Производные функторы — построение

Часть 1. Определение

Пусть $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — аддитивный функтор между абелевыми категориями. Обозначим индуцированный точный функтор между гомотопическими категориями также через $F : \mathrm{Hot}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Hot}(\mathcal{B})$.

Лемма 1.1. *Функтор F сохраняет квазиизоморфизмы $\iff$ F точен (то есть сохраняет точные тройки).*

Доказательство. Пусть $0 \to X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \to 0$ — точная тройка. Значит морфизм v индуцирует квазиизоморфизм комплекса $\{\, X \to Y \,\}$ и Z. Следовательно $F(v)$ должен индуцировать квазиизоморфизм комплексов $\{\, F(X) \to F(Y) \,\}$ и $F(Z)$, то есть последовательность $0 \to F(X) \to F(Y) \to F(Z) \to 0$ должна быть точна. □

Если функтор $F : \mathrm{Hot}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Hot}(\mathcal{B})$ сохраняет квазиизоморфизмы, то в силу универсального свойства функтора локализации существует функтор $\mathcal{D}(F) : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{B})$, такой что

$$(*) \qquad \mathcal{D}(F) \circ Q_{\mathcal{A}} \cong Q_{\mathcal{B}} \circ F.$$

В этом случае функтор $\mathcal{D}(F)$ называется **производным** от функтора F.

Однако, если функтор $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ не является точным, построить функтор $\mathcal{D}(F)$, удовлетворяющий свойству $(*)$, нельзя. Единственное что можно — это добиться некоторого приближения к этому свойству.

Точный функтор $RF : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{B})$ называется **правым производным** от F, если задан морфизм функторов

$$(\dagger) \qquad \rho_F : Q_{\mathcal{B}} \circ F \to RF \circ Q_{\mathcal{A}},$$

удовлетворяющий универсальному свойству:

- для всякого точного функтора $G : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{B})$ и всякого морфизма функторов $\phi : Q_{\mathcal{B}} \circ F \to G \circ Q_{\mathcal{A}}$ существует единственный морфизм функторов $\phi' : RF \to G$, такой что диаграмма

$$\begin{tikzcd} Q_{\mathcal{B}} \circ F \arrow[r, "\rho_F"] \arrow[dr, "\phi"'] & RF \circ Q_{\mathcal{A}} \arrow[d, "\phi'"] \\ & G \circ Q_{\mathcal{A}} \end{tikzcd}$$

  коммутативна.

Аналогично, точный функтор $LF : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{B})$ называется **левым производным** от функтора F, если задан морфизм функторов

$$(\ddagger) \qquad \lambda_F : LF \circ Q_{\mathcal{A}} \to Q_{\mathcal{B}} \circ F,$$

удовлетворяющий универсальному свойству:

- для всякого точного функтора $G : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{B})$ и всякого морфизма функторов $\phi : G \circ Q_{\mathcal{A}} \to Q_{\mathcal{B}} \circ F$ существует единственный морфизм функторов $\phi' : G \to LF$, такой что диаграмма

$$\begin{tikzcd} G \circ Q_{\mathcal{A}} \arrow[d, "\phi'"'] \arrow[dr, "\phi"] & \\ LF \circ Q_{\mathcal{A}} \arrow[r, "\lambda_F"'] & Q_{\mathcal{B}} \circ F \end{tikzcd}$$

  коммутативна.

Легко видеть, что если $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ точен, то $\mathcal{D}(F)$ является и правым и левым производным функтором от F одновременно. Кроме того, ясно, что правый (или левый) производный функтор единственен (если существует).

Часть 2. Локализация функторов и полуортогональные разложения

Определение производного функтора является специальным случаем понятия локализации функтора.

Пусть $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}'$ — триангулированные категории, $F : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ — точный функтор, а $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$ — строго полная триангулированная подкатегория. Если $F(\mathcal{N}) = 0$, то функтор F пропускается через $\mathcal{T}/\mathcal{N}$. В общем же случае, такого не бывает.

