (TR2), а квадрат коммутативен. Значит, по (TR3) она дополняется морфизмом $h : 0 \to Z$ до коммутативной диаграммы. Следовательно, $v_*(g) = vg = h0 = 0$.

Пусть теперь $v_*(g) = 0$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & U[1] \arrow[r, "-\mathrm{id}_U"] & U[1] \arrow[d, "g[1]"'] \\ Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & X[1] \arrow[r, "-u[1]"] & X[1] \end{tikzcd}$$

Верхняя и нижняя строчки выделены по (TR1) и (TR2), а квадрат коммутативен. Значит, по (TR3) она дополняется морфизмом $f' : U[1] \to X[1]$ до коммутативной диаграммы. Следовательно, $-g[1] = -u[1] \circ f[1]$, откуда $g = uf = u_*(f)$. Точность второй последовательности проверяется аналогично. $\square$

Следствие 2.3. *Если морфизмы f и g в аксиоме (TR3) изоморфизмы, то h тоже изоморфизм.*

Доказательство. Возьмем произвольный объект U и рассмотрим диаграмму точных последовательностей, полученных из двух выделенных треугольников

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(U,X) \arrow[r, "u_*"] \arrow[d, "f_*"'] & \mathrm{Hom}(U,Y) \arrow[r, "v_*"] \arrow[d, "g_*"'] & \mathrm{Hom}(U,Z) \arrow[r, "w_*"] \arrow[d, "h_*"'] & \mathrm{Hom}(U,X[1]) \arrow[r, "u_*[1]"] \arrow[d, "f[1]_*"'] & \mathrm{Hom}(U,Y[1]) \arrow[d, "g[1]_*"'] \\
\mathrm{Hom}(U,X') \arrow[r, "u'_*"] & \mathrm{Hom}(U,Y') \arrow[r, "v'_*"] & \mathrm{Hom}(U,Z') \arrow[r, "w'_*"] & \mathrm{Hom}(U,X'[1]) \arrow[r, "u'_*[1]"] & \mathrm{Hom}(U,Y'[1])
\end{tikzcd}$$

Она очевидно коммутативна, причем стрелки f_*, g_* $f[1]_*$ и $g[1]_*$ изоморфизмы. Значит по лемме о пяти гомоморфизмах морфизм h_* тоже изоморфизм. Значит $h_* : h_Z \to h_{Z'}$ — изоморфизм, откуда $h : Z \to Z'$ тоже изоморфизм. $\square$

Упражнение 2.4. Покажите, что в выделенном треугольнике $vu = 0$, $wv = 0$ и $u[1]w = 0$.

Следствие 2.5. *Выделенный треугольник, дополняющий по аксиоме (TR1) морфизм $u : X \to Y$, определен однозначно с точностью до изоморфизма.*

Следствие 2.6. *Пусть трекгольники $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ и $X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} X'[1]$ выделены, а $g : Y \to Y'$ — морфизм, такой что $v'gu = 0$. Тогда существует морфизмы $f : X \to X'$ и $h : Z \to Z'$, задающие морфизм треугольников. Если при это $\mathrm{Hom}(X, Z'[-1]) = 0$, то такой морфизм треугольников — единственный.*

Доказательство. Рассмотрим морфизм $gu : X \to Y'$. Тогда по условию $v'_*(gu) = v'gu = 0$, значит найдется $f : X \to X'$, такой что $gu = u'_*(f) = u'f$. Теперь пользуясь аксиомой (TR3) получаем морфизм h.

Пусть теперь $\mathrm{Hom}(X, Z'[-1]) = 0$. В силу точности последовательности, морфизм f, такой что $u'_*(f) = gu$ определен однозначно с точностью до $w'[-1]_*(\mathrm{Hom}(X, Z'[-1])) = 0$, то есть однозначно. Аналогично, для морфизма h имеем $v^*(h) = v'g$, поэтому h определен однозначно с точностью до $w'^*(\mathrm{Hom}(X[1], Z')) = 0$, то есть однозначно. $\square$

Второй частью этого следствия мы будем очень часто пользоваться в дальнейшем!

