Категории и функторы

Разнообразные группы (ко)гомологий встречаются в алгебре и геометрии повсеместно. Например,

(1) когомологии топологических пространств (с коэффициентами в пучке) — в топологии;
(2) группа Брауэра $H^2(\mathrm{Gal}(\mathsf{k}), \mathsf{k}^*)$ — в теории центральных простых алгебр;
(3) когомологии конечных и проконечных групп — в алгебраической теории чисел;
(4) группа расширений $\mathrm{Ext}^1(M, N)$ — в коммутативной алгебре;
(5) теория дефформаций и препятствий — в любом разделе геометрии.

Поэтому довольно важно понимать структуру когомологических функторов и иметь удобные средства для их вычисления. Наиболее естественной средой для этого является подходящая производная категория. Использование производных категорий позволяет единообразно работать с любыми когомологическими функторами, дает удобные средства для их вычисления и позволяет переносить результаты из одной области математики в другую. Иными словами, это наиболее приспособленный язык для такого рода вопросов.

Часть 1. Категории и функторы

Напомним, что **категория** $\mathcal{C}$ — это

- класс $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, элементы которого называются **объектами** $\mathcal{C}$;
- для каждой пары $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ множество $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, элементы которого называются **морфизмами** в $\mathcal{C}$ и обозначаются $\phi : X \to Y$;
- для каждой тройки $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ отображение $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$, которое называется **композицией морфизмов** и обозначается $\phi, \psi \mapsto \psi\phi = \psi \circ \phi$;

удовлетворяющие двум аксиомам

C1: для всякого объекта $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ существует **тождественный** морфизм $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$, для которого $\mathrm{id}_X \circ \phi = \phi$ и $\psi \circ \mathrm{id}_X = \psi$ для всех $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$, $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$;
C2: композиция морфизмов ассоциативна — $\chi \circ (\psi \circ \phi) = (\chi \circ \psi) \circ \phi$ для всех $X, Y, Z, W \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и $\chi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$, $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W)$.

Иногда для краткости мы будем писать $X \in \mathcal{C}$ вместо $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ и $\phi \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ вместо $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ (если ясно о какой категории идет речь).

Любые структуры, рассматриваемые в алгебре и геометрии являются объектами подходящей категории.

Примеры 1.1. (1) категория множеств Sets;
(2) категория топологических пространств Top;
(3) категория алгебраических многообразий над фиксированным полем $\mathsf{Var/k}$;
(4) категория групп Gr;
(5) категория абелевых групп Ab;
(6) категория колец Rings;
(7) категория коммутативных колец Comm;
(8) категории левых и правых модулей над кольцом $R{-}\mathsf{mod}$ и $\mathsf{mod}{-}R$;
(9) категория векторных расслоений на топологическом пространстве $\mathsf{VB}(X)$;
(10) категория пучков абелевых групп $\mathsf{Sh}(X)$;
(11) категория квазикогерентных пучков на алгебраическом многообразии $\mathsf{Qcoh}(X)$;
(12) пусть I — частично упорядоченное множество; положим $\mathrm{Ob}\,\mathcal{I} = I$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i, j) = \begin{cases} \{\,*\,\}, & \text{если } i \leqslant j \\ \emptyset, & \text{иначе} \end{cases}$.
(13) пусть Q — колчан (ориентированный граф); положим $\mathrm{Ob}\,\mathcal{Q} = \{\,\text{вершины } Q\,\}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Q}} = \{\,\text{пути в } Q\,\}$.
(14) пусть M — моноид с единицей; положим $\mathrm{Ob}\,*_M = \{\,*\,\}$, $\mathrm{Hom}_{*_M}(*, *) = M$.

Здесь $\{*\}$ обозначает множество из одного элемента.

Связи между разными категориями осущесвляются функторами. Ковариантный функтор F из категории $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{D}$ — это отображения $\operatorname{Ob}\mathcal{C} \to \operatorname{Ob}\mathcal{D}$, $X \mapsto F(X)$ и $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))$, $\phi \mapsto F(\phi)$ для всех $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$, такие что

$$\begin{aligned} F(\phi\circ\psi) &= F(\phi)\circ F(\psi), && \text{для всех } X,Y,Z \in \operatorname{Ob}\mathcal{C} \text{ и } \psi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y),\ \phi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z); \\ F(\mathrm{id}_X) &= \mathrm{id}_{F(X)}, && \text{для всех } X \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}. \end{aligned}$$

Примеры 1.2. (1) тождественный функтор $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$;
(2) функторы вложения $\mathsf{i} : \mathsf{Ab} \to \mathsf{Gr}$, $\mathsf{Comm} \to \mathsf{Rings}$;
(3) фукнторы забвения $\mathsf{fg} : \mathsf{Var/k} \to \mathsf{Top} \to \mathsf{Sets}$, $R\text{−}\mathsf{mod} \to \mathsf{Ab}$, $\mathsf{Gr} \to \mathsf{Sets}$, $\mathsf{Qcoh}(X) \to \mathsf{Sh}(X)$;
(4) функторы свободных объектов $\mathsf{fr} : \mathsf{Sets} \to \mathsf{Ab}, \mathsf{Gr}, \mathsf{Rings}, \mathsf{Comm}$;
(5) фактор по коммутанту $\mathsf{cm} : \mathsf{Gr} \to \mathsf{Ab}$;
(6) функтор сечений $\Gamma : \mathsf{VB}(X) \to \mathsf{Sh}(X)$;
(7) функтор из категории 1.1(12) в категорию $\mathcal{C}$ — это направленная система объектов в $\mathcal{C}$;
(8) функтор из категории 1.1(13) в $\mathcal{C}$ — это представление колчана Q в $\mathcal{C}$;
(9) функтор из категории 1.1(14) в $\mathcal{C}$ — это объект в $\mathcal{C}$ с действием M (или M-эквивариантный объект).

Также используются контравариантные функторы, меняющие направление морфизмов. Здесь полезно понятие противоположной категории. Если $\mathcal{C}$ — категория, определим категорию $\mathcal{C}^\circ$ так:

$$\operatorname{Ob}\mathcal{C}^\circ = \operatorname{Ob}\mathcal{C}, \qquad \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^\circ}(X,Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X).$$

Упражнение 1.3. Покажите, что $\mathcal{C}^\circ$ категория.

Контравариантный функтор из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{D}$ — это ковариантный функтор из $\mathcal{C}^\circ$ в $\mathcal{D}$.

Примеры 1.4. (1) кольцо функций $\mathsf{Top}^\circ, (\mathsf{Var/k})^\circ \to \mathsf{Comm}$;
(2) группа Галуа $(\mathsf{Fields/k})^\circ \to \mathsf{Gr}$.

Функторы можно компонировать.

Упражнение 1.5. Покажите, что композиция двух ковариантных или двух контравариантных функторов ковариантна, а композиция ковариантного и контравариантного функторов контравариантна. Проверьте, что операция компонирования функторов ассоциативна.

Функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ называется

- строгим, если морфизм $F : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))$ — вложение для всех $X,Y \in \mathcal{C}$;
- полным, если морфизм $F : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))$ — сюръекция для всех $X,Y \in \mathcal{C}$;
- строго полным или вполне строгим, если морфизм $F : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))$ — изоморфизм для всех $X,Y \in \mathcal{C}$.

Примеры 1.6. (1) функторы из примеров 1.2(1) и (2) строго полные;
(2) функторы из примеров 1.2(3) и (4) строгие, но не полные.

Определим декартово произведение категорий $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$. По определению

$$\operatorname{Ob}(\mathcal{C}\times\mathcal{D}) = \operatorname{Ob}\mathcal{C} \times \operatorname{Ob}\mathcal{D}, \qquad \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((X_1,Y_1),(X_2,Y_2)) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1,X_2) \times \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(Y_1,Y_2).$$

Функтор $F : \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \to \mathcal{D}$ называется также бифунктором.

Упражнение 1.7. Покажите, что $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^\circ \times \mathcal{C} \to \mathsf{Sets}$ — бифунктор.

Часть 2. Морфизмы функторов

Пусть $F, G : \mathcal{C} \to D$ — функторы. Морфизм функторов (или естественное преобразование) $\alpha : F \to G$ — это набор морфизмов $\alpha_X \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), G(X))$ для всех $X \in \mathcal{C}$, такой что

$$F(\phi)\circ\alpha_X = \alpha_Y \circ G(\phi) \qquad \text{для всех } X,Y \in \mathcal{C} \text{ и } \phi \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y).$$

Морфизмы функторов можно компонировать друг с другом и с функторами.

Упражнение 2.1. (a) Пусть $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, а $\alpha : F \to G$ и $\beta : G \to H$ — морфизмы функторов. Покажите, что $\beta \circ \alpha : F \to H$ — морфизм функторов. (b) Пусть $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$, $G, G' : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_3$ и $H : \mathcal{C}_3 \to \mathcal{C}_4$ — функторы, а $\alpha : G \to G'$ — морфизм функторов. Покажите, что $H \circ \alpha : H \circ G \to H \circ G'$ и $\alpha \circ F : G \circ F \to G' \circ F$ — морфизмы функторов.

Упражнение 2.2. Постройте морфизмы функторов (a) $\mathrm{id}_{\mathsf{Sets}} \to \mathsf{fg} \circ \mathsf{fr}$; (b) $\mathsf{fr} \circ \mathsf{fg} \to \mathrm{id}$; (c) $\mathrm{id}_{\mathsf{Gr}} \to \mathsf{i} \circ \mathsf{cm}$; (d) $\mathsf{cm} \circ \mathsf{i} \to \mathrm{id}_{\mathsf{Ab}}$.

