Триангулированные подкатегории и факторкатегории

Часть 1. Точные функторы

Пусть $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}'$ — триангулированные категории. Аддитивный функтор $F : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ называется точным, если

- существует изоморфизм функторов $\theta : F \circ [1] \to [1] \circ F$;
- F переводит выделенные треугольники в выделенные, то есть для всякого выделенного треугольника $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ в $\mathcal{T}$ треугольник $F(X) \xrightarrow{F(u)} F(Y) \xrightarrow{F(v)} F(Z) \xrightarrow{\theta_X \circ F(w)} F(X)[1]$ выделен в $\mathcal{T}'$.

Более правильно было бы называть точным функтором пару (F, θ).

Легко видеть, что тождественный функтор, функтор сдвига (и все его степени) являются точными. Другой пример точного функтора такой.

Лемма 1.1. *Если $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — аддитивный функтор между абелевыми категориями, то он индуцирует точный функтор $F : \mathrm{Hot}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Hot}(\mathcal{B})$.*

Доказательство. Почленно применяя функтор F к комплексам, получаем функтор $\mathrm{Com}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Com}(\mathcal{B})$. Ясно, что он переводит гомотопные морфизмы в гомотопные, поэтому индуцирует функтор между гомотопическими категориями, который коммутирует с функтором сдвига. Кроме того, ясно, что он переводит конус морфизма в конус морфизма, и значит точен. $\square$

Обозначим категорию точных функторов между триангулированными категориями $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}'$ через $\mathsf{Fun}_{\mathsf{ex}}(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$.

Лемма 1.2. *Пусть $F : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ — точный функтор. Если функтор $G : \mathcal{T}' \to \mathcal{T}$ сопряжен к F, то он также точен.*

Доказательство. Пусть например G сопряжен к F справа. Вначале проверим первое свойство. Пусть $X \in \mathcal{T}$, $Y \in \mathcal{T}'$. Тогда имеем цепочку функториальных изоморфизмов

$$\mathrm{Hom}(X, G(Y[1])) \cong \mathrm{Hom}(F(X), Y[1]) \cong \mathrm{Hom}(F(X)[-1], Y) \cong \\ \cong \mathrm{Hom}(F(X[-1]), Y) \cong \mathrm{Hom}(X[-1], G(Y)) \cong \mathrm{Hom}(X, G(Y)[1])$$

(первый и четвертый изоморфизмы — сопряженность функторов, второй и пятый очевидны, а третий — коммутирование F со сдвигом). По лемме Ионеды получаем изоморфизм $G(Y[1]) \cong G(Y)[1]$, очевидно функториальный. Остается проверить второе свойство. Пусть $X \to Y \to Z \to X[1]$ — выделенный треугольник в $\mathcal{T}'$. Рассмотрим треугольник $G(X) \to G(Y) \to G(Z) \to G(X)[1]$, полученный применением функтора G с использованием изоморфизма $G(X[1]) \cong G(X)[1]$, построенного выше. Дополним также морфизм $G(X) \to G(Y)$ до выделенного треугольника $G(X) \to G(Y) \to W \to G(X)[1]$. Остается проверить, что эти треугольники изоморфны, то есть построить изоморфизм $W \to G(Z)$, такой что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
G(X) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & G(Y) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & W \arrow[r] \arrow[d, dashed] & G(X)[1] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \\
G(X) \arrow[r] & G(Y) \arrow[r] & G(Z) \arrow[r] & G(X)[1]
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Для этого рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
F(G(X)) \arrow[r] \arrow[d, "\eta"'] & F(G(Y)) \arrow[r] \arrow[d, "\eta"'] & F(W) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & F(G(X))[1] \arrow[d, "\eta"'] \\
X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & X[1]
\end{tikzcd}$$