Часть 3. Триангулированность гомотопической категории

Рассмотрим гомотопическую категорию $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$ абелевой категории $\mathcal{A}$. Рассмотрим функтор сдвига $[1] : \mathrm{Hot}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Hot}(\mathcal{A})$, индуцированный сдвигом комплексов. Назовем треугольник в $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$ выделенным, если он изоморфен в $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$ треугольнику вида $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{i_u} C(u) \xrightarrow{p_u} X[1]$.

Наша цель — доказать триангулированность гомотопической категории. Начнем с леммы.

Лемма 3.1. *Пусть $0 \to X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \to 0$ — почленно расщепимая точная тройка комплексов, а $s^n : Z^n \to Y^n$ и $p^n : Y^n \to X^n$ — набор расщепляющих морфизмов. Положим $w^n = -p^{n+1} \circ d_Y^n \circ s^n : Z^n \to X^{n+1}$. Тогда треугольник $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ выделен в $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$.*

Доказательство. Заметим, что

$$uw = -upd_Y s = (sv - \mathrm{id}_Y)d_Y s = svd_Y s - d_Y s = sd_Z vs - d_Y s = sd_Z - d_Y s,$$

$$wv = -pd_Y sv = -pd_Y(\mathrm{id}_Y - up) = -pd_Y + pd_Y up = -pd_Y + pud_X p = -pd_Y + d_X p.$$

Отсюда следует, что

$$ud_X w = d_Y uw = d_Y(sd_Z - d_Y s) = d_Y sd_Z = (sd_Z - uw)d_Z = -uwd_Z,$$

и так как u вложение, w — морфизм комплексов $Z \to X[1]$. Рассмотрим теперь морфизмы $f^n : Z^n \to C(u)^n$ и $g^n : C(u)^n \to Z^n$, заданные формулами

$$f^n = \left(\begin{smallmatrix} s^n \\ w^n \end{smallmatrix}\right), \qquad g^n = (v^n, 0)$$

Тогда

$$d_C f - fd_Z = \left(\begin{smallmatrix} d_Y s + uw - sd_Z \\ -d_X w - wd_Z \end{smallmatrix}\right) = 0, \qquad gd_C - d_Z g = (vd_Z - d_Z v, vu) = 0,$$

значит f и g — морфизмы комплексов. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, equal] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, shift right, "f"'] & X[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "i_u"] & C(u) \arrow[r, "p_u"] \arrow[u, shift right, "g"'] & X[1]
\end{tikzcd}$$

Легко видеть, что

$$i_u - fv = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_Y - sv \\ -wv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} up \\ pd_Y - d_X p \end{pmatrix} = d_C \begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix} d_Y,$$

так что $fv \sim_h i_u$. Аналогично,

$$wg - p_u = (wv, -\mathrm{id}_X) = (-pd_Y + d_X p, -\mathrm{id}_X) = (p,0)d_C + d_{X[1]}(p,0),$$

так что $wg \sim_h p_u$. При этом очевидно, что $p_u f = w$ и $gi_u = v$, поэтому отображения вверх и вниз являются морфизмами треугольников. Остается заметить, что $gf = vs = \mathrm{id}_Z$, в то время как

$$\mathrm{id}_C - fg = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_Y - sv & 0 \\ -wv & \mathrm{id}_X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} up & , & 0 \\ pd_Y - d_X p & , & \mathrm{id}_X \end{pmatrix} = d_C \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p & 0 \end{pmatrix} d_C,$$

то есть $fg \sim_h \mathrm{id}_C$. □

Теорема 3.2. *Гомотопическая категория триангулирована. Более того, всякий выделенный треугольник в* $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$ *изоморфен треугольнику, получающемуся из почленно расщепимой точной тройки комплексов.*

Доказательство. Ясно, что $C(0 \to X) = X$, поэтому (TR1.1) верно. При этом (TR1.2) и (TR1.3) сразу следуют из определения.