Точный функтор $RF : \mathcal{T}/\mathcal{N} \to \mathcal{T}'$ вместе с морфизмом $\rho : F \to RF \circ Q$ называется правой локализацией F относительно $\mathcal{N}$, если всякий морфизм функторов $F \to G \circ Q$ (где $G : \mathcal{T}/\mathcal{N} \to \mathcal{T}'$ — точный функтор) пропускается единственным образом через морфизм $RF \to G$. Аналогично, точный функтор $LF : \mathcal{T}/\mathcal{N} \to \mathcal{T}'$ вместе с морфизмом $\lambda : LF \circ Q \to F$ называется левой локализацией F относительно $\mathcal{N}$, если всякий морфизм функторов $G \circ Q \to F$ (где $G : \mathcal{T}/\mathcal{N} \to \mathcal{T}'$ — точный функтор) пропускается единственным образом через морфизм $G \to LF$.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\rho_F"] \arrow[dr, "\phi"'] & RF \circ Q \arrow[d, "\phi'"] \\ & G \circ Q \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \circ Q \arrow[d, "\phi'"'] \arrow[dr, "\phi"] & \\ LF \circ Q \arrow[r, "\lambda_F"'] & F \end{tikzcd}$$

Ясно, что при $\mathcal{T} = \mathrm{Hot}(\mathcal{A})$, $\mathcal{N} = \mathrm{Acycl}(\mathcal{A})$, $\mathcal{T}' = \mathcal{D}(\mathcal{B})$ правая (левая) локализация функтора $Q_{\mathcal{B}} \circ F$ является правым (левым) производным функтором. Поэтому вопрос существования производных функторов является частным случаем вопроса существования локализаций.

Аналогично случаю производных функторов, имеем

Лемма 2.1. *Если $F(\mathcal{N}) = 0$, то существует функтор $F' : \mathcal{T}/\mathcal{N} \to \mathcal{T}'$, являющийся и правой и левой локализацией F одновременно.*

Доказательство. Если $F(\mathcal{N}) = 0$, то существует $F' : \mathcal{T}/\mathcal{N} \to \mathcal{T}'$, такой что $F' \circ Q = F$. Обозначим через ρ и λ взаимно обратные морфизмы $F \to F' \circ Q$ и $F' \circ Q \to F$. Ясно, что они дают искомые локализации. $\square$

Чуть сложнее проверить следующий критерий.

Предложение 2.2. *Предположим, что функтор вложения $\mathcal{N} \to \mathcal{T}$ имеет правый сопряженный функтор $\mathcal{T} \to \mathcal{N}$. Тогда всякий точный функтор $F : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ имеет правую локализацию.*

Для доказательства нам понадобится некоторая подготовка.

Лемма 2.3. *Пусть $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ и $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ — строго полные триангулированные подкатегории. Предположим*

- $\mathrm{Hom}(B, A) = 0$ *для всех $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$;*
- *для всякого объекта $X \in \mathcal{T}$ существует выделенный треугольник $B_X \to X \to A_X \to B_X[1]$, в котором $A_X \in \mathcal{A}$, а $B_X \in \mathcal{B}$.*

Тогда функторы вложения $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{T}$ и $\beta : \mathcal{B} \to \mathcal{T}$ имеют левый и правый сопряженный функторы $\alpha^* : \mathcal{T} \to \mathcal{A}$ и $\beta^! : \mathcal{T} \to \mathcal{B}$ соответственно, а треугольник функториален и изоморфен треугольнику

$$\beta\beta^! X \to X \to \alpha\alpha^* X \to \beta\beta^! X[1],$$

в котором первые два морфизма индуцированы сопряженностью функторов.

Доказательство. Пусть $X, Y \in \mathcal{T}$, а $B_X \to X \to A_X \to B_X[1]$ и $B_Y \to Y \to A_Y \to B_Y[1]$ — соответствующие треугольники. Пусть $f : X \to Y$ — произвольный морфизм. Ясно, что композиция $B_X \to X \to Y \to A_Y$ равна нулю (так как $\mathrm{Hom}(B_X, A_Y) = 0$), поэтому этот морфизм продолжается до морфизма треугольников

$$\begin{tikzcd} B_X \arrow[r] \arrow[d, dashed, "B_f"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & A_X \arrow[r] \arrow[d, dashed, "A_f"] & B_X[1] \\ B_Y \arrow[r] & Y \arrow[r] & A_Y \arrow[r] & B_Y[1] \end{tikzcd}$$

Так как $\mathrm{Hom}(B_X, A_Y[-1]) = 0$ такое продолжение единственно. Отсюда следует, что отображения $X \mapsto A_X$, $f \mapsto A_f$, а также $X \mapsto B_X$, $f \mapsto B_f$ являются функторами $\mathcal{T} \to \mathcal{A}$ и $\mathcal{T} \to \mathcal{B}$ соответственно.