где $\eta : F \circ G \to \mathrm{id}$ — морфизм сопряжения. По аксиоме (TR3) существует морфизм $F(W) \to Z$, делающий диаграмму коммутативной. Рассмотрим соответствующий ему морфизм $W \to G(Z)$. Легко видеть, что он также делает диаграмму коммутативной. Остается проверить, что он изоморфизм. Для этого возьмем произвольный объект $U \in \mathcal{T}$ и рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(U,G(X)) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \mathrm{Hom}(U,G(Y)) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \mathrm{Hom}(U,W) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(U,G(X)[1]) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \mathrm{Hom}(U,G(Y)[1]) \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \\
\mathrm{Hom}(U,G(X)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(U,G(Y)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(U,G(Z)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(U,G(X)[1]) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(U,G(Y)[1])
\end{tikzcd}$$

Ее верхняя строка точна так как треугольник $G(X) \to G(Y) \to W \to G(X)[1]$ выделен, а нижняя точна так как она по сопряженности изоморфна строке

$$\mathrm{Hom}(F(U),X) \to \mathrm{Hom}(F(U),Y) \to \mathrm{Hom}(F(U),Z) \to \mathrm{Hom}(F(U),X[1]) \to \mathrm{Hom}(F(U),Y[1]),$$

получающейся из выделенного треугольника $X \to Y \to Z \to X[1]$. По лемме о пяти гомоморфизмах заключаем, что $\mathrm{Hom}(U,W) \to \mathrm{Hom}(U,G(Z))$ — изоморфизм, значит $W \to G(Z)$ — изоморфизм. $\square$

Часть 2. Триангулированные подкатегории

Пусть $\mathcal{T}$ — триангулированные категория. Подкатегория $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ называется **триангулированной подкатегорией**, если на $\mathcal{S}$ существует структура триангулированной категории, такая что функтор вложения точен.

Лемма 2.1. *Пусть $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ — строго полная подкатегория (то есть со всяким объектом содержит все изоморфные ему в $\mathcal{T}$ объекты). Тогда $\mathcal{S}$ триангулированная подкатегория $\iff$ $\mathcal{S}$ замкнута относительно функтора сдвига и взятия конуса морфизмов.*

Доказательство. Пусть на $\mathcal{S}$ задана структура триангулированной категории, такая что функтор вложения точен. Тогда для всякого $X \in \mathcal{S}$ имеем $X[1]_{\mathcal{S}} \cong X[1]_{\mathcal{T}}$. Левая часть лежит в $\mathcal{S}$, значит и правая тоже лежит, так что $\mathcal{S}$ замкнута относительно сдвигов. Пусть также $X \to Y$ — морфизм в $\mathcal{S}$. Дополним его в $\mathcal{S}$ до выделенного треугольника $X \to Y \to Z \to X[1]$. Тогда этот же треугольник будет выделен в $\mathcal{T}$, так что конус данного морфизма изоморфен объекту Z, лежащему в $\mathcal{S}$. Значит $\mathcal{S}$ замкнута относительно взятия конусов морфизмов.

Обратно, пусть $\mathcal{S}$ замкнута относительно функтора сдвига и взятия конуса морфизмов. Определим сдвиг в $\mathcal{S}$ как ограничение на $\mathcal{S}$ сдвига в $\mathcal{T}$, а треугольник будем считать выделенным, если он выделен в $\mathcal{T}$. Легко видеть, что все аксиомы выполнены (для (TR1.3) и (TR4) нужна инвариантность $\mathcal{S}$ относительно взятия конусов, остальное следует из полноты). $\square$

Данная лемма позволяет построить много новых примеров триангулированных категорий.

Упражнение 2.2. Покажите, что подкатегории $\mathrm{Hot}^*(\mathcal{A})$, где $* \in \{+,-,b\}$ — триангулированные подкатегории в $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$.

Пусть $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ — класс объектов, замкнутый относительно прямых сумм и изоморфизмов, а $\mathrm{Hot}^*(\mathcal{E})$ — полная подкатегория в $\mathrm{Hot}^*(\mathcal{A})$, объекты которой — комплексы, все члены которых лежат в $\mathcal{E}$.