Упражнение 2.3. Покажите, что если категория $\mathcal{C}$ — малая (то есть $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ — множество), то для любой категории $\mathcal{D}$ все функторы из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{D}$ образуют категорию $\mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$.

Упражнение 2.4. Покажите, что $\mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})^\circ \cong \mathsf{Fun}(\mathcal{C}^\circ, \mathcal{D}^\circ)$.

Морфизм функторов $\alpha : F \to G$ называется изоморфизмом, если существует морфизм функторов $\beta : G \to F$, такой что $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_F$, $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_G$.

Замечание 2.5. Таким образом, все малые категории с функторами в качестве морфизмов образуют категорию Cats. На самом деле, ее естественнее рассматривать как 2-категорию — помимо объектов и морфизмов в ней есть 2-морфизмы (то есть морфизмы между морфизмами — в нашем примере естественные преобразования функторов). При этом Cats является строгой 2-категорией (композиция 1-морфизмов ассоциативна), хотя вообще в 2-категориях композиция 1-морфизмов предполагается ассоциативной только с точностью до 2-изоморфизма.

Функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ называется эквивалентностью, если существует функтор $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, так что $F \circ G \cong \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ и $G \circ F \cong \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$. Функтор G называется квазиобратным к F.

Замечание 2.6. Более привычно выглядит понятие изоморфизма категорий, в отличии от эквивалентности, предполагающего равенства $F \circ G = \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ и $G \circ F = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$. Однако, на практике, изоморфизмов категорий практически не встречается, в то время как содержательных эквивалентностей весьма много.

Упражнение 2.7. Пусть $\mathsf{Cov}(X)$ — категория накрытий топологического пространства X, а G-Sets — категория множеств с действием группы $G = \pi_1(X, x_0)$, где $x_0 \in X$ — фиксированная точка. Покажите, что функтор $(p : Y \to X) \mapsto p^{-1}(x_0)$ — эквивалентность (но не изоморфизмом!) этих категорий.

Упражнение 2.8. Покажите, что $\mathsf{Fun}(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2, \mathcal{D}) \cong \mathsf{Fun}(\mathcal{C}_1, \mathsf{Fun}(\mathcal{C}_2, \mathcal{D}))$.

Легко видеть, что всякая эквивалентность является строго полным функтором и индуцирует изоморфизм множеств классов изоморфизма объектов. Верно и обратное.

Лемма 2.9. *Функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ является эквивалентностью $\iff$ F строго полон и существенно сюръективен, то есть $\forall Y \in \mathcal{D}\ \exists X \in \mathcal{C}$ такой что $F(X) \cong Y$.*

Доказательство будет дано чуть позже.

Часть 3. Представимые функторы

Пусть $\mathcal{C}$ — категория. Всякому объекту $X \in \mathcal{C}$ сопоставим функторы

$$h_X : \mathcal{C}^\circ \to \mathsf{Sets}, \quad Y \mapsto \mathrm{Hom}(Y, X), \qquad h^X : \mathcal{C} \to \mathsf{Sets}, \quad Y \mapsto \mathrm{Hom}(X, Y).$$

Функтор $F : \mathcal{C}^\circ \to \mathsf{Sets}$ называется представимым, если он изоморфен функтору h_X для какого-либо $X \in \mathcal{C}$. Аналогично, функтор $F : \mathcal{C} \to \mathsf{Sets}$ называется копредставимым, если он изоморфен функтору h^X для какого-либо $X \in \mathcal{C}$. Объект X в этом случае, называется представляющим (копредставляющим) функтор F.

Упражнение 3.1. Покажите, что (a) функторы забвения $\mathsf{fg} : \mathsf{Top}, \mathsf{Gr}, \mathsf{Ab}, \mathsf{Rings}, \mathsf{Comm} \to \mathsf{Sets}$ копредставимы; (b) функтор $\mathsf{Top}^\circ \longrightarrow \mathsf{Comm} \xrightarrow{\mathsf{fg}} \mathsf{Sets}$ представим.

Очень полезным утверждением является лемма Ионеды.

Лемма 3.2. (*a*) *Для всех $X \in \mathcal{C}$, $F \in \mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathsf{Sets})$ имеем $\mathrm{Hom}(h^X, F) \cong F(X)$.*
(*b*) *Для всех $X \in \mathcal{C}$, $F \in \mathsf{Fun}(\mathcal{C}^\circ, \mathsf{Sets})$ имеем $\mathrm{Hom}(h_X, F) \cong F(X)$.*
(*c*) $\mathrm{Hom}(h^X, h^Y) \cong \mathrm{Hom}(Y, X)$, $\mathrm{Hom}(h_X, h_Y) \cong \mathrm{Hom}(X, Y)$.

Доказательство. Докажем пункт (b) (пункт (a) доказывается аналогично, а (c) очевидно следует из (a) и (b)). Пусть $s \in F(X)$, $Y \in \mathcal{C}$. Рассмотрим морфизм $s_Y : h_X(Y) = \mathrm{Hom}(Y, X) \to F(Y)$, $\phi \mapsto F(\phi)(s)$ (заметим, что $F(\phi) \in \mathrm{Hom}(F(X), F(Y))$ так как F контравариантен). Легко видеть, что морфизмы s_Y образуют морфизм функторов $h_X \to F$. Обратно, пусть $\alpha : h_X \to F$ — морфизм функторов. Тогда $\alpha_X : h_X(X) \to F(X)$ — отображение множеств. Заметим, что $h_X(X) = \mathrm{Hom}(X, X) \ni \mathrm{id}_X$. Рассмотрим $s = \alpha_X(\mathrm{id}_X) \in F(X)$.

Таким образом мы построили отображения между множествами $\mathrm{Hom}(h_X, F)$ и $F(X)$. Покажем, что они взаимно обратны. В самом деле, $s_X(\mathrm{id}_X) = F(\mathrm{id}_X)(s) = \mathrm{id}_{F(X)}(s) = s$. Остается показать, что $\alpha_Y = s_Y$ для всех Y. Для этого для каждого $\phi \in \mathrm{Hom}(Y, X)$ рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} h_X(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "h_X(\phi)"'] & F(X) \arrow[d, "F(\phi)"] \\ h_X(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"] & F(Y) \end{tikzcd}$$

Ясно, что $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}(X, X) = h_X(X)$ верхней стрелкой переводится в s, который правой стрелкой переводится в $F(\phi)(s)$. С другой стороны, левой стрелкой id_X переводится в $\phi \in \mathrm{Hom}(Y, X) = h_X(Y)$, который нижней стрелкой переводится в $\alpha_Y(\phi)$. Значит $\alpha_Y(\phi) = F(\phi)(s) = s_Y(\phi)$. □

Следствие 3.3. *Если функтор $F : \mathcal{C}^\circ \to \mathsf{Sets}$ представим, то объект, представляющий его, определен однозначно с точностью до изоморфизма. То же относится и к копредставимым функторам.*

Доказательство. Пусть $h_X \cong F \cong h_Y$. Тогда изоморфизм $h_X \cong h_Y$ дает изоморфизм $X \cong Y$. □

Упражнение 3.4. Покажите, что если $\mathcal{C}$ — малая категория, то функторы $h_* : \mathcal{C} \to \mathsf{Fun}(\mathcal{C}^\circ, \mathsf{Sets})$, $X \mapsto h_X$ и $h^* : \mathcal{C}^\circ \to \mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathsf{Sets})$, $X \mapsto h^X$ — строго полные функторы.

Представимые функторы часто используются для категорной переформулировки стандартных конструкций. Пусть $X_1, X_2 \in \mathcal{C}$. Рассмотрим функтор $h_{X_1} \times h_{X_2} : \mathcal{C}^\circ \to \mathsf{Sets}$, $X \mapsto \mathrm{Hom}(X, X_1) \times \mathrm{Hom}(X, X_2)$. Объект, представляющий этот функтор (если он представим), называется произведением объектов X_1 и X_2. Аналогично, копроизведением объектов X_1 и X_2 называется объект, копредставляющий функтор $h^{X_1} \times h^{X_2}$ (если он копредставим). Аналогично определяются произведения и копроизведения любого множества объектов.

Упражнение 3.5. (a) Докажите, что в категориях Sets, Gr, Ab, Rings, Comm, $R{-}\mathsf{mod}$, $\mathsf{Qcoh}(X)$ существуют произведения и копроизведения любого множества объектов. (b) Проверьте, что произведение в категории Comp компактных топологических пространств существует и является тихоновским произведением.

Другой пример — начальный и конечный объекты. Начальный объект — это объект $0_{\mathcal{C}}$, копредставляющий функтор $I(X) = \{*\}$ для всех $X \in \mathcal{C}$, а конечный объект — это объект $1_{\mathcal{C}}$, представляющий функтор $T(X) = \{*\}$ для всех $X \in \mathcal{C}$.

Упражнение 3.6. Покажите, что если $\mathrm{Hom}(1_{\mathcal{C}}, 0_{\mathcal{C}}) \neq \emptyset$, то $0_{\mathcal{C}} \cong 1_{\mathcal{C}}$. Найдите начальный и конечный объекты в категориях Sets и других категориях.