Применим теперь к треугольнику $B_X \to X \to A_X \to B_X[1]$ функтор $\mathrm{Hom}(B, -)$ с $B \in \mathcal{B}$. Так как $\mathrm{Hom}(B, A_X) = 0$, получим изоморфизм $\mathrm{Hom}(\beta(B), X) \cong \mathrm{Hom}(B, B_X)$. Отсюда следует, что функтор $X \mapsto B_X$ сопряжен справа к β. Аналогично проверяется, что функтор $X \mapsto A_X$ сопряжен к α слева. □

Если выполнены условия леммы, то говорят, что подкатегории $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ образуют полуортогональное разложение категории $\mathcal{T}$ и пишут $\mathcal{T} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$.

Пусть теперь $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$ — произвольная полная триангулированная подкатегория. Обозначим через $\mathcal{N}^\perp \subset \mathcal{T}$ строго полную подкатегорию в $\mathcal{T}$, состоящую из всех $X \in \mathcal{T}$, таких что $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(N, X) = 0$ для всех $N \in \mathcal{N}$. Аналогично, обозначим через ${}^\perp\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$ строго полную подкатегорию в $\mathcal{T}$, состоящую из всех $X \in \mathcal{T}$, таких что $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, N) = 0$ для всех $N \in \mathcal{N}$. Эти подкатегории называются левым и правым ортогоналом к $\mathcal{N}$ соответственно.

Упражнение 2.4. Покажите, что $\mathcal{N}^\perp$ и ${}^\perp\mathcal{N}$ — триангулированные подкатегории.

Лемма 2.5. *Если функтор вложения $\mathcal{N} \to \mathcal{T}$ имеет правый сопряженный функтор, то $\mathcal{T} = \langle \mathcal{N}^\perp, \mathcal{N} \rangle$ — полуортогональное разложение. Аналогично, если функтор вложения $\mathcal{N} \to \mathcal{T}$ имеет левый сопряженный функтор, то $\mathcal{T} = \langle \mathcal{N}, {}^\perp\mathcal{N} \rangle$ — полуортогональное разложение.*

Доказательство. Надо проверить, что условия леммы 2.3 выполнены. Первое условие выполняется по определению ортогонала. Для второго условия, заметим, что $\mathrm{Hom}(N, \alpha\alpha^! X) = \mathrm{Hom}(N, \alpha^! X) \cong \mathrm{Hom}(\alpha N, X) = \mathrm{Hom}(N, X)$ для всех $N \in \mathcal{N}$, причем изоморфизм индуцирован естественным морфизмом $\alpha\alpha^! X \to X$. Дополним естественный морфизм $\alpha\alpha^! X \to X$ до выделенного треугольника

$$\alpha\alpha^! X \to X \to X' \to \alpha\alpha^! X[1].$$

Применяя к нему функтор $\mathrm{Hom}(N, -)$ с $N \in \mathcal{N}$, получаем $\mathrm{Hom}(N, X') = 0$, значит $X' \in \mathcal{N}^\perp$. Таким образом второе условие тоже выполнено. □

Подкатегория, функтор вложения которой имеет правый сопряженный называется допустимой справа, а подкатегория, функтор вложения которой имеет левый сопряженный называется допустимой слева. Если подкатегория допустима и слева и справа, она называется допустимой.

Доказательство предложения 2.2. По условию $\mathcal{N}$ допустима справа, поэтому $\mathcal{T} = \langle \mathcal{N}^\perp, \mathcal{N} \rangle$ — полуортогональное разложение. Обозначим функторы вложения категорий $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}^\perp$ через α и β соответственно.

Применим к треугольнику $\beta\beta^! X \to X \to \alpha\alpha^* X \to \beta\beta^! X[1]$ функтор Q. Так как $Q(\mathcal{N}) = 0$, а $\mathrm{Im}\,\beta \subset \mathcal{N}$, получаем треугольник $0 \to Q(X) \to Q\alpha\alpha^*(X) \to 0$, откуда получаем изоморфизм $Q \cong Q\alpha\alpha^*$.

Пусть $F : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ — точный функтор. Положим $\tilde{F} = F\alpha\alpha^*$ и пусть $\rho : F \to F\alpha\alpha^*$ — морфизм индуцированный естественным морфизмом $\mathrm{id} \to \alpha\alpha^*$. Пусть $\phi : F \to GQ$ — произвольный морфизм функторов. Компонируя с $\alpha\alpha^*$, получаем морфизм $\phi' : \tilde{F} = F\alpha\alpha^* \to GQ\alpha\alpha^* \cong GQ$, причем в силу функториальности $\phi' = \phi \circ \rho$. Единственность такого ϕ' очевидна. Остается заметить, что $\tilde{F}(\mathcal{N}) = 0$, поэтому $\tilde{F}$ раскладывается в композицию $\mathcal{T} \xrightarrow{Q} \mathcal{T}/\mathcal{N} \xrightarrow{RF} \mathcal{T}'$. Тогда RF — искомый функтор. □

Часть 3. Проективные и инъективные резольвенты

Предложение 2.2 (если оно применимо) дает эффективную конструкцию производных функторов.