Следствие 2.3. *Категория $\mathrm{Hot}^*(\mathcal{E})$ — строго полная триангулированная подкатегория в $\mathrm{Hot}^*(\mathcal{A})$.*

Доказательство. Замкнутость относительно сдвигов очевидна, а замкнутость относительно конусов следует из явной конструкции конуса в $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$. $\square$

Другой способ такой. Пусть $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ — замкнутая относительно расширений абелева подкатегория (то есть если в точной последовательности $0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$ объекты A_1 и A_3 лежат в $\mathcal{B}$, то A_2 тоже лежит в $\mathcal{B}$). Пусть $\mathrm{Hot}^*_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ — полная подкатегория в $\mathrm{Hot}^*(\mathcal{A})$, объекты которой — комплексы, все *когомологии* которых лежат в $\mathcal{B}$.

Следствие 2.4. *Категория $\mathrm{Hot}^*_{\mathcal{B}}(\mathcal{E})$ — строго полная триангулированная подкатегория в $\mathrm{Hot}^*(\mathcal{E})$.*

Доказательство. Замкнутость относительно сдвигов очевидна, а замкнутость относительно конусов следует из явной длинной точной последовательности когомологий выделенного треугольника в $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$. □

Упражнение 2.5. Покажите, что когомологически ограниченные подкатегории $\mathrm{Hot}_{\mathcal{B}}(\mathcal{E})^* \subset \mathrm{Hot}_{\mathcal{B}}(\mathcal{E})$ — строго полные триангулированные подкатегории в $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$.

Позже мы увидим, что категории $\mathrm{Hot}_{\mathcal{B}}(\mathcal{E})^*$ и $\mathrm{Hot}^*_{\mathcal{B}}(\mathcal{E})$ часто эквивалентны.

Пусть $\mathcal{T}$ — триангулированная категория, а $\mathcal{E} \subset \mathcal{T}$ — какое-то множество ее объектов. Обозначим через $\langle\mathcal{E}\rangle$ минимальную строго полную триангулированную подкатегорию в $\mathcal{T}$, содержащую $\mathcal{E}$.

Упражнение 2.6. Покажите, что $\langle\mathcal{E}\rangle$ получается последовательным прибавлением конечных прямых сумм и конусов морфизмов.

Упражнение 2.7. Покажите, что $\mathcal{D}^b(\mathcal{A}) = \langle\mathcal{A}\rangle$.

Упражнение 2.8. Покажите, что
(a) $\mathcal{D}^b(\mathbb{Z}-\mathsf{mod}) = \langle\mathbb{Z}\rangle$;
(b) если кольцо R имеет конечную гомологическую размерность, то $\mathcal{D}^b(R-\mathsf{mod}) = \langle\mathrm{Proj}(R)\rangle$;
(c) если X — гладкое многообразие, то $\mathcal{D}^b(\mathsf{Coh}X) = \langle\mathsf{VB}(X)\rangle$.

В общем случае, категория $\langle\mathrm{Proj}(\mathcal{A})\rangle \subset \mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ (или $\langle\mathsf{VB}(X)\rangle \subset \mathcal{D}^b(\mathsf{Coh}X)$ в геометрическом случае) называется категорией совершенных комплексов. Будем обозначать ее $\mathcal{D}^{\mathsf{perf}}(\mathcal{A})$ и $\mathcal{D}^{\mathsf{perf}}(X)$ соответственно.

Часть 3. Триангулированные подкатегории и локализация

Пусть S — класс морфизмов в триангулированной категории $\mathcal{T}$, удовлетворяющий условиям Оре и согласованный с триангулированной структурой.

Упражнение 3.1. Проверьте, что (a) функтор локализации $Q : \mathcal{T} \to \mathcal{T}[S^{-1}]$ точен; (b) если $F : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ точный функтор, такой что $F(S) \subset \mathrm{Iso}$, то функтор $F' : \mathcal{T}[S^{-1}] \to \mathcal{T}'$, такой что $F = F' \circ Q$ тоже точен.