Теперь проверим (TR2). Пусть первый треугольник изоморфен треугольнику $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{i_u} C(u) \xrightarrow{p_u} X[1]$. Тогда второй изоморфен треугольнику $Y \xrightarrow{i_u} C(u) \xrightarrow{p_u} X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1]$. Но заметим, что последовательность комплексов $0 \to Y \xrightarrow{i_u} C(u) \xrightarrow{p_u} X[1] \to 0$ точна и почленно расщепима, поэтому достаточно заметить, что морфизм w, построенный в лемме совпадает с $-u[1]$.

Пусть теперь второй треугольник выделен. Применяя дважды предыдущее рассуждение, получаем, что треугольник $X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1] \xrightarrow{-v[1]} Z[1] \xrightarrow{-w[1]} X[2]$ тоже выделен. Но множество выделенных треугольников очевидно инвариантно относительно функтора сдвига, скомпонированного с заменой знака на морфизмах.

Заметим, что приведенные выше рассуждения уже доказывают вторую часть теоремы.

Теперь проверим аксиому (TR3). Достаточно рассмотреть случай, когда первый треугольник имеет вид $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{i_u} C(u) \xrightarrow{p_u} X[1]$, а второй — $X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{i_{u'}} C(u') \xrightarrow{p_{u'}} X'[1]$. Пусть $f : X \to X'$ и $g : Y \to Y'$ — такие морфизмы, что квадрат коммутативен в $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$, то есть $gu - u'f = dh + hd$. Рассмотрим тогда отображение $C(u)^n = Y^n \oplus X^{n+1} \to Y'^n \oplus X'^{n+1} = C(u')^n$, заданное матрицей

$$c(h) = \begin{pmatrix} g & h \\ 0 & f \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что

$$d_{C(u')}c(h) - c(h)d_{C(u)} = \begin{pmatrix} dg - gd & , & dh + hd + u'f - gu \\ 0 & , & fd - df \end{pmatrix} = 0,$$

значит $c(h)$ — морфизм комплексов. При этом очевидно $c(h)i_u = i_{u'}g$, $p_{u'}c(h) = f[1]p_u$, так что $c(h)$ дает искомый морфизм треугольников.

Наконец, проверим аксиому (TR4). Ввиду сказанного выше достаточно рассмотреть случай, когда оба треугольника получаются из почленно расщепимых троек комплексов. Иными словами, имеем

$$Y'^n = X^n \oplus Z^n \oplus W^n, \qquad d_{Y'} = \begin{pmatrix} d_X & x & y \\ 0 & d_Z & z \\ 0 & 0 & d_W \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $F_{[i,j]}$ подфактор комплекса Y' натянутый на слагаемые с номерами от i до j, так что $Y' = F_{[0,2]}$. Получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & F_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & F_{[0,1]} \arrow[r] \arrow[d] & F_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_0 \arrow[r] & F_{[0,2]} \arrow[r] \arrow[d] & F_{[1,2]} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & F_2 \arrow[r, equal] \arrow[d] & F_2 \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

с точными строками и столбцами. Простое вычисление показывает, что морфизмы, достраивающие строки и столбцы до выделенных треугольников, имеют вид

$$x : F_1 \to F_0[1], \qquad (x, y) : F_{[1,2]} \to F_0[1], \qquad \left(\begin{smallmatrix} y \\ z \end{smallmatrix}\right) : F_2 \to F_{[0,1]}[1], \qquad \text{и} \qquad z : F_2 \to F_1[1].$$

Отсюда сразу следует коммутативность двух квадратов в диаграмме октаэдра, а для коммутативности последнего квадрата надо проверить, что морфизмы

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & y \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right) : F_{[1,2]} \to F_{[0,1]}[1] \qquad \text{и} \qquad \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) : F_{[1,2]} \to F_{[0,1]}[1]$$