Часть 4. Сопряженные функторы

Пусть $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ — функторы. Говорят, что F — сопряжен слева к G, а G — сопряжен справа к F, если для всех $X \in \mathcal{C}$, $Y \in \mathcal{D}$ заданы изоморфизмы $\xi_{X,Y} : \mathrm{Hom}(F(X), Y) \cong \mathrm{Hom}(X, G(Y))$ функториальные по обоим аргументам (то есть, при фиксированном X морфизмы $\xi_{X,-} : \mathrm{Hom}(F(X), -) \to \mathrm{Hom}(X, G(-))$ функториальны, и при фиксированном Y морфизмы $\xi_{-,Y} : \mathrm{Hom}(F(-), Y) \to \mathrm{Hom}(-, G(Y))$ функториальны).

Примеры 4.1. (1) тождественный функтор сопряжен сам себе;
(2) функтор $\mathsf{cm} : \mathsf{Gr} \to \mathsf{Ab}$ из примера 1.2(5) сопряжен слева к функтору вложения $\mathsf{i} : \mathsf{Ab} \to \mathsf{Gr}$;
(3) функторы fr из примера 1.2(4) сопряжены слева к функторам fg из примера 1.2(3).
(4) если $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ — эквивалентность, а $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ — квазиобратный функтор, то G сопряжен к F справа и слева.

Лемма 4.2. *Пусть (F, G) — пара сопряженных функторов. Тогда существуют морфизмы функторов $\epsilon : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F$ и $\eta : F \circ G \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$, такие что $\xi_{X,Y}(\phi) = G(\phi) \circ \epsilon_X$, а $\xi^{-1}_{X,Y}(\psi) = \eta_Y \circ F(\psi)$.*

Доказательство. Заметим, что $\mathrm{Hom}(X, G(F(X))) \cong \mathrm{Hom}(F(X), F(X))$ по сопряженности. Обозначим черех $\epsilon_X \in \mathrm{Hom}(X, G(F(X)))$ морфизм, соответствующий морфизму $\mathrm{id}_{F(X)} \in \mathrm{Hom}(F(X), F(X))$. Аналогично, η_Y соответствует $\mathrm{id}_{G(Y)}$ при изоморфизме $\mathrm{Hom}(F(G(Y)), Y) \cong \mathrm{Hom}(G(Y), G(Y))$. В силу функториальности изоморфизма ξ имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(F(X), F(X)) \arrow[r, "\xi_{X,F(X)}"] \arrow[d, "\phi"'] & \mathrm{Hom}(X, G(F(X))) \arrow[d, "G(\phi)"] \\ \mathrm{Hom}(F(X), Y) \arrow[r, "\xi_{X,Y}"] & \mathrm{Hom}(X, G(Y)) \end{tikzcd}$$

Морфизм id_X одной парой стрелок переводится в $\xi_{X,Y}(\phi)$, а другой — в $G(\phi) \circ \epsilon_X$. Второе равенство проверяется аналогично. □

Лемма 4.3. *Функторы F и G сопряжены друг другу $\Longleftrightarrow$ найдутся морфизмы функторов $\epsilon : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F$ и $\eta : F \circ G \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$, такие что композиции $F \xrightarrow{F\epsilon} F \circ G \circ F \xrightarrow{\eta F} F$ и $G \xrightarrow{\epsilon G} G \circ F \circ G \xrightarrow{G\eta} G$ тождественны.*

Доказательство. Пусть вначале F сопряжен слева к G. Определим ϵ и η как в лемме 4.2. Тогда для любого морфизма $\phi \in \mathrm{Hom}(F(X), Y)$ имеем $\phi = \xi^{-1}_{X,Y}(\xi_{X,Y}(\phi)) = \eta_Y \circ F(G(\phi) \circ \epsilon_X) = \eta_Y \circ F(G(\phi)) \circ F(\epsilon_X)$. Подставим $Y = F(X)$, $\phi = \mathrm{id}_{F(X)}$. Получим $\mathrm{id}_{F(X)} = \eta_{F(X)} \circ F(G(\mathrm{id}_X)) \circ F(\epsilon_X) = \eta_{F(X)} \circ F(\epsilon_X)$, то есть тождественность первой композиции. Тождественность второй проверяется аналогично.

Пусть теперь F и G произвольные, а ϵ и η заданы. Зададим морфизмы $\xi_{X,Y} : \mathrm{Hom}(F(X), Y) \to \mathrm{Hom}(X, G(Y))$ и $\xi'_{X,Y} : \mathrm{Hom}(X, G(Y)) \to \mathrm{Hom}(F(X), Y)$ формулами $\xi_{X,Y}(\phi) = G(\phi) \circ \epsilon_X$ и $\xi'_{X,Y}(\psi) = \eta_Y \circ F(\psi)$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(\epsilon_X)"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{F(X)}"'] & F(G(F(X))) \arrow[r, "F(G(\phi))"] \arrow[d, "\eta_{F(X)}"] & F(G(Y)) \arrow[d, "\eta_Y"] \\ & F(X) \arrow[r, "\phi"] & Y \end{tikzcd}$$

В ней квадрат коммутативен в силу функториальности η, а треугольник — по условию. Отсюда получаем $\phi = \phi \circ \mathrm{id}_{F(X)} = \eta_Y \circ F(G(\phi)) \circ F(\epsilon_X) = \eta_Y \circ F(G(\phi) \circ \epsilon_X) = \xi'_{X,Y}(\xi_{X,Y}(\phi))$. Равенство $\xi_{X,Y}(\xi'_{X,Y}(\psi)) = \psi$ проверяется аналогично. □

Лемма 4.4. *Функтор F имеет правый сопряженный $\Longleftrightarrow$ функтор $\mathrm{Hom}(F(-), Y)$ представим для всех $Y \in \mathcal{D}$. Функтор G имеет левый сопряженный $\Longleftrightarrow$ функтор $\mathrm{Hom}(X, G(-))$ копредставим для всех $X \in \mathcal{C}$.*

Доказательство. Выберем изоморфизмы $\mathrm{Hom}(F(-), Y) \cong h_{Y'}$ для всех $Y \in \mathcal{D}$ и положим $G(Y) = Y'$. Рассмотрим морфизм $\phi : Y_1 \to Y_2$. Композиция $h_{G(Y_1)} \cong \mathrm{Hom}(F(-), Y_1) \xrightarrow{\phi} \mathrm{Hom}(F(-), Y_2) \cong h_{G(Y_2)}$ индуцирует некоторый морфизм $G(Y_1) \to G(Y_2)$, что задает дейтсвие G на морфизмах. Функториальность очевидна. □

Воспользуемся полученными результатами для доказательства леммы 2.9. Действительно, если F строго полон и существенно сюръективен, то для всякого $Y \in \mathcal{D}$ существует $X \in \mathcal{C}$, такой что $F(X) \cong Y$, значит $\mathrm{Hom}(F(-), Y) \cong \mathrm{Hom}(F(-), F(X)) \cong \mathrm{Hom}(-, X) = h_X$ — представимый функтор, следовательно существует правый сопряженный к F функтор G. Пусть $\epsilon : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to G \circ F$ и $\eta : F \circ G \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ — соответствующие морфизмы функторов. Покажем, что они изоморфизмы. Рассмотрим вначале морфизм $\epsilon_X : X \to G(F(X))$. Применяя функтор $\mathrm{Hom}(X', -)$ получаем морфизм $\mathrm{Hom}(X', X) \to \mathrm{Hom}(X', G(F(X)))$, являющийся композицией морфизма $F : \mathrm{Hom}(X', X) \to \mathrm{Hom}(F(X'), F(X))$ и $\xi_{X', F(X)} : \mathrm{Hom}(F(X'), F(X)) \to \mathrm{Hom}(X', G(F(X))$, и следовательно изоморфизмом. Значит ϵ_X индуцирует изоморфизм представимых функторов $h_X \cong h_{G(F(X))}$, а значит и сам является изоморфизмом. Рассмотрим теперь морфизм $\eta_Y : F(G(Y)) \to Y$. Применяя функтор $\mathrm{Hom}(F(X), -)$ получаем морфизм $\mathrm{Hom}(F(X), F(G(Y))) \to \mathrm{Hom}(F(X), Y)$. Его композиция с морфизмом $F : \mathrm{Hom}(X, G(Y)) \to \mathrm{Hom}(F(X), F(G(Y)))$ равна морфизму $\xi^{-1}_{X,Y} : \mathrm{Hom}(X, G(Y)) \to \mathrm{Hom}(F(X), Y)$, следовательно является изоморфизмом. Но всякий объект $Y' \in \mathcal{D}$ изоморфен объекту $F(X)$ для подходящего

X, значит морфизм $\mathrm{Hom}(Y', F(G(Y))) \to \mathrm{Hom}(Y', Y)$ тоже является изоморфизмом. Таким образом η_Y индуцирует изоморфизм представимых функторов $h_{F(G(Y))} \cong h_Y$, а значит и сам является изоморфизмом.