Пусть теперь $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ — строго полная триангулированная подкатегория. Положим $S' = \mathcal{T}' \cap S$.

Лемма 3.2. *Пусть либо S удовлетворяет левым условиям Оре и выполнено свойство*

(6) *если $X \in \mathcal{T}'$, то для всякого $s \in S$, $s : X \to Y$, найдется $s' \in S$, такой что $s's \in S'$,*

либо S удовлетворяет правым условиям Оре и выполнено свойство

(6′) *если $X \in \mathcal{T}'$, то для всякого $s \in S$, $s : Y \to X$, найдется $s' \in S$, такой что $ss' \in S'$,*

Тогда класс S' удовлетворяет (левым или правым) условиям Оре и согласован с триангулированной структурой в $\mathcal{T}'$, а категория $\mathcal{T}'[S'^{-1}] \subset \mathcal{T}[S^{-1}]$ — строго полная триангулированная подкатегория.

Доказательство. Будем считать, что выполнены левые условия Оре и условие (6). Насыщенность класса S' очевидна. Пусть $X \xleftarrow{t} W \xrightarrow{g} Y$ — правая S'-дробь в $\mathcal{T}'$. Пусть $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{s} Y$ соответствующая ей левая S-дробь в $\mathcal{T}$. Найдем морфизм $s' : Z \to Z'$ в S, такой что $Z' \in \mathcal{T}'$. Тогда $X \xrightarrow{s'f} Z' \xleftarrow{s's} Y$ — левая S'-дробь в $\mathcal{T}'$, такая что $s'sg = s'ft$. Третье условие Оре проверяется аналогично. Согласованность с триангулированной структурой очевидна.

Рассмотрим теперь функтор $\mathcal{T}'[S'^{-1}] \to \mathcal{T}[S^{-1}]$, индуцированный функтором $\mathcal{T}' \to \mathcal{T} \to \mathcal{T}[S^{-1}]$ (который очевидно переводит морфизмы из S' в изоморфизмы). Ясно, что он тождественен на объектах, а на морфизмах устроен так: левая S'-дробь $s^{-1} \circ f$ переходит в ту же левую дробь, рассматриваемую как S-дробь. Остается проверить, что левые S'-дроби эквивалентны тогда и только тогда, когда они эквивалентны как S-дроби, и что всякая S-дробь (с началом и концом в $\mathcal{T}'$) эквивалентна некоторой S'-дроби.

В самом деле, пусть, например $s_1^{-1} \circ f_1 \sim_S s_2^{-1} \circ f_2$, где $s_i \in S'$. Тогда найдется $t \in S$, так что $ts_1 = ts_2$, $tf_1 = tf_2$. Но тогда по свойству (6) найдется $t' \in S$, так что $t't \in S'$, причем $t'ts_1 = t'ts_2$, $t'tf_1 = t'tf_2$, так что $s_1^{-1} \circ f_1 \sim_{S'} s_2^{-1} \circ f_2$. Аналогично, пусть $s^{-1} \circ f$ — левая S-дробь с концом в $\mathcal{T}'$. Найдем $s' \in S$, так что $s's \in S'$. Тогда $s^{-1} \circ f \sim_S (s's)^{-1} \circ (s'f)$, а это левая S'-дробь. □

Это несложное утверждение имеет массу применений. Пусть $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ — абелева подкатегория, а $\mathcal{D}^*_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) = \mathrm{Hot}^*_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})[\mathrm{Qis}^{-1}]$.

Лемма 3.3. *Категория $D^*_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ — строго полная триангулированная подкатегория в $\mathcal{D}^*(\mathcal{A})$.*

Доказательство. Заметим, что $\mathrm{Hot}^*_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ — строго полная триангулированная подкатегория в $\mathrm{Hot}^*(\mathcal{A})$ (в силу 2.4). При этом условие (6) очевидно выполнено, если у комплекса X когомологии лежат в $\mathcal{B}$, а Y ему квазиизоморфен, то у Y тоже когомологии лежат в $\mathcal{B}$. □

Вложение $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ индуцирует вложение $\mathrm{Hot}^*(\mathcal{B}) \to \mathrm{Hot}^*(\mathcal{A})$, которое очевидно пропускается через $\mathrm{Hot}^*_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$.