совпадают, то есть их разность гомотопна нулю. Но

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) d_{F_{[1,2]}} + d_{F_{[0,1]}[1]} \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} d & z \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} d & x \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -x & 0 \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right),$$

что и требовалось. □

Часть 4. Локализация триангулированных категорий

Предположим, $\mathcal{T}$ — триангулированная категория, S — класс морфизмов в $\mathcal{T}$, а $\mathcal{T}[S^{-1}]$ — локализация. Мы уже знаем, что если S удовлетворяет условиям Оре, то категория $\mathcal{T}[S^{-1}]$ аддитивна. Возникает вопрос, является ли она триангулированной.

Скажем, что класс S согласован с триангулированной структурой, если выполняются свойства

(4) $s \in S \iff s[1] \in S$;
(5) если морфизмы f и g в аксиоме (TR3) лежат в S, то морфизм h тоже можно выбрать лежащим в S.

Лемма 4.1. *Пусть $\mathcal{T}$ — триангулированная категория, а класс S удовлетворяет условиям Оре и согласован с триангулированной структурой. Тогда $\mathcal{T}[S^{-1}]$ обладает естественной структурой триангулированной категории.*

Доказательство. По доказанному на прошлой лекции категория $\mathcal{T}$ аддитивна. Поэтому начать надо с описания триангулированной структуры на $\mathcal{T}[S^{-1}]$. Во-первых, определим функтор сдвига. На объектах он будет действовать так же как и в категории $\mathcal{T}$, а левую дробь $s^{-1} \circ f$ переводить в $s[1]^{-1} \circ f[1]$. В силу условия (4) это опять левая дробь, причем такое действие очевидно согласовано с отношением эквивалентности дробей, а композиция левых дробей переходит в композицию. Поэтому получаем корректно определенный эндофунктор категории $\mathcal{T}[S^{-1}]$. Очевидно, что он будет автоэквивалентностью (или даже автоморфизмом, если это выполнялось в $\mathcal{T}$).

Будем считать треугольник в $\mathcal{T}[S^{-1}]$ выделенным, если он изоморфен выделенному треугольнику в $\mathcal{T}$.

Теперь проверим аксиомы. Аксиомы (TR1.1), (TR1.2) и (TR2) очевидны. Проверим (TR1.3). Пусть $s^{-1} \circ f : X \to Y$ — морфизм, где $s : Y \to Y'$, $f : X \to Y'$. Дополним в $\mathcal{T}$ морфизм $f : X \to Y'$ до выделенного треугольника $X \xrightarrow{f} Y' \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X$ и рассмотрим в $\mathcal{T}[S^{-1}]$ коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "s^{-1}\circ f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"'] & Y \arrow[r, "gs"] \arrow[d, "s"'] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\mathrm{id}_Z"'] & X[1] \arrow[d, "\mathrm{id}_{X[1]}"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y' \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "h"] & X[1]
\end{tikzcd}$$

Она является изоморфизмом треугольников, поэтому верхняя строка выделена в $\mathcal{T}[S^{-1}]$.

Теперь проверим (TR3). Можно считать, переходя к изоморфным треугольникам, можно считать, что у нас есть диаграмма

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] & X[1] \arrow[d, "f[1]"] \\
X'' & Y'' & & X''[1] \\
X' \arrow[r, "u'"] \arrow[u, "s"'] & Y' \arrow[r, "v'"] \arrow[u, "t"'] & Z' \arrow[r, "w'"] & X'[1] \arrow[u, "s[1]"']
\end{tikzcd}$$