В завершение, приведем пример функторов, определяемых через понятие сопряженности. Пусть $\mathcal{I}$ — малая категория (рассматриваемая как категория индексов). Рассмотрим функтор проекции $\mathcal{C} \times \mathcal{I} \to \mathcal{C}$. В силу Упр. 2.8 он дает функтор $\mathcal{C} \to \mathsf{Fun}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$, который мы будем называть постоянным функтором и обозначать Δ. Для всякого $F \in \mathsf{Fun}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ рассмотрим функторы $\mathcal{C} \to \mathsf{Sets}$

$$Y \mapsto \mathrm{Hom}(\Delta(Y), F) \qquad \text{и} \qquad Y \mapsto \mathrm{Hom}(F, \Delta(Y)):$$

(первый контравариантен, второй ковариантен). Если эти функторы (ко)представимы, то (ко)представляющий объект называется **обратным пределом** (или просто **пределом**) функтора F по категории $\mathcal{I}$ и обозначается $\varprojlim_{\mathcal{I}} F(i)$ в первом случае, и **прямым пределом** (или **копределом**) функтора F по категории $\mathcal{I}$ и обозначается $\varinjlim_{\mathcal{I}} F(i)$ во втором. В силу свойств представимых функторов, если пределы существуют, то определены однозначно (с точностью до изоморфизма). Более того, если пределы определены для всех F, они являются функторами $\varprojlim_{\mathcal{I}} : \mathsf{Fun}(\mathcal{I}, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ и $\varinjlim_{\mathcal{I}} : \mathsf{Fun}(\mathcal{I}, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ соответственно.

Упражнение 4.5. (a) Покажите, что если категория $\mathcal{I}$ **дискретна** (то есть $\mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i, j) = \emptyset$ для $i \neq j$), то $\varprojlim_{\mathcal{I}} \cong \prod_{\mathcal{I}}$ и $\varinjlim_{\mathcal{I}} \cong \coprod_{\mathcal{I}}$. (b) Обозначим через $\mathcal{I}_{\mathrm{discr}}$ дискретную категорию с $\mathrm{Ob}\,\mathcal{I}_{\mathrm{discr}} = \mathrm{Ob}\,\mathcal{I}$. Постройте морфизмы функторов $\varprojlim_{\mathcal{I}} \to \prod_{\mathcal{I}_{\mathrm{discr}}}$ и $\coprod_{\mathcal{I}_{\mathrm{discr}}} \to \varinjlim_{\mathcal{I}}$.

Абелевы категории

Часть 5. Аддитивные категории

Категория $\mathcal{C}$ называется $\mathbb{Z}$-категорией, если

AB1: на множествах $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ заданы структуры абелевых групп, так что отображение композиции $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)\times\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)$ билинейно.

Аддитивная категория — это $\mathbb{Z}$-категория $\mathcal{A}$, в которой

AB2: начальный $0_{\mathcal{A}}$ и конечный $1_{\mathcal{A}}$ объект существуют и равны, т.е. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(0_{\mathcal{A}},X)=\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,0_{\mathcal{A}})=0$;
AB3: сущестуют попарные (а значит и конечные) произведения.

Упражнение 5.1. Категории абелевых групп Ab, левых и правых модулей над кольцом R–mod и mod–R, векторных расслоений на топологическом пространстве $\mathsf{VB}(X)$, пучков абелевых групп $\mathsf{Sh}(X)$ и квазикогерентных пучков на алгебраическом многообразии $\mathsf{Qcoh}(X)$ аддитивны. Категория $*_M$ является $\mathbb{Z}$-категорией $\iff M$ — кольцо с единицей, но не является аддитивной.

Упражнение 5.2. Если $\mathcal{A}$ — аддитивная категория, то категория $\mathsf{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{A})$ аддитивна для любой малой категории $\mathcal{C}$.

Лемма 5.3. *В аддитивной категории произведение является также и копроизведением:* $X\sqcup Y\cong X\times Y$.

Доказательство. Напомним, что $\mathrm{Hom}(Z,X\times Y)=\mathrm{Hom}(Z,X)\times\mathrm{Hom}(Z,Y)$. Морфизм $\mathrm{id}_{X\times Y}$ дает пару морфизмов $p_X:X\times Y\to X$ и $p_Y:X\times Y\to Y$, причем вышеуказанный изоморфизм переводит $\phi\in\mathrm{Hom}(Z,X\times Y)$ в $(p_X\circ\phi,p_Y\circ\phi)$ (это следует из доказательства леммы Ионеды — изоморфизм $\mathrm{Hom}(Z,U)=h_U(Z)\cong F(Z)$ задается применением морфизма $F(\phi):F(U)\to F(Z)$ к образу $\mathrm{id}_U\in h_U(U)$ в $F(U)$). Обозначим через $i_X:X\to X\times Y$ морфизм, соответствующий паре $(\mathrm{id}_X,0)\in\mathrm{Hom}(X,X)\times\mathrm{Hom}(X,Y)$, а через $i_Y:Y\to X\times Y$ морфизм, соответствующий паре $(0,\mathrm{id}_Y)\in\mathrm{Hom}(Y,X)\times\mathrm{Hom}(Y,Y)$. Тогда в силу вышеприведенного замечания имеем

$$p_X\circ i_X=\mathrm{id}_X,\quad p_Y\circ i_X=0,\qquad p_X\circ i_Y=0,\quad p_Y\circ i_Y=\mathrm{id}_Y\,. \tag{1}$$

Заметим также, что выполняется равенство

$$i_X\circ p_X+i_Y\circ p_Y=\mathrm{id}_{X\times Y}\,. \tag{2}$$

В самом деле, $p_X\circ(i_X\circ p_X+i_Y\circ p_Y)=(p_X\circ i_X)\circ p_X+(p_X\circ i_Y)\circ p_Y=\mathrm{id}_X\circ p_X+0\circ p_Y=p_X$ и аналогично $p_Y\circ(i_X\circ p_X+i_Y\circ p_Y)=p_Y$. Теперь построим морфизмы между $\mathrm{Hom}(X,Z)\times\mathrm{Hom}(Y,Z)$ и $\mathrm{Hom}(X\times Y,Z)$ формулами

$$(\phi,\psi)\mapsto\phi\circ p_X+\psi\circ p_Y,\qquad \chi\mapsto(\chi\circ i_X,\chi\circ i_Y).$$

Легко видеть, что $\chi\circ i_X\circ p_X+\chi\circ i_Y\circ p_Y=\chi\circ(i_X\circ p_X+i_Y\circ p_Y)=\chi$, $(\phi\circ p_X+\psi\circ p_Y)\circ i_X=\phi\circ p_X\circ i_X+\psi\circ p_Y\circ i_X=\phi$ и аналогично $(\phi\circ p_X+\psi\circ p_Y)\circ i_Y=\psi$. Таким образом $h^{X\times Y}\cong h^X\times h^Y$, что и требовалось. □

Упражнение 5.4. Покажите, что в аддитивной категории любые конечные произведения существуют и совпадают с копроизведениями. Проверьте, что при этом бесконечные копроизведения вообще говоря отличаются от произведений.

В дальнейшем, для обозначении конечных (ко)произведений в аддитивной категории будем пользоваться знаком $\oplus$.

Упражнение 5.5. Пусть Z — объект в аддитивной категории $\mathcal{A}$ и даны морфизмы $i'_X:X\to Z$, $i'_Y:Y\to Z$, $p'_X:Z\to X$, $p'_Y:Z\to Y$, удовлетворяющие условиям (1) и (2). Покажите, что существует единственный изоморфизм $\phi:Z\to X\times Y$, для которого $p_X\circ\phi=p'_X$, $p_Y\circ\phi=p'_Y$, $\phi\circ i'_X=i_X$, $\phi\circ i'_Y=i_Y$.

Для любых объектов X, Y в произвольной категории $\mathcal{C}$ определены морфизмы $\Delta_X = \mathrm{id}_X \times \mathrm{id}_X : X \to X \times X$ и $\nabla_Y = \mathrm{id}_Y \sqcup \mathrm{id}_Y : Y \sqcup Y \to Y$. Кроме того, для любых $f \in \mathrm{Hom}(X_1, Y_1)$, $g \in \mathrm{Hom}(X_1, Y_2)$ определен морфизм $f \times g : \mathrm{Hom}(X_1 \times X_2, Y_1 \times Y_2)$ (он соответствует морфизмам $f \circ p_{X_1} : X_1 \times X_2 \to X_1 \to Y_1$ и $g \circ p_{X_2} : X_1 \times X_2 \to X_2 \to Y_2$).

Упражнение 5.6. Пусть $\mathcal{A}$ — аддитивна, $f, g \in \mathrm{Hom}(X, Y)$. Покажите, что $f + g = \nabla_Y \circ (f \times g) \circ \Delta_X$.

Замечание 5.7. Отсюда видно, что аддитивность — это не дополнительная структура на категории, а ее свойство. Категрия $\mathcal{C}$ аддитивна $\iff$ в $\mathcal{C}$ существуют начальный объект, совпадающий с конечным, произведения, совпадающие с копроизведениями, и операция, определяемая формулой из упражнения задает структуру абелевой группы на морфизмах, относительно которой композиция билинейна.

Упражнение 5.8. Покажите, что (a) если $\mathcal{A}$ аддитивна, то $\mathcal{A}^\circ$ тоже аддитивна; (b) если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ аддитивны, то $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ тоже аддитивна.

Часть 6. Аддитивные функторы

Функтор $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ между аддитивными категориями аддитивен, если $F : \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(F(X), F(Y))$ — гомоморфизм абелевых групп для всех $X, Y \in \mathcal{A}$.