Лемма 3.4. *Пусть $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ замкнута относительно расширений. Предположим, что для всякого эпиморфизма $f : A \to B$, где $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ найдется $B' \subset A$, такой что $B' \in \mathcal{B}$ и $f_{|B'} : B' \to B$ — эпимофризм. Тогда $\mathcal{D}^-_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) \cong \mathcal{D}^-(\mathcal{B})$ и $\mathcal{D}^b_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) \cong \mathcal{D}^b(\mathcal{B})$.*

Доказательство. Заметим, что $\mathrm{Hot}^*(\mathcal{B})$ — строго полная триангулированная подкатегория в $\mathrm{Hot}^*(\mathcal{A})$ (в силу 2.4). Проверим при $* = -, b$ условие (6). Для этого проверим, что всякий ограниченный сверху комплекс $A^\bullet$ с когомологиями в $\mathcal{B}$, содержит квазиизоморфный ему подкомплекс $B \in \mathrm{Com}(\mathcal{B})$. Будем строить B почленно, начиная сверху. Пусть $A^k = 0$ при всех $k > n$. Положим тогда и $B^k = 0$ при всех $k > n$. Пусть теперь B^k построены при $k \geqslant m$ так, что $H^k(B) = H^k(A)$ при $k \geqslant m+1$, а отображение $H^m(B) \to H^m(A)$ сюръективно. Построим B^{m-1}. Пусть $I^m = \mathrm{Im}(A^{m-1} \to A^m) \subset A^m$, $K^{m-1} = \mathrm{Ker}(A^{m-1} \to A^m)$. Найдем $B^{m-1}_0 \subset A^{m-1}$, такой что морфизм $B^{m-1}_0 \to A^{m-1} \to I^m$ — сюръекция на $I^m \cap B^m = \mathrm{Ker}(B^m \to A^m/I^m) \subset I^m$ (для этого воспользуемся условием по отношению к эпиморфизму $\mathrm{Ker}(A^{m-1} \oplus (I^m \cap B^m) \to I^m) \to I^m \cap B^m$). Кроме того, найдем в K^{m-1} подобъект $B^{m-1}_1 \subset K^{m-1}$, такой что морфизм $B^{m-1}_1 \to H^{m-1}(A)$ — сюръекция. Наконец, положим $B^{m-1} = B^{m-1}_0 + B^{m-1}_1 = \mathrm{Im}(B^{m-1}_0 \oplus B^{m-1}_1 \to A^{m-1})$. По построению $H^m(B) = H^m(A)$, а морфизм $H^{m-1}(B) \to H^{m-1}(A)$ сюръективен. Продолжая эту процедуру построим комплекс B.

Остается заметить, что мы не только проверили свойство (6), которое влечет строгую полноту функтора вложения $D^*(\mathcal{B}) \to \mathcal{D}^*(\mathcal{A})$, но и проверили, что этот функтор существенно сюръективен на подкатегорию $D^*_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$. Значит $D^*(\mathcal{B}) \cong \mathcal{D}^*_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$. □

Упражнение 3.5. Покажите, что условия леммы выполнены для вложений категорий $R\!-\!\mathsf{mod} \subset R\!-\!\mathsf{Mod}$ и $\mathsf{Coh}(X) \subset \mathsf{QCoh}(X)$. В частности $\mathcal{D}^-(R\!-\!\mathsf{mod}) \cong \mathcal{D}^-_{R-\mathsf{mod}}(R\!-\!\mathsf{Mod})$ и $\mathcal{D}^-(\mathsf{Coh}(X)) \cong \mathcal{D}^-_{\mathsf{Coh}(X)}(\mathsf{QCoh}(X))$.