Лемма 3.1. *Пусть в категории $\mathcal{A}$ достаточно много инъективных объектов. Тогда*

$$\mathrm{Hot}^+(\mathcal{A}) = \langle \mathrm{Hot}^+(\mathrm{Inj}(\mathcal{A})), \mathrm{Acycl}^+(\mathcal{A}) \rangle$$

— полуортогональное разложение. В частности, для всякого аддитивного функтора $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ на категории $\mathcal{D}^+(\mathcal{A})$ определен правый производный функтор RF.

Аналогично, пусть в категории $\mathcal{A}$ достаточно много проективных объектов. Тогда

$$\mathrm{Hot}^-(\mathcal{A}) = \langle \mathrm{Acycl}^-(\mathcal{A}), \mathrm{Hot}^-(\mathrm{Proj}(\mathcal{A})) \rangle$$

— полуортогональное разложение. В частности, для всякого аддитивного функтора $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ на категории $\mathcal{D}^-(\mathcal{A})$ определен левый производный функтор LF.

Доказательство. Если $I^\bullet$ — ограниченный снизу комплекс ацикличных объектов, а $X^\bullet$ — ацикличный комплекс, то всякий морфизм $I^\bullet \to X^\bullet$ гомотопен нулю (это мы доказывали в лекции 4, гомотопия строится по индукции). Поэтому категории полуортогональны. Далее, если $X^\bullet$ — произвольный ограниченный снизу комплекс, то у него есть инъективная резольвента, то есть квазиизоморфизм $X^\bullet \to I^\bullet$. Его конус — ацикличный комплекс. Полученный треугольник показывает, что у нас и в самом деле есть полуортогональное разложение. В частности, можно применить предложение 2.2 и получить правый производный функтор от произвольного аддитивного функтора F. Аналогичные рассуждения доказывают вторую часть леммы. □

Замечание 3.2. Согласно лемме, чтобы вычислить правый производный функтор RF на комплексе X, надо применить F почленно к какой-либо из его инъективных резольвент: $RF(X) = F(I(X))$. Аналогично, $LF(X) = F(P(X))$.

На самом деле, подход с полуортогональными разложениями позволяет доказывать весьма сильные результаты. Например, строить производные функторы на неограниченных производных категориях. Для этого нужны следующие понятия.

Комплекс $X \in \mathrm{Hot}(\mathcal{A})$ называется h-**инъективным**, если он лежит в правом ортогонале к $\mathrm{Acycl}(\mathcal{A})$. Аналогично, комплекс $X \in \mathrm{Hot}(\mathcal{A})$ называется h-**проективным**, если он лежит в левом ортогонале к $\mathrm{Acycl}(\mathcal{A})$. Обозначим через $\mathrm{hInj}(\mathcal{A})$ и $\mathrm{hProj}(\mathcal{A})$ категории h-инъективных и h-проективных объектов в $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$ соответственно. По определению

$$\mathrm{hInj}(\mathcal{A}) = \mathrm{Acycl}(\mathcal{A})^{\perp}, \qquad \mathrm{hProj}(\mathcal{A}) = {}^{\perp}\,\mathrm{Acycl}(\mathcal{A}).$$

Теорема 3.3 (Спальтенштейн)**.** *(i) Пусть R — произвольное кольцо. Тогда*

$$\mathrm{Hot}(R-\mathsf{Mod}) = \langle \mathrm{Acycl}(R-\mathsf{Mod}), \mathrm{hProj}(R-\mathsf{Mod})\rangle$$

— полуортогональное разложение. В частности, любой функтор на категории $R-\mathsf{Mod}$ имеет левый производный.

(ii) Пусть X — топологическое пространство, а $\mathcal{R}$ — пучок колец на X. Обозначим через $\mathcal{R}-\mathsf{Mod}$ категорию пучков $\mathcal{R}$-модулей на X. Тогда

$$\mathrm{Hot}(\mathcal{R}-\mathsf{Mod}) = \langle \mathrm{hInj}(\mathcal{R}-\mathsf{Mod}), \mathrm{Acycl}(\mathcal{R}-\mathsf{Mod})\rangle$$

— полуортогональное разложение. В частности, любой функтор на категории $\mathcal{R}-\mathsf{Mod}$ имеет правый производный.