Примеры 6.1. Следующие функторы аддитивны:

(1) функтор забвения $\mathsf{fg} : R-\mathsf{mod} \to \mathsf{Ab}$;
(2) функтор сечений $\Gamma : \mathsf{VB}(X) \to \mathsf{Sh}(X)$;
(3) функтор прямой суммы $\oplus : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$;
(4) тензорное умножение на R-модуль $R-\mathsf{mod} \to \mathsf{Ab}$ (если R коммутативно, то $R-\mathsf{mod} \to R-\mathsf{mod}$);
(5) ограничения скаляров $B-\mathsf{mod} \to A-\mathsf{mod}$, если B — A-алгебра;
(6) расширения скаляров $A-\mathsf{mod} \to B-\mathsf{mod}$, если B — A-алгебра;
(7) функторы прямого и обратного образа $f_* : \mathsf{Sh}(X) \to \mathsf{Sh}(Y)$, $f^* : \mathsf{VB}(Y) \to \mathsf{VB}(X)$, если $f : X \to Y$ морфизм многообразий.

Пример важного неаддитивного функтора — функтор тензорного квадрата $M \mapsto M \otimes M$, R–$\mathsf{mod} \to R$–mod, где R — коммутативное кольцо.

Лемма 6.2. *Если $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — аддитивный функтор между аддитивными категориями, то существует канонический изоморфизм $F(X \oplus Y) \cong F(X) \oplus F(Y)$.*

Доказательство. Применим к (1) и (2) функтор F и воспользуемся упражнением 5.5. □

Упражнение 6.3. Покажите, что категория $\mathsf{Fun}_{\mathsf{add}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ аддитивных функторов аддитивна и является строго полной подкатегорией в $\mathsf{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Упражнение 6.4. Покажите, что эквивалентность $\mathsf{Fun}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mathcal{C}) \cong \mathsf{Fun}(\mathcal{A}, \mathsf{Fun}(\mathcal{B}, \mathcal{C}))$ отождествляет подкатегории $\mathsf{Fun}_{\mathsf{add}}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mathcal{C})$ и $\mathsf{Fun}_{\mathsf{add}}(\mathcal{A}, \mathsf{Fun}_{\mathsf{add}}(\mathcal{B}, \mathcal{C}))$.

Если категория $\mathcal{A}$ аддитивна, то $h_X(Y) = \mathrm{Hom}(Y, X)$ — абелева группа. Значит представимый функтор h_X мы можем (и будем!) рассматривать как функтор $\mathcal{A}^\circ \to \mathsf{Ab}$ (а функтор h_X в старом смысле получается его композицией с $\mathsf{fg} : \mathsf{Ab} \to \mathsf{Sets}$). То же относится и к копредставимым функторам.

Упражнение 6.5. Покажите, что (ко)представимые функторы аддитивны. Проверьте, что функторы $h_* : \mathcal{A} \to \mathsf{Fun}_{\mathsf{add}}(\mathcal{A}^\circ, \mathsf{Ab})$ и $h^* : \mathcal{A}^\circ \to \mathsf{Fun}_{\mathsf{add}}(\mathcal{A}, \mathsf{Ab})$ аддитивны.

Лемма 6.6. *Пусть $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — аддитивный функтор между аддитивными категориями. Если F обладает сопряженным функтором G, то G также аддитивен, а изоморфизм сопряжения согласован со структурами абелевых групп.*

Доказательство. Разберем случай, когда G — правый сопряженный к F. Тогда изоморфизм сопряжения $\mathrm{Hom}(X, G(Y)) \to \mathrm{Hom}(F(X), Y)$ задается формулой $\psi \mapsto \eta_Y \circ F(\psi)$, где $\eta : F \circ G \to \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ — коединица сопряжения. Отображение $\psi \mapsto F(\psi)$ аддитивно, так как функтор F аддитивен, а отображение $\phi \mapsto \eta_Y \circ \phi$ аддитивно, так как категория $\mathcal{B}$ аддитивна. Наконец аддитивность функтора G следует из упр. 6.4 — функтор $\mathrm{Hom}(-, G(-)) \cong \mathrm{Hom}(F(-), -) : \mathcal{A}^\circ \times \mathcal{B} \to \mathsf{Ab}$ аддитивен в силу аддитивности F, значит G тоже аддитивен. □

Часть 7. Абелевы категории

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — аддитивные категории, а $\alpha : F \to G$ — морфизм аддитивных функторов из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$. Определим функтор $\mathrm{Ker}\,\alpha$ формулой

$$\mathrm{Ker}\,\alpha(X) := \mathrm{Ker}(F(X) \xrightarrow{\alpha_X} G(X)).$$

Легко видеть, что это аддитивный функтор. В самом деле, для всякого морфизма $\phi : X \to Y$ имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\,\alpha(X) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & F(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "F(\phi)"'] & G(X) \arrow[d, "G(\phi)"'] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\,\alpha(Y) \arrow[r] & F(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

Легко видеть, что пунктирная стрелка существует и единственна, откуда следует функториальность ядра, а также его аддитивность. Кроме того, ясно что из функтора $\mathrm{Ker}\,\alpha$ есть естественный морфизм в функтор F, являющийся вложением.

Пусть теперь $f : X \to Y$ — морфизм в аддитивной категории $\mathcal{A}$. **Ядром** f называется объект $\mathrm{Ker}\,f$, представляющий функтор $\mathrm{Ker}\,h_f : h_X \to h_Y$ (если он существует), а **коядром** f называется объект $\mathrm{Coker}\,f$, копредставляющий функтор $\mathrm{Ker}\,h^f : h^Y \to h^X$ (если он существует). Заметим, что морфизмы функторов $\mathrm{Ker}\,h_f \to h_X$ и $\mathrm{Ker}\,h^f \to h^Y$ по лемме Ионеды дают морфизмы $\kappa : \mathrm{Ker}\,f \to X$ и $\gamma : Y \to \mathrm{Coker}\,f$.

Упражнение 7.1. Покажите, что в категориях Ab, $R-\mathsf{mod}$, $\mathsf{mod}-R$ категорные ядра и коядра совпадают с обычными ядрами и коядрами.

С коядрами в категории пучков ситуация сложнее. Дело в том, что наивное коядро морфизма пучков не является пучком (оно только предпучок). Однако, функтор вложения $\mathsf{Sh}(X) \to \mathsf{PreSh}(X)$ категории пучков в категорию предпучков обладает левым сопряженным функтором $a : \mathsf{PreSh}(X) \to \mathsf{Sh}(X)$ (функтором пучковизации) и можно показать, что пучковизация наивного ядра является ядром в категорном смысле.

Упражнение 7.2. Пусть $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ — строго полная аддитивная подкатегория в аддитивной категории, и пусть функтор вложения $i : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ (он автоматически аддитивен) обладает левым сопряженным функтором $a : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Покажите, что если морфизм $i(f) : i(X) \to i(Y)$ имеет ядро в $\mathcal{B}$, то $a(\mathrm{Ker}\,i(f))$ — ядро морфизма f в $\mathcal{A}$.

Лемма 7.3. *Пусть $f : X \to Y$ — произвольный морфизм.*
(*a*) *Если $\exists\,\mathrm{Ker}\,f$ и $g : X' \to X$, то $f \circ g = 0 \iff g = \kappa \circ g'$ для некоторого единственного $g' : X' \to \mathrm{Ker}\,f$.*
(*b*) *Если $\exists\,\mathrm{Coker}\,f$ и $h : Y \to Y'$, то $h \circ f = 0 \iff h = h' \circ \gamma$ для некоторого единственного $h' : \mathrm{Coker}\,f \to Y'$.*

Доказательство. Докажем (a). Ясно, что $f \circ g = 0 \iff g \in h_X(X')$ лежит в ядре $h_f : h_X(X') \to h_Y(X')$, то есть в $(\mathrm{Ker}\,h_f)(X')$, что равносильно тому, что $g = \kappa \circ g'$ для некоторого $g' : X' \to \mathrm{Ker}\,f$. Такой морфизм g' единственнен, так как $(\mathrm{Ker}\,h_f)(X') \subset h_X(X')$. □

Упражнение 7.4. Предположим, что в аддитивной категории $\mathcal{A}$ существуют ядра у всех морфизмов. Покажите, что $(f : X \to Y) \mapsto (\kappa : \mathrm{Ker}\,f \to X)$ является аддитивным функтором из категории представлений колчана $\bullet \to \bullet$ в $\mathcal{A}$ (категории стрелок в $\mathcal{A}$) в себя. Аналогично для коядер.

Кообразом морфизма $f : X \to Y$ называется коядро ядра f (то есть естественного морфизма $\mathrm{Ker}\,f \to X$), а **образом морфизма** f — ядро коядра f (то есть естественного морфизма $Y \to \mathrm{Coker}\,f$):

$$\mathrm{Coim}\,f = \mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}\,f \to X), \qquad \mathrm{Im}\,f = \mathrm{Ker}(Y \to \mathrm{Coker}\,f).$$

Лемма 7.5. *Если у морфизма $f : X \to Y$ существуют образ и кообраз, то существует единственный морфизм $\bar f : \operatorname{Coim} f \to \operatorname{Im} f$, такой что диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} f \arrow[r, "\kappa"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\gamma'"'] & Y \arrow[r, "\gamma"] & \operatorname{Coker} f \\
& \operatorname{Coim} f \arrow[r, "\bar f"] & \operatorname{Im} f \arrow[u, "\kappa'"'] &
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Доказательство. По лемме 7.3(a) имеем $f \circ \kappa = 0$. Значит по лемме 7.3(b) существует единственный морфизм $f' : \operatorname{Coim} f \to Y$, такой что $f = f' \circ \gamma'$. Покажем, что $\gamma \circ f' = 0$. В самом деле, $\gamma \circ f' \circ \gamma' = \gamma \circ f = 0$ по лемме 7.3(b), но в то же время $\gamma \circ 0 = 0$. Значит в силу единственности в лемме 7.3(b) имеем $\gamma \circ f' = 0$. Применяя теперь лемму 7.3(a), находим $\bar f$. □

Аддитивная категория $\mathcal{A}$ называется **абелевой**, если

- **AB4:** у всех морфизмов в $\mathcal{A}$ существуют ядра и коядра, а естественный морфизм кообраза в образ морфизма — изоморфизм.