Часть 4. Триангулированные факторкатегории

Пусть $\mathcal{T}$ триангулированная категория, а $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$ — строго полная триангулированная подкатегория. Триангулированной факторкатегорией $\mathcal{T}/\mathcal{N}$ называется триангулированная категория вместе с точным функтором $Q : \mathcal{T} \to \mathcal{T}/\mathcal{N}$, так что $Q(\mathcal{N}) = 0$ и для любой триангулированной категории $\mathcal{T}'$ и точного функтора $F : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$, такого что $F(\mathcal{N}) = 0$ существует единственный (с точностью до изоморфизма) функтор $F' : \mathcal{T}/\mathcal{N} \to \mathcal{T}'$, такой что $F \cong F' \circ Q$.

Оказывается, триангулированные факторкатегория всегда существует и является локализацией исходной категории. В самом деле, пусть $S(\mathcal{N})$ — класс всех морфизмов $s : X \to Y$, таких что третья вершина выделенного треугольника $X \to Y \to Z \to X[1]$ лежит в $\mathcal{N}$.

Лемма 4.1. *Класс $S(\mathcal{N})$ удовлетворяет условиям Оре и согласован с триангулированной структурой, а категория $\mathcal{T}[S(\mathcal{N})^{-1}]$ с функтором локализации $Q : \mathcal{T} \to \mathcal{T}[S(\mathcal{N})^{-1}]$ является факторкатегорией $\mathcal{T}/\mathcal{N}$.*

Доказательство. Проверим условия Оре. Начнем с условия (1). Пусть $f = gh$. Дополним морфизмы g и h до точных треугольников и применим аксиому октаэдра

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "h"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r] \arrow[d] & X[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "f"] & Y' \arrow[r] \arrow[d] & Z' \arrow[r] \arrow[d] & X[1] \arrow[d, "h[1]"'] \\
& W \arrow[r, equal] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d] & Y[1] \\
& Y[1] \arrow[r] & Z[1] &
\end{tikzcd}$$

Если два из трех морфизмов f, g и h лежат в $S(\mathcal{N})$, то две из трех вершин выделенного треугольника $Z \to Z' \to W \to Z[1]$ лежат в $\mathcal{N}$. Но тогда и третья вершина лежит там же, так как $\mathcal{N}$ триангулирована, а значит и третий морфизм лежит в $S(\mathcal{N})$.

Теперь проверим (2). Далее, пусть $X \xleftarrow{t} W \xrightarrow{g} Y$ — правая $S(\mathcal{N})$-дробь. Дополним морфизм $W \xrightarrow{\begin{pmatrix} t \\ g \end{pmatrix}} X \oplus Y$ до выделенного треугольника $W \xrightarrow{\begin{pmatrix} t \\ g \end{pmatrix}} X \oplus Y \xrightarrow{(-f,s)} Z \to W[1]$. Так как композиция морфизмов нулевая — имеем $sg = ft$, поэтому достаточно проверить, что $s \in S(\mathcal{N})$. Для этого применим аксиому октаэдра к треугольникам $Y \to X \oplus Y \to X \to Y[1]$ и $X \oplus Y \to Z \to W[1]$:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & X \oplus Y \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & Y[1] \arrow[d, equal] \\
Y \arrow[r, "s"] & Z \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & Y[1] \arrow[d] \\
& W[1] \arrow[r, equal] \arrow[d] & W[1] \arrow[r] \arrow[d, "t[1]"] & X[1] \oplus Y[1] \\
& X[1] \oplus Y[1] \arrow[r] & X[1] &
\end{tikzcd}$$

Так как $t \in S(\mathcal{N})$, объект N лежит в $\mathcal{N}$, откуда получаем, что $s \in S(\mathcal{N})$.

Проверим теперь (3). Пусть $fs = 0$, $s \in S(\mathcal{N})$, $s : X \to Y$, $f : Y \to Z$. Дополним s до выделенного треугольника $X \to Y \to N \to X[1]$. Тогда $N \in \mathcal{N}$. Из $fs = 0$ следует существование $g : N \to Z$, такого что композиция $Y \to N \to Z$ равна f. Дополним g до выделенного треугольника $N \to Z \to W \to N[1]$. Тогда морфизм $t : Z \to W$ лежит в $S(\mathcal{N})$, а по построению $tf = 0$.