в которой $s, t \in S$ и $u' \circ s^{-1} \circ f = t^{-1} \circ g \circ u$. Рассмотрим морфизм $t \circ u' \circ s^{-1} : X'' \to Y''$ в $\mathcal{T}[S^{-1}]$. Благодаря условиям Оре его можно переписать виде $r^{-1} \circ u''$, где $u'' : X'' \to Y'''$, $r : Y'' \to Y'''$, $r \in S$. Заметим, что $t^{-1} \circ g \circ u = (rt)^{-1} \circ (rg) \circ u$, при этом $u'' \circ s = (rt) \circ u'$ по построению, откуда в свою очередь следует, что $(rg) \circ u = (rt) \circ t^{-1} \circ g \circ u = (rt) \circ u' \circ s^{-1} \circ f = u'' \circ s \circ s^{-1} \circ f = u'' \circ f$. Поэтому, заменяя Y'' на Y''', g на rg, а t на rt, можно считать, что существует морфизм $u'' : X'' \to Y''$, такой что оба квадрата коммутативны. Достраивая этот морфизм до точного треугольника, получаем диаграмму

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] & X[1] \arrow[d, "f[1]"] \\
X'' \arrow[r, "u''"] & Y'' \arrow[r, "v''"] & Z'' \arrow[r, "w''"] & X''[1] \\
X' \arrow[r, "u'"] \arrow[u, "s"'] & Y' \arrow[r, "v'"] \arrow[u, "t"'] & Z \arrow[r, "w'"] & X'[1] \arrow[u, "s[1]"']
\end{tikzcd}$$

Применяя (TR3) в $\mathcal{T}$ строим морфизмы $h : Z \to Z''$ и $q : Z' \to Z''$, так чтобы получались морфизмы треугольников. В силу свойства (5) можно считать, что $q \in S$. Значит морфизмы $s^{-1} \circ f$, $t^{-1} \circ g$ и $q^{-1} \circ h$ задают морфизм из верхнего треугольника в нижний в категории $\mathcal{T}[S^{-1}]$, что и требовалось.

Остается проверить (TR4). Пусть даны два выделенных в $\mathcal{T}[S^{-1}]$ треугольника с общей вершиной. По определению, каждый из них изоморфен треугольнику, выделенному в $\mathcal{T}$. Пользуясь условиями Оре и теми же рассуждениями, что м в доказательстве (TR1.3), легко показать, что эти треугольники можно заменить на изоморфные им в $\mathcal{T}$ выделенные треугольники с общей вершиной. Теперь применяя (TR4) в $\mathcal{T}$ строим диаграмму октаэдра, которая очевидно дает искомую диаграмму октаэдра $\mathcal{T}[S^{-1}]$. □

Следствие 4.2. *Производная категория триангулирована.*

Доказательство. Достаточно проверить, что класс квазиизоморфизмов в $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$ удовлетворяет условиям (4) и (5). Условие (4) очевидно, так как $H^i(s[1]) = H^{i+1}(s)$. Для условия (5) очевидно достаточно проверить, что если один из морфизмов f или g тождественный, а второй — казиизоморфизм, то можно выбрать h квазиизоморфизмом. Пусть $f = \mathrm{id}_X$. Достроим треугольник $X \to Y \to Z \to X[1]$ и морфизм $g : Y \to Y'$ до диаграмм октаэдра. Заметим, что в ней вторая строка изоморфна второму из наших треугольников, поэтому достаточно проверить, что $p : Z \to Z'$ квазиизоморфизм. Но так как g квазиизоморфизм, W ацикличен, поэтому p — квазиизоморфизм.

Пусть теперь $g = \mathrm{id}_Y$. Достроим морфизм $f : X \to X'$ до выделенного треугольника $X \to X' \to X'' \to X[1]$, после чего этот треугольник и треугольник $X' \to Y' \to Z' \to X'[1]$ достроим до диаграммы октаэдра. Заметим, что вторая строка в ней изоморфна первому из исходных треугольников, поэтому надо проверить что морфизм $Z \to Z'$ в возникающем треугольнике $X'' \to Z \to Z' \to X''[1]$ является квазиизоморфизмом. Но это очевидно, так как X'' ацикличен поскольку $f : X \to X'$ квазиизоморфизм. $\square$

Легко видеть, что ограниченные варианты производной категории, так же как и ограниченные варианты гомотопической категории триангулированы.