Упражнение 7.6. Покажите, что категории Ab, $R\!-\!\mathsf{mod}$, $R\mathsf{mod}\!-$, $\mathsf{Sh}(X)$, $\mathsf{Qcoh}(X)$ абелевы, а $\mathsf{VB}(X)$ — не абелева.

Упражнение 7.7. Покажите, что если категории $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ абелевы, то (a) $\mathcal{A}^\circ$ абелева; (b) $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ абелева; (c) $\mathsf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ абелева для любой малой категории $\mathcal{C}$.

Морфизм с нулевым ядром называется **мономорфизмом** (или **вложением**, **инъекцией**), а морфизм с нулевым коядром — **эпиморфизмом** (или **сюръекцией**). Объект X, для которого задан мономорфизм $X \to Y$, называется **подобъектом в** Y (обозначается $X \subset Y$), а объект X, для которого задан эпиморфизм $Y \to X$, называется **факторобъектом объекта** Y (обозначается $Y \twoheadrightarrow X$). Легко видеть, что категории подобъектов и факторобъектов фиксированного объекта изоморфны и эквивалентны некоторому частично упорядоченному множеству.

Упражнение 7.8. Пусть $f : X \to Y$ — морфизм. Покажите, что (a) естественный морфизм $\operatorname{Ker} f \to X$ инъективен, а $Y \to \operatorname{Coker} f$ — сюръективен; (b) f — изоморфизм $\iff$ f инъективен и сюръективен.

Упражнение 7.9. Пусть $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ — морфизмы в абелевой категории. Покажите, что
(a) $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$, а если $\operatorname{Ker} g = 0$, то $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker}(g \circ f)$;
(b) $\operatorname{Coker}(g \circ f) \twoheadrightarrow \operatorname{Coker} g$, а если $\operatorname{Coker} f = 0$, то $\operatorname{Coker}(g \circ f) = \operatorname{Coker} g$;
(c) если f сюръективен, то $g = 0 \iff g \circ f = 0$; (d) если g инъективен, то $f = 0 \iff g \circ f = 0$.

Лемма 7.10. *Всякий морфизм $f : X \to Y$ в абелевой категории может быть единственным образом представлен в виде композиции сюръекции $f' : X \to I$ и инъекции $f'' : I \to Y$. При этом $I \cong \operatorname{Coim} f \cong \operatorname{Im} f$, а морфизмы f' и f'' при этом отождествлении совпадают с γ' и κ'.*

Доказательство. Заметим, что γ' сюръективен, а κ' инъективен в силу упражнения. Поэтому достаточно проверить единственность. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} f \arrow[r, "\kappa"] & X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f'"] \arrow[dd, "\gamma'"'] & & Y \arrow[r, "\gamma"] & \operatorname{Coker} f \\
& & I \arrow[ur, "f''"'] \arrow[dr, dotted, "i''"] & & \\
& \operatorname{Coim} f \arrow[ur, dotted, "i'"] \arrow[rr, "\bar f", "\cong"'] & & \operatorname{Im} f \arrow[uu, "\kappa'"'] &
\end{tikzcd}$$

Покажем, что $\gamma \circ f'' = 0$. В самом деле, $\gamma \circ f'' \circ f' = \gamma \circ f = 0$, но f' сюръективен, поэтому $\gamma \circ f'' = 0$. Значит существует единственный морфизм $i'' : I \to \operatorname{Im} f$, такой что $f'' = \kappa' \circ i''$, причем из инъективности f'' следует инъективность i''. Аналогично строится сюръективный морфизм $i' : \operatorname{Coim} f \to I$. Заметим, что по построению $\kappa' \circ i'' \circ i' \circ \gamma' = f'' \circ f' = f$, поэтому в силу единственности $\bar{f}$ получаем $i'' \circ i' = \bar{f}$. Так как $\bar{f}$ изоморфизм, отсюда следует инъективность i' и сюръективность i''. Значит оба они — изоморфизмы. Итак, $f' = i' \circ \gamma'$, $f'' = \kappa' \circ i'' = \kappa' \circ \bar{f} \circ (i')^{-1}$. □

Последовательность морфизмов $\ldots \longrightarrow X^{i-1} \xrightarrow{f^{i-1}} X^i \xrightarrow{f^i} X^{i+1} \longrightarrow \ldots$ называется **комплексом**, если для всех i выполняется условие $f^i \circ f^{i-1} = 0$.

Упражнение 7.11. Покажите, что последовательность морфизмов — комплекс $\iff \operatorname{Im} f^{i-1} \subset \operatorname{Ker} f^i$.

Комплекс называется **точным в члене** X^i, если $\operatorname{Im} f^{i-1} = \operatorname{Ker} f^i$. Комплекс вида $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ называется

- **точным слева**, если он точен в X и Y;
- **точным справа**, если он точен в Y и Z;
- **точным в середине**, если он точен в Y;
- **точным**, если он точен в X, Y и Z.

Ясно, что точные слева тройки имеют вид $0 \to \operatorname{Ker} f \to X \xrightarrow{f} Y$, а точные справа тройки имеют вид $X \xrightarrow{f} Y \to \operatorname{Coker} f \to 0$.

Лемма 7.12. *Тройка* $0 \to X \to Y \to Z$ *точна слева* $\iff 0 \to \operatorname{Hom}(A, X) \to \operatorname{Hom}(A, Y) \to \operatorname{Hom}(A, Z)$ *точна слева при всех* A. *Тройка* $X \to Y \to Z \to 0$ *точна справа* $\iff 0 \to \operatorname{Hom}(Z, A) \to \operatorname{Hom}(Y, A) \to \operatorname{Hom}(X, A)$ *точна слева при всех* A.

Доказательство. Точность слева последовательности $0 \to \operatorname{Hom}(Z, A) \to \operatorname{Hom}(Y, A) \to \operatorname{Hom}(X, A)$ при всех A равносильна тому, что $h^Z = \operatorname{Ker} h^f$, то есть тому, что $Z = \operatorname{Coker} f$, то есть точности справа тройки $0 \to X \to Y \to Z \to 0$. Первое утверждение доказывается аналогично. □

Часть 8. Точные функторы

Функтор $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ называется

- **точным слева**, если он всякую точную тройку переводит в последовательность точную слева;
- **точным справа**, если он всякую точную тройку переводит в последовательность точную справа;
- **точным**, если он всякую точную тройку переводит в точную тройку.

Примеры 8.1. (1) функторы fg, $\oplus$ и ограничение скаляров из примера 6.1 точны;
(2) функторы Γ и f_* из примера 6.1 точны слева;
(3) функторы $\otimes$, f^* и расширение скаляров из примера 6.1 точны справа.

Упражнение 8.2. Покажите, что ковариантный функтор точен слева (справа) $\iff$ он всякую точную слева (справа) тройку переводит в тройку точную слева (справа).

Лемма 8.3. *Функторы* $h_A = \operatorname{Hom}(-, A) : \mathcal{A}^\circ \to \mathsf{Ab}$ *и* $h^A = \operatorname{Hom}(A, -) : \mathcal{A} \to \mathsf{Ab}$ *точны слева.*

Доказательство. Это немедленно следует из леммы 7.12. □

Лемма 8.4. *Пусть* (F, G) — *пара сопряженных аддитивных функторов. Тогда* F *точен справа, а* G *слева.*

Доказательство. Пусть $X \to Y \to Z \to 0$ — точная справа тройка. Применяя функтор F получим тройку $F(X) \to F(Y) \to F(Z) \to 0$. В силу леммы 7.12 для этого достаточно проверить, что для всех A последовательность $0 \to \operatorname{Hom}(F(Z), A) \to \operatorname{Hom}(F(Y), A) \to \operatorname{Hom}(F(X), A)$ точна слева. Но пользуясь сопряженностью функторов, ее можно переписать в виде $0 \to \operatorname{Hom}(Z, G(A)) \to \operatorname{Hom}(Y, G(A)) \to \operatorname{Hom}(X, G(A))$, и ее точность следует из той же леммы. □

Классические производные функторы

Часть 9. Теорема вложения и диаграмный поиск

В привычных абелевых категориях, таких как Ab и $R{-}\mathsf{mod}$ стандартным способом проверять раличные соотношения между объектами и морфизмами является так называемый диаграмный поиск (рассматриваются “элементы” абелевой группы и для каждого элемента, проверяется необходимые включения или равенства). В произвольной абелевой категории, объекты уже не имеют “элементов” в наивном смысле, поэтому приходится либо боказывать все, пользуясь формальными свойствами категорий, либо использовать один из следующих двух (по существу равносильных) трюков.

Первый — для любого объекта $X \in \mathcal{A}$ можно определить множество его Y-элементов (где Y — любой другой объект) как $\mathrm{Hom}(Y, X)$ и проверять все необходимые включения и равенства для Y-элементов с произвольными Y. По существу это означает, что мы отождествляем категорию $\mathcal{A}$ с подкатегорией представимых функторов в категорию $\mathsf{Fun}(\mathcal{A}^\circ, \mathsf{Ab})$, а для функторов проверяем необходимые включения и равенства поточечно.

Другой подход состоит в использовании следующей теоремы Митчела.