Теперь проверим согласованность с триангулированной структурой. Условие (4) очевидно. Пусть $f, g \in S(N)$. Дополним морфизм $u'f = gu : X \to Y'$ до выделенного треугольника $X \to Y' \to W$. Применяя аксиому октаэдра в категории $\mathcal{T}$ получим диаграммы

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h_1"] & X[1] \arrow[d] \\
X \arrow[r, "gu"] & Y' \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d] & X[1] \\
 & N_1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & N_1 \arrow[d] & \\
 & Y[1] \arrow[r] & Z[1] &
\end{tikzcd}
\quad \text{и} \quad
\begin{tikzcd}
Y' \arrow[r] \arrow[d, equal] & W \arrow[r] \arrow[d, "h_2"] & X[1] \arrow[r, "(u'f)[1]"] \arrow[d, "f[1]"] & Y'[1] \arrow[d, equal] \\
Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] \arrow[d] & X'[1] \arrow[r, "u'[1]"] \arrow[d] & Y'[1] \\
 & N_2 \arrow[r, equal] \arrow[d] & N_2 \arrow[d] & \\
 & W[1] \arrow[r] & X[2] &
\end{tikzcd}$$

Если морфизмы $g : Y \to Y'$ и $f : X \to X'$ лежат в $S(\mathcal{N})$, то $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$, значит $h_1, h_2 \in S(\mathcal{N})$, поэтому $h_2 h_1 : Z \to Z'$ — искомый морфизм.

Остается проверить, что триангулированная категория $\mathcal{T}[S(\mathcal{N})^{-1}]$ с функтором $Q : \mathcal{T} \to \mathcal{T}[S(\mathcal{N})^{-1}]$ удовлетворяет универсальному свойству факторкатегории. Во-первых, заметим, что $Q(\mathcal{N}) = 0$. В самом деле, если $N \in \mathcal{N}$, то морфизм $0 \to N$ лежит в $S(\mathcal{N})$ (так как его конус равен N), значит $0 = Q(0) \cong Q(N)$. Во-вторых, пусть $F : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ точный функтор, такой что $F(\mathcal{N}) = 0$. Возьмем произвольный морфизм $s : X \to Y$, такой что $s \in S(\mathcal{N})$ и дополним его до выделенного треугольника $X \to Y \to N \to X[1]$ (заметим, что $N \in \mathcal{N}$ по определению класса $S(\mathcal{N})$). Применяя функтор F получим выделенный (в силу точности функтора F) треугольник $F(X) \to F(Y) \to F(N) \to F(X)[1]$ в $\mathcal{T}'$. Так как $F(N) = 0$, морфизм $F(s)$ — изоморфизм. Значит $F(S(\mathcal{N})) \subset \mathrm{Iso}$, следовательно функтор F раскладывается в композицию $F \cong F' \circ Q$, причем единственным способом. $\square$

Упражнение 4.2. Пусть $X \to Y \to Z \to X[1]$ — выделенный треугольник. Покажите, что
(a) если морфизм $Z \to X[1]$ — нулевой, то треугольник изоморфен треугольнику $X \xrightarrow{i_X} X \oplus Z \xrightarrow{p_Z} Z \xrightarrow{0} X[1]$;
(b) если $Z = 0$, то морфизм $X \to Y$ — изоморфизм.

Упражнение 4.3. Покажите, что $\mathcal{D}^*(\mathcal{A}) = \mathrm{Hot}^*(\mathcal{A}) / \mathrm{Acycl}^*(\mathcal{A})$.

Упражнение 4.4. Покажите, что $\operatorname{Ker} Q : \mathcal{T} \to \mathcal{T}/\mathcal{N}$ получается добавлением к $\mathcal{N}$ прямых слагаемых.