Есть и разные вариации на эту тему.

Часть 4. Связь с классическими производными функторами

Лемма 4.1. *Пусть $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — точный слева функтор, а $RF : \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^+(\mathcal{B})$ — его правый производный. Определим функторы $R^iF : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ формулой*

$$R^iF(A) = H^i(RF(A)),$$

где $H^i : \mathcal{D}^+(\mathcal{B}) \to \mathcal{B}$ — функтор вычисления i-ых когомологий. Тогда R^iF — классические производные функторы от F. Аналогично, если $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — точный справа функтор, а $LF : \mathcal{D}^-(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^-(\mathcal{B})$ — его левый производный, то

$$L_iF(A) = H^{-i}(LF(A)),$$

— классические производные функторы от F.

Для доказательства в общем случае нам пока не хватает техники. Ограничимся случаем достаточного количества инъективных (проективных) объектов. В этом случае утверждение тавтологично.

Доказательство. Как было отмечено выше $RF(A) = F(I(A))$, где $I(A)$ — инъективная резольвента. Тогда $H^i(RF(A)) = H^i(F(I(A)))$, что равно $R^iF(A)$ согласно результатам лекции 4. □

Часть 5. Конструкция Делиня

Для описания производных функторов оказываются полезными понятия прямого и обратного предела функтора по категории. Напомним их.

Пусть S — (малая) категория, а $F : S \to \mathsf{Sets}$ — функтор. Определим

$$\varinjlim_S F := \coprod_{s\in S} F(s)/\{\, x_s \sim F(f)(x_s)_t \,\}_{f\in \mathrm{Hom}_S(s,t)},$$
$$\varprojlim_S F := \{\, (x_s)_{s\in S} \in \prod_{s\in S} F(s) \mid \forall f \in \mathrm{Hom}_S(s,t)\ F(f)(x_s) = x_t \,\}.$$

Упражнение 5.1. Покажите, что (a) $\varinjlim$ и $\varprojlim$ — функторы из категории $\mathsf{Fun}(S, \mathsf{Sets})$ в Sets;
(b) $\varinjlim$ сопряжен слева, а $\varprojlim$ справа к функтору $\mathsf{Sets} \to \mathsf{Fun}(S, \mathsf{Sets})$, $X \mapsto F(s) := X$;
(c) $\mathrm{Hom}(\varinjlim_S F, X) = \varprojlim_S \mathrm{Hom}(F(s), X)$.

Если же функтор F принимает значения в произвольной категории $\mathcal{C}$, то по определению $\varinjlim_S F$ — это объект, представляющий функтор $X \mapsto \varinjlim_S \mathrm{Hom}(X, F(s))$, а $\varprojlim_S F$ — это объект, копредставляющий функтор $X \mapsto \varinjlim_S \mathrm{Hom}(F(s), X)$:

$$h_{\varinjlim_S F} = \varinjlim_S h_F, \qquad h^{\varprojlim_S F} = \varinjlim_S h^F.$$

Упражнение 5.2. Покажите, что если $\mathcal{A}$ — аддитивная категория, то
(a) функторы $\varinjlim, \varprojlim : \mathsf{Fun}_{\mathsf{add}}(S, \mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ аддитивны; (b) $\mathrm{Ker}\, f = \varprojlim_{\bullet\to\bullet} f$, $\mathrm{Coker} = \varinjlim_{\bullet\to\bullet} f$.

Функтор $\Phi : T \to S$ называется **кофинальным**, если для всякого объекта $s \in S$

- найдется $t \in T$, так что $\mathrm{Hom}(s, \Phi(t)) \neq \emptyset$;
- для всяких $t_1, t_2 \in T$ и $f_1 : s \to \Phi(t_1)$, $f_2 : s \to \Phi(t_2)$ найдется $t \in T$ и морфизмы $g_1 : t_1 \to t$, $g_2 : t_2 \to t$, так что $\Phi(g_1) \circ f_1 = \Phi(g_2) \circ f_2$.

Категория S называется **фильтрованной**, если функтор $\Delta : S \to S \times S$ — кофинальный.

Упражнение 5.3. Если $\Phi : T \to S$ кофинальный функтор, то
(a) естественный морфизм $\varinjlim_T (F \circ \Phi) \to \varinjlim_S F$ — изоморфизм;
(b) естественный морфизм $\varprojlim_{S^\circ} F \to \varprojlim_{T^\circ} (F \circ \Phi)$ — изоморфизм.

Упражнение 5.4. Если категория S фильтрованая, то функтор $\varinjlim_S : \mathsf{Fun}_{\mathsf{add}}(S, \mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ точен.

Пусть S — класс морфизмов в категории $\mathcal{C}$. Для каждого объекта $X \in \mathcal{T}$ обозначим через S^X категорию морфизмов $s : X \to Z$, лежащих в S, а через S_X — категорию морфизмов $s : Z \to X$, лежащих в S.

Упражнение 5.5. (a) Если S удовлетворяет условиям Оре, то категории S^X и S_X° фильтрованы, и для всякого морфизма $s : X \to Y$ лежащего в S функторы $S^Y \to S^X$ и $S_X^\circ \to S_Y^\circ$ кофинальны. (b) Если в категории $\mathcal{C}$ существуют прямые пределы, то функторы $X \mapsto \varinjlim_{S^X} Z$ и $X \mapsto \varprojlim_{S_X} Z$ переводят морфизмы из S в квазиизоморфизмы.

Из упражнения следует, что функторы $X \mapsto \varinjlim_{S^X} h_Z$ и $X \mapsto \varprojlim_{S_X} h_Z$ задают строго полное вложение локализации $\mathcal{C}[S^{-1}]$ в $\mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathsf{Sets})$.

Аналогичные соображения можно использовать для построения локализации функторов. Пусть $S = S(\mathcal{N})$ — класс морфизмов, соответствующий подкатегории $\mathcal{N}$. Пусть $F : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ — точный функтор. Предположим он имеет правую локализацию RF. Пусть G — произвольный точный функтор $\mathcal{T}/\mathcal{N} \to \mathcal{T}'$, а $\phi : F \to G \circ Q$

— морфизм функторов. Пусть $s : X \to Z$ — морфизм из S. Тогда возникает коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\rho_F(X)"'] \arrow[rr, bend left, "\phi(X)"] \arrow[d, "F(s)"'] & RF(Q(X)) \arrow[r, dotted, "\phi'(X)"'] \arrow[d, "\cong"', "RF(Q(s))"] & G(Q(X)) \arrow[d, "\cong"', "G(Q(s))"] \\
F(Z) \arrow[r, "\rho_F(Z)"] \arrow[rr, bend right, "\phi(Z)"'] & RF(Q(Z)) \arrow[r, dotted, "\phi'(Z)"] & G(Q(Z))
\end{tikzcd}$$

Заметим, что $Q(s)$ — изоморфизм, поэтому во-первых, морфизмы $(RF(Q(s)))^{-1} \circ \rho_F(X)$ индуцируют морфизм $\varinjlim_{S^X} F(Z) \to RF(X)$, который в силу универсального свойства "должен являться изоморфизмом". Проводя аналогичные рассуждения для левой локализации получаем равенства

$$(\star) \qquad RF(X) \cong \varinjlim_{S^X} F(Z), \qquad LF(X) \cong \varprojlim_{S_X} F(Z).$$

Сделаем эти рассуждения строгими. Для этого для каждого объекта $Z \in \mathcal{T}$ рассмотрим представимый функтор $h_{F(Z)} : \mathcal{T}'^\circ \to \mathsf{Ab}$. Определим функторы $rF(X) : \mathcal{T}'^\circ \to \mathsf{Ab}$ и $lF(X) : \mathcal{T}'^\circ \to \mathsf{Ab}$ формулами

$$rF(X) := \varinjlim_{S^X} h_{F(Z)}, \qquad lF(X) := \varprojlim_{S_X} h_{F(Z)}$$

Заметим, что если $F(\mathcal{N}) = 0$, то F переводит все морфизмы из S в изоморфизмы, поэтому все морфизмы в пределах — изоморфизмы, значит $rF(X) \cong h_{F(X)} \cong lF(X)$.

Лемма 5.6. *Если для всякого $X \in \mathcal{T}$ функтор $rF(X)$ представим, то функтор F имеет правую локализацию, причем $h_{RF(X)} \cong rF(X)$. Аналогично, если для всякого $X \in \mathcal{T}$ функтор $lF(X)$ представим, то функтор F имеет левую локализацию, причем $h_{LF(X)} \cong lF(X)$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный морфизм $f : X \to X'$ в $\mathcal{T}$. Пусть S^f — категория коммутативных квадратов

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & X' \arrow[d, "s'"] \\
Z \arrow[r, "\tilde{f}"] & Z'
\end{tikzcd}$$

где $s, s' \in S$. Имеем очевидные функторы $S^f \to S^X$ и $S^{X'}$, индуцирующие морфизмы пределов

$$\alpha_f : \varinjlim_{S^f} h_{F(Z)} \to \varinjlim_{S^X} h_{F(Z)} = rF(X) \quad \text{и} \quad \beta_f : \varinjlim_{S^f} h_{F(Z)} \to \varinjlim_{S^{X'}} h_{F(Z')} = rF(X')$$

(во втором случае используется морфизм $\tilde{f} : Z \to Z'$). Заметим, что α_f является изоморфизмом, так как функтор $S^f \to S^X$ кофинален (это одно из условий Оре). Поэтому композиция $\beta_f \circ \alpha_f^{-1}$ задает морфизм $rF(X) \to rF(X')$. Легко видеть, что тем самым определен функтор $rF : X \mapsto rF(X)$.

При этом, если морфизм f лежит в классе S, то существует также функтор $S^{X'} \to S^f$,

$$(s' : X' \to Z') \mapsto \begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s'f"'] & X' \arrow[d, "s'"] \\
Z' \arrow[r, "\mathrm{id}"] & Z'
\end{tikzcd}$$

Композиция функторов $S^{X'} \to S^f \to S^{X'}$ очевидно тождественна, а композиция $S^f \to S^{X'} \to S^f$ переводит

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & X' \arrow[d, "s'"] \\
Z \arrow[r, "\tilde{f}"] & Z'
\end{tikzcd} \quad \mapsto \quad \begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s'f"'] & X' \arrow[d, "s'"] \\
Z' \arrow[r, "\mathrm{id}"] & Z'
\end{tikzcd}$$

При этом диаграммы в правой части образуют кофинальную подкатегорию в S^f, откуда заключаем, что в этом случае морфизм β_f является изоморфизмом.

Пусть теперь $\tilde{F}(X) \in \mathcal{T}'$ — объект, представляющий функтор $rF(X)$. Из функториальности rF по X и леммы Ионеда следует, что $\tilde{F} : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ — функтор. При этом, так как rF переводит морфизмы из S в изоморфизмы, значит то же верно и для $\tilde{F}$, следовательно он пропускается через факторкатегорию $\tilde{F} : \mathcal{T}/\mathcal{N} \to \mathcal{T}'$.

Упражнение 5.7. Покажите, что функтор $\tilde{F}$ точен.

Проверим, что построенный функтор $\tilde{F}$ удовлетворяет универсальному свойству правого производного функтора.

По определению имеем

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}'}(Y, \tilde{F}(X)) = rF(X)(Y) = \varinjlim_{S^X} h_{F(Z)}(Y) = \varinjlim_{S^X} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}'}(Y, F(Z)).$$

Если $Y = F(X)$, то морфизм $\mathrm{id}_{F(X)} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}'}(F(X), F(X))$ (соответствующий морфизму $\mathrm{id}_X : X \to X$ из S^X) задает элемент предела, то есть морфизм $\rho_F(X) : F(X) \to \tilde{F}(X)$. Построение функториально по X, поэтому ρ_F — морфизм функторов $F \to \tilde{F} \circ Q$. Пусть теперь $\phi : F \to G \circ Q$ произвольный морфизм функторов. Построим морфизм $\phi' : \tilde{F} \to G$. Для этого достаточно для всех Y построить морфизмы $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}'}(Y, \tilde{F}(X)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}'}(Y, G(X))$, функториальные и по X и по Y. Рассмотрим произвольный каждого морфизм $s : X \to Z$ из S^X и произвольный морфизм $f : Y \to F(Z)$. Тогда последний из морфизмов в строке

$$Y \xrightarrow{\ f\ } F(Z) \xrightarrow{\ \phi_Z\ } G(Q(Z)) \xleftarrow{\ G(Q(s))\ } G(Q(X))$$

обратим, так что можно рассмотреть композицию $G(Q(s))^{-1} \circ \phi_Z \circ f : Y \to G(Q(X))$. Легко видеть, что тем самым получается морфизм $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}'}(Y, \tilde{F}(X)) = \varinjlim_{S^X} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}'}(Y, F(Z)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}'}(Y, G(X))$. Его функториальность очевидна, так что получаем искомый морфизм функторов. Чтобы проверить, что $\phi' \circ \rho_F = \phi$ достаточно подставить $Y = F(X)$, $\rho = \rho_F(X)$. Согласно определению последнего ϕ' переводит его в композицию $G(Q(\mathrm{id}_X))^{-1} \circ \phi_X \circ \mathrm{id}_{F(X)} = \phi_X$, что и требовалось.

Остается проверить, что построенный ϕ' единственен. В самом деле, так как в категории S^X есть начальный объект $\mathrm{id}_X : X \to X$, всякий морфизм $\phi' : \varinjlim_{S^X} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}'}(Y, F(Z)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}'}(Y, G(X))$ однозначно определяется морфизмом $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}'}(Y, F(X)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}'}(Y, G(X))$, то есть морфизмом $F(X) \to G(X)$, то есть композицией $\phi' \circ \rho_F$. □

В качестве следствия получаем такое утверждение

Лемма 5.8. *Пусть в $\mathcal{T}$ есть строго полная триангулированная подкатегория $\mathcal{T}_0$, такая что $F(\mathcal{N}_0) = 0$, а для каждого объекта $X \in \mathcal{T}$ найдется морфизм $X \to X_0$, такой что $X_0 \in \mathcal{T}_0$, конус которого лежит в $\mathcal{N}$. Тогда функтор F имеет правый производный. Причем $RF(X) \cong F(X_0)$. Аналогично, если $F(\mathcal{N}_0) = 0$, а для каждого объекта $X \in \mathcal{T}$ найдется морфизм $X_0 \to X$, такой что $X_0 \in \mathcal{T}_0$, конус которого лежит в $\mathcal{N}$, то функтор F имеет левый производный, причем $LF(X) \cong F(X_0)$.*

Доказательство. В самом деле, функтор $rF(X)$ изоморфен функтору $rF(X_0)$. Пусть $S_0 = S \cap \mathcal{T}$. Тогда категория $S_0^{X_0} \subset S^{X_0}$ кофинальна (по условию!), поэтому $rF_0(X_0) = \varinjlim_{S_0^{X_0}} h_{F(Z)} = \varinjlim_{S_0^X} h_{F(Z)} = rF(X_0)$, так что остается проверить представимость функтора $rF_0(X_0)$. Но так как $F_0(\mathcal{N}_0) = 0$, функтор $rF_0(X_0)$ представим объектом $F_0(X_0) = F(X_0)$, так что $RF(X) \cong F(X_0)$. □

Применяя к производным функторам, получаем следующее

Следствие 5.9. *Пусть $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — точный слева (справа) функтор. Если в $\mathcal{A}$ существует достаточно много F-ацикличных объектов, то F имеет правый (левый) производный функтор на категории $\mathcal{D}^+(\mathcal{A})$ (соотв. $\mathcal{D}^-(\mathcal{A})$), причем $RF(X) = F(A(X))$ (соотв. $LF(X) = F(A(X))$), где $A(X)$ — F-ацикличная резольвента.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{Acycl}^F(\mathcal{A})$ — F-ацикличные объекты. Положим $\mathcal{T}_0 = \mathrm{Hot}^*(\mathrm{Acycl}^F(\mathcal{A}))$, где $* = \pm$. Тогда условия леммы выполняются (то, что $F(\mathcal{N}_0) = 0$ было доказано в лекции 5). □

Пусть $(\mathcal{T}/\mathcal{N})^F \subset \mathcal{T}/\mathcal{N}$ — строго полная подкатегория в $\mathcal{T}/\mathcal{N}$, состоящая из всех объектов X, для которых функтор $rF(X)$ представим, а $(\mathcal{T}/\mathcal{N})_F \subset \mathcal{T}/\mathcal{N}$ — строго полная подкатегория в $\mathcal{T}/\mathcal{N}$, состоящая из всех объектов X, для которых функтор $lF(X)$ представим.

Упражнение 5.10. Покажите, что категории $(\mathcal{T}/\mathcal{N})^F$ и $(\mathcal{T}/\mathcal{N})_F$ в $\mathcal{T}/\mathcal{N}$ — триангулированные.

Они называются областью определения функтора RF (соотв. LF).

Также можно получить следующую интерпретацию. Согласно ней, правая и левая локализации функтора существуют всегда, задаются формулами $(\star)$, но принимают значения в пополнении $\varinjlim \mathcal{T}'$ или $\varprojlim \mathcal{T}'$ категории $\mathcal{T}'$ относительно прямых или обратных пределов соответственно. Тогда область определения функторов RF и LF — это прообраз подкатегории $\mathcal{T}' \subset \varinjlim \mathcal{T}'$ и $\mathcal{T}' \subset \varprojlim \mathcal{T}'$ относительно RF и LF соответственно.