Теорема 9.1. *Пусть $\mathcal{A}_0$ — малая абелева категория. Тогда существует кольцо R и строго полный точный функтор $F : \mathcal{A}_0 \to R{-}\mathsf{Mod}$.*

Из теоремы Митчела следует, что всякое утверждение, сформулированное в терминах точности последовательностей, существования и равенства морфизмов, и т.д., включающее в себя конечное число объектов и морфизмов и верное в категории модулей над кольцом, верно и в произвольной абелевой категории $\mathcal{A}$. В самом деле, можно рассмотреть полную абелеву подкатегорию $\mathcal{A}_0$ в $\mathcal{A}$, порожденную объектами, фигурирующими в утверждении, построить функтор $F : \mathcal{A}_0 \to R{-}\mathsf{Mod}$, и воспользоваться его строгой полнотой и точностью.

Упражнение 9.2. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"'] & Y_1 \arrow[r] \arrow[d, "g_1"'] & Z_1 \arrow[r] \arrow[d, "h_1"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_2 \arrow[r] & Y_2 \arrow[r] & Z_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

с точными строчками (то есть морфизм точных троек). Покажите, что из нее возникает точная последовательность $0 \to \operatorname{Ker} f_1 \to \operatorname{Ker} g_1 \to \operatorname{Ker} h_1 \to \operatorname{Coker} f_1 \to \operatorname{Coker} g_1 \to \operatorname{Coker} h_1 \to 0$.

Квадрат

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "p"] \\
Z \arrow[r, "q"] & W
\end{tikzcd}$$

называется декартовым, если $\mathrm{Hom}(-, X) = \{\, (\phi, \psi) \in \mathrm{Hom}(-, Y) \times \mathrm{Hom}(-, Z) \mid p\phi = q\psi \,\}$ (X есть расслоенное произведение Y и Z над W); и кодекартовым, если $\mathrm{Hom}(W, -) = \{\, (\phi, \psi) \in \mathrm{Hom}(Y, -) \times \mathrm{Hom}(Z, -) \mid \phi f = \psi g \,\}$ (W является корасслоенным копроизведением Y и Z под X).

Упражнение 9.3. Докажите, что последовательность

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow X \xrightarrow{\binom{f}{g}} Y \oplus Z \xrightarrow{(p,-q)} W \longrightarrow 0$$

(a) является комплексом $\Longleftrightarrow$ соответствующий квадрат коммутативен; (b) точна слева $\Longleftrightarrow$ квадрат декартов; (c) точна справа $\Longleftrightarrow$ квадрат кодекартов.

Упражнение 9.4. Пусть H^0, H^1 и H^2 — когомологии последовательности $(*)$. Покажите, что
(a) $H^0 = \mathrm{Ker}(g : \mathrm{Ker}\, f \to \mathrm{Ker}\, q)$; (b) $H^2 = \mathrm{Coker}(p : \mathrm{Coker}\, f \to \mathrm{Coker}\, q)$;
(c) существует точная тройка $0 \to \mathrm{Coker}(g : \mathrm{Ker}\, f \to \mathrm{Ker}\, q) \to H^1 \to \mathrm{Ker}(p : \mathrm{Coker}\, f \to \mathrm{Coker}\, q) \to 0$.

Упражнение 9.5. Докажите, что (a) квадрат декартов $\iff$ g индуцирует изоморфизм $\mathrm{Ker}\, f \cong \mathrm{Ker}\, q$, а p индуцирует мономорфизм $\mathrm{Coker}\, f \hookrightarrow \mathrm{Coker}\, q$; (b) квадрат кодекартов $\iff$ p индуцирует изоморфизм $\mathrm{Coker}\, f \cong \mathrm{Coker}\, q$, а g индуцирует эпиморфизм $\mathrm{Ker}\, f \twoheadrightarrow \mathrm{Ker}\, q$.

Однако, при обращении с теоремой Митчела надо соблюдать некоторую осторожность.

Упражнение 9.6. Покажите, что в категории $R-\mathsf{Mod}$ бесконечное произведение точных троек точно, а в категории $\mathsf{Sh}(X)$ вообще говоря нет.

Часть 10. Инъективные и проективные объекты

Объект P в абелевой категории $\mathcal{A}$ называется **проективным**, если функтор $\mathrm{Hom}(P, -)$ точен. Объект I в абелевой категории $\mathcal{A}$ называется **инъективным**, если функтор $\mathrm{Hom}(-, I)$ точен. Так как функторы $\mathrm{Hom}(X, -)$ и $\mathrm{Hom}(-, X)$ всегда точны слева, проективность P равносильна тому, что для любой сюръекции $Y \twoheadrightarrow Z$ и любого морфизма $\phi : P \to Z$ найдется морфизм $\tilde{\phi} : P \to Y$, такой что диаграмма

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, dotted, "\tilde{\phi}"'] \arrow[dr, "\phi"] & & \\ Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

коммутативна. Аналогично, инъективность I равносильна тому, что для любой инъекции $X \hookrightarrow Y$ и любого морфизма $\phi : X \to I$ найдется морфизм $\tilde{\phi} : Y \to I$, такой что диаграмма

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[dr, "\phi"'] & Y \arrow[d, dotted, "\tilde{\phi}"] \\ & & I \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Упражнение 10.1. Покажите, что инъективные объекты в $\mathcal{A}$ совпадают с проективными объектами в $\mathcal{A}^\circ$.

Лемма 10.2. *(a) P проективен $\iff$ для любой сюрьекции $p : X \twoheadrightarrow P$ существует изоморфизм $X \cong X' \oplus P$, при котором $p = p_P$; (b) I инъективен $\iff$ для любой иньекции $i : I \hookrightarrow X$ существует изоморфизм $X \cong X' \oplus I$, при котором $i = i_P$.*

Доказательство. Докажем первое. Следствие $\Longrightarrow$ очевидно. Если $p : X \twoheadrightarrow P$ — сюръекция, то существует $i : P \to X$, так что $p \circ i = \mathrm{id}_P$. Положим $X' = \mathrm{Ker}\, p$ и пусть $i' : X' \to X$ — естественное вложение (тогда $p \circ i' = 0$). Заметим, что $p \circ (\mathrm{id}_X - i \circ p) = p - p \circ i \circ p = p - p = 0$, поэтому существует $p' : X \to X'$, такое что $\mathrm{id}_X - i \circ p = i' \circ p'$. Покажем, что $p' \circ i' = \mathrm{id}_{X'}$, $p' \circ i = 0$. Это следует из равенств $(\mathrm{id}_X - i \circ p) \circ i' = i' - i \circ p \circ i' = i'$ и $(\mathrm{id}_X - i \circ p) \circ i = i - i \circ p \circ i = i - i = 0$. Проверим теперь ($\Longleftarrow$). В самом деле, пусть $\pi : Y \twoheadrightarrow Z$ — сюръекция, а $\phi : P \to Z$ — произвольный морфизм. Положим $X = \mathrm{Ker}((-\pi, \phi) : Y \oplus P \to Z)$ и пусть $p : X \to P$ и $q : X \to Y$ — композиции $X \to Y \oplus P \to P$ и $X \to Y \oplus P \to Y$. Из сюръективности π следует сюръективность p (воспользуемся диаграмным поиском — пусть $x \in P$, найдем $y \in Y$, так что $\pi(y) = \phi(x)$; тогда $(y, x) \in X$ и $p(y, x) = x$). Следовательно, $X \cong X' \oplus P$. В частности, существует морфизм $s : P \to X$, такой что $p \circ s = \mathrm{id}_P$. Пусть $\tilde{\phi} = q \circ s$. Тогда $\pi \circ \tilde{\phi} = \pi \circ q \circ s = \phi \circ p \circ s = \phi$, что и требовалось. $\square$

Объект Y называется **расширением** объекта Z с помощью X, если дана точная тройка $0 \to X \to Y \to Z \to 0$.

Упражнение 10.3. Покажите, что (a) классы проективных и инъективных объектов замкнуты относительно прямых сумм и расширений; (b) классы проективных и инъективных объектов замкнуты относительно взятия прямых слагаемых; (c) класс проективных объектов замкнут относительно ядер эпиморфизмов; (d) класс инъективных объектов замкнут относительно коядер мономорфизмов.

В категории $R-\mathsf{Mod}$ всегда много инъективных и проективных объектов.

Лемма 10.4. *Свободный модуль с любым множеством образующих проективен.*

Доказательство. Пусть $R\langle S\rangle$ — свободный R-модуль с множеством образующих S. Тогда $\mathrm{Hom}(R\langle S\rangle, M) = \mathrm{Hom}(S, \mathsf{fg}(M)) = \prod_{s\in S} M$ — точен. $\square$

Следствие 10.5. *Проективные R-модули — это прямые слагаемые в свободных R-модулях.*

Следствие 10.6. *Всякий R-модуль накрывается проективным R-модулем.*

Доказательство. Пусть M — R-модуль. Выберем произвольное множество S образующих для M (например, можно взять $S = M$) и рассмотреть морфизм $R\langle S\rangle \to M$, индуцированный вложением $S \to M$. Он очевидно сюръективен. $\square$

Описать инъективные модули сложнее. Но для проверки того, что их достаточно много, можно воспользоваться следующими простыми соображениями.

Лемма 10.7. *Левый R-модуль I инъективен $\iff$ любой морфизм $\phi : \mathfrak{a} \to I$ из любого левого идеала $\mathfrak{a} \subset R$ можно продолжить до морфизма из $\tilde{\phi} : R \to I$.*

Доказательство. $\Longrightarrow$ очевидно. Докажем обратное. Пусть $X \subset Y$ и $\phi : X \to I$. Рассмотрим множество всех пар (X', ϕ'), где $X \subset X' \subset Y$ и $\phi' : X' \to I$, такой что $\phi = \phi'_{|X}$. По лемме Цорна в нем есть максимальный элемент (X_0, ϕ_0). Покажем, что $X_0 = Y$. В самом деле, иначе существует $y \in Y\backslash X_0$. Пусть $X_1 = X_0 + Ry \subset Y$. Получаем точную последовательность $0 \to \mathfrak{a} \to X_0 \oplus R \to X_1 \to 0$. Из инъективности морфизма $X_0 \to X_1$ следует инъективность морфизма $\mathfrak{a} \to R$, значит $\mathfrak{a}$ — идеал в R. Рассмотрим композицию $\psi : \mathfrak{a} \to X_0 \xrightarrow{\phi_0} I$ и Продолжим ее до морфизма $\tilde{\psi} : R \to I$. Так как X_1 — корасслоенное копроизведение X_0 и R под $\mathfrak{a}$, морфизмы ϕ_0 и $\tilde{\psi}$ дают морфизм $\phi_1 : X_1 \to I$, причем его ограничение на X_0 совпадает с ϕ_0. Получаем противоречие с максимальностью пары (X_0, ϕ_0). Значит $X_0 = Y$, в частности морфизм ϕ продолжился до морфизма $Y \to I$. $\square$

Следствие 10.8. *Абелева группа $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ инъективна.*

Доказательство. Абелевы группы — это $\mathbb{Z}$-модули, а все идеалы в $\mathbb{Z}$ имеют вид $n\mathbb{Z}$. Морфизм $n\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ задается элементом $t \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (образом n), а чтобы продолжить его до морфизма $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, надо найти $t' \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, такой что $nt' = t$, что в группе $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ заведомо возможно. $\square$

Лемма 10.9. *Пусть $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ и $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ — пара сопряженных функторов. Если F точен, то G сохраняет инъективность. Аналогично, если G точен, то F сохраняет проективность.*

Доказательство. Докажем первое. Пусть I инъективен в $\mathcal{B}$. Тогда $\mathrm{Hom}(-, G(I)) \cong \mathrm{Hom}(F(-), I)$ — точный функтор, значит $G(I)$ инъективен. $\square$

Построим теперь взаимно сопряженные точные функторы между категориями $R{-}\mathsf{Mod}$ и $(\mathsf{Mod}{-}R)^\circ$. Тогда инъективные объекты в $(\mathsf{Mod}{-}R)^\circ$ (то есть проективные правые R-модули) перейдут в инъективные объекты в $R{-}\mathsf{Mod}$. А именно, рассмотрим функторы

$$D : R{-}\mathsf{Mod} \to (\mathsf{Mod}{-}R)^\circ \quad \text{и} \quad D' : (\mathsf{Mod}{-}R)^\circ \to R{-}\mathsf{Mod}, \qquad M \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Лемма 10.10. *Функторы D и D' точны и сопряжены друг другу.*

Доказательство. Точность сразу следует из инъективности $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Для проверки сопряженности заметим, что для всякого левого M существует морфизм $c_M : M \to D'(D(M))$ (переводящий $m \in M$ в морфизм $DM \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \mapsto f(m)$), а для всякого правого R-модуля морфизм $c'_M : M \to D(D'(M))$, которые как не сложно проверить задают морфизмы функторов. Заметим, что $c'_M \in \mathrm{Hom}_{(\mathsf{Mod}-R)^\circ}(D(D'(M)), M)$. Покажем, что c и c' устанавливают сопряжение функторов D и D'. Для этого надо проверить, что композиции $DM \xrightarrow{c'_{DM}} DD'DM \xrightarrow{Dc_M} DM$ и $D'M \xrightarrow{c_{D'M}} D'DD'M \xrightarrow{D'c'_M} D'M$ тождественны. Поскольку D и D' задаются одной и той же формулой, достаточно проверить первое. Заметим, что c'_{DM} переводит $f \in DM$ в морфизм $D'DM \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $x \in \mathrm{Hom}(D'M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \mapsto x(f)$. С другой стороны, Dc_M переводит элемент $\xi \in DD'DM$ в морфизм $m \mapsto \xi(c_M(m))$. Значит $Dc_M \circ c'_{DM}$ переводит f в $m \mapsto f(c_M(m)) = f(m)$, то есть в f. $\square$

Следствие 10.11. *Всякий R-модуль вкладывается в инъективный R-модуль.*

Доказательство. Пусть M — левый R-модуль. Тогда DM — правый R-модуль. Выберем сюръекцию $P \to DM$ из проективного правого R-модуля P и рассмотрим композицию $M \to D'DM \to D'P$. Во-первых, как было отмечено выше, P — инъективный объект в $(\mathsf{Mod}-R)^\circ$, значит в силу лемм 10.9 и 10.10 объект $DD'P$ инъективен в $R-\mathsf{Mod}$. Остается проверить, что морфизм $M \to D'P$ инъективен. Для проверки инъективности морфизма $c_M : M \to D'DM$ надо проверить, что для любого $m \in M$ найдется $f : M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, так что $f(m) \neq 0$. Рассмотрим циклическую подгруппу $\langle m\rangle$ в M, порожденную m. Если $\langle m\rangle \cong \mathbb{Z}$, определим $f : \langle m\rangle \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, положив $f(m) = 1/2$, а если $\langle m\rangle \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ — положив $f(m) = 1/n$, а затем продолжим на все M, воспользовавшись инъективностью $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Таким образом c_M инъективно. Остается заметить, что D' точен, поэтому переводит сюръекцию $P \to DM$ в инъекцию $D'DM \to D'P$. □

Часть 11. Классические производные функторы

Основным вычислительным средством в абелевых категориях являются точные последовательности. С их помощью интересные объекты выражаются через более простые. Основную же сложность при вычислениях доставляет не точность функторов — если надо применить функтор F к объекту X, выраженному, скажем через точную последовательность $0 \to X \to X_1 \to X_2 \to 0$, то последовательность $0 \to F(X) \to F(X_1) \to F(X_2) \to 0$ уже не будет точна, то есть $F(X)$ не будет выражаться через $F(X_1)$ и $F(X_2)$. Чтобы контролировать ситуацию вводятся так называемые производные функторы. С одной стороны, они позволяют производить вычисления, а с другой, сами дают важные примеры функторов.

Идея состоит в следующем. Пусть, например, функтор $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ точен справа. Тогда левые классические производные функторы от F — это последовательность функторов $L_iF : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $L_0F \cong F$ и морфизмов функторов $\delta_i : L_{i+1}F(X'') \to L_iF(X')$ между функторами

$$(0 \to X' \to X \to X'' \to 0) \mapsto L_{i+1}F(X'') \quad \text{и} \quad (0 \to X' \to X \to X'' \to 0) \mapsto L_iF(X'),$$

из категории точных троек в $\mathcal{A}$ в категорию $\mathcal{B}$, такие что для всякой точной тройки $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ последовательность

$$\dots \to L_2F(X'') \xrightarrow{\delta_1} L_1F(X') \to L_1F(X) \to L_1F(X'') \xrightarrow{\delta_0} L_0F(X') \to L_0F(X) \to L_0F(X'') \to 0$$

точна, удовлетворяющая свойству универсальности.

Замечание 11.1. Такая последовательность функторов T_i (без изоморфизма $T_0 \cong F$) и морфизмов функторов $\delta_i : T_{i+1}(X'') \to T_i(X')$ называется левым δ-функтором.

Свойство универсальности формулируется так: для любого левого δ-функтора $(T_\bullet, \delta_\bullet)$ и любого морфизма функторов $f_0 : L_0F \to T_0$ существует единственная последовательность морфизмов функторов $f_i : L_iF \to T_i$, коммутирующая с δ.

Аналогично определяются правые производные функторы от точного слева функтора. Правый δ-функтор — это последовательность функторов $T^i : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ и морфизмов функторов $\delta^i : T^i(X'') \to T^{i+1}(X')$ между функторами

$$(0 \to X' \to X \to X'' \to 0) \mapsto T^i(X'') \quad \text{и} \quad (0 \to X' \to X \to X'' \to 0) \mapsto T^{i+1}(X'),$$

из категории точных троек в $\mathcal{A}$ в категорию $\mathcal{B}$, такие что для всякой точной тройки $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ последовательность

$$0 \to T^0(X') \to T^0(X) \to T^0(X'') \xrightarrow{\delta^0} T^1(X') \to T^1(X) \to T^1(X'') \xrightarrow{\delta^1} T^2(X') \to \dots$$

точна.

Правый классические производный функтор от F — это правый δ-функтор (R^iF, δ^i) с $R^0F \cong F$, удовлетворяющий следующему свойству универсальности: для любого правого δ-функтора $(T^\bullet, \delta^\bullet)$ и любого морфизма функторов $f^0 : T^0 \to R^0F$ существует единственная последовательность морфизмов функторов $f^i : T^i \to R^iF$, продолжающая f^0 и коммутирующая с δ.

Возникает естественный вопрос о существовании производных функторов. Есть разные условия, при которых существование можно доказать. Самая простая и наиболее универсальная конструкция такова. Пусть, например, функтор F точен справа и допустим, что в категории $\mathcal{A}$ достаточно много проективных объектов (