Полезно переписать на языке факторкатегорий лемму 3.2.

Упражнение 4.5. Пусть $F : \mathcal{T}' \to \mathcal{T}$ — точный функтор, а $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$ — строго полная подкатегория. Положим $\mathcal{N}' = F^{-1}(\mathcal{N})$. Докажите, что существует точный функтор $F' : \mathcal{T}'/\mathcal{N}' \to \mathcal{T}/\mathcal{N}$, такой что $F' \circ Q' \cong Q \circ F$. Проверьте, что если F строго полон и выполнено одно из свойств

($6''$) если $X \in \mathcal{T}'$, $N \in \mathcal{N}$ то всякий морфизм $N \to F(X)$ может быть представлен в виде композиции $N \to F(N') \to F(X)$, где $N' \in \mathcal{N}'$ или
($6'''$) если $X \in \mathcal{T}'$, $N \in \mathcal{N}$ то всякий морфизм $F(X) \to X$ может быть представлен в виде композиции $F(X) \to F(N') \to N$, где $N' \in \mathcal{N}'$,

то функтор F' строго полон.

Приведем несколько примеров.

Лемма 4.6. *Композиция функтора вложения* $\mathrm{Hot}^*(\operatorname{Proj} \mathcal{A}) \to \mathrm{Hot}^*(\mathcal{A})$ *и проекции* $Q : \mathrm{Hot}^*(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^*(\mathcal{A})$ *— строго полное вложение для* $* = -, b$. *Если к тому же проективных объектов в* $\mathcal{A}$ *достаточно много, то* $\mathrm{Hot}^-(\operatorname{Proj} \mathcal{A}) \cong \mathcal{D}^-(\mathcal{A})$, $\mathrm{Hot}^-(\operatorname{Proj} \mathcal{A})^b \cong \mathcal{D}^b(\mathcal{A})$.

Аналогично, функтор $\mathrm{Hot}^*(\operatorname{Inj} \mathcal{A}) \to \mathrm{Hot}^*(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^*(\mathcal{A})$ *— строго полное вложение для* $* = +, b$, *а если инъективных объектов в* $\mathcal{A}$ *достаточно много, то* $\mathrm{Hot}^+(\operatorname{Inj} \mathcal{A}) \cong \mathcal{D}^+(\mathcal{A})$, $\mathrm{Hot}^+(\operatorname{Inj} \mathcal{A})^b \cong \mathcal{D}^b(\mathcal{A})$.

Доказательство. Заметим, что $\mathrm{Acycl}^-(\mathcal{A}) \cap \mathrm{Hot}^-(\operatorname{Proj} \mathcal{A}) = 0$. В самом деле, если $P^\bullet$ — ограниченный сверху ацикличный комплекс, состоящий из проективных объектов, то он гомотопен нулю (и $P^\bullet$ и 0 являются проективными резольвентами нуля, а проективная резольвента единственна с точностью до изоморфизма, единственного с точностью до гомотопии). Поэтому для строго полноты достаточно заметить, что условие ($6'''$) выполняется. В самом деле, всякий морфизм из ограниченного сверху комплекса, состоящего из проективных объектов в ацикличный комплекс гомотопен нулю. Наконец, если проективных объектов достаточно много, то всякий ограниченный сверху комплекс имеет проективную резольвенту, значит функтор $\mathrm{Hot}^*(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^*(\mathcal{A})$ существенно сюръективен. $\square$

Интересно рассмотреть категорию $\mathcal{D}^{\mathsf{sing}}(\mathcal{A}) := \mathcal{D}^b(\mathcal{A})/D^{\mathsf{perf}}(\mathcal{A})$, которая называется производной категорией особенностей.

Упражнение 4.7. Пусть $\mathcal{A} = \mathsf{k}[x]/x^2-\mathsf{mod}$. Докажите, что $\mathcal{D}^{\mathsf{sing}}(\mathcal{A}) \cong \mathsf{k}-\mathsf{mod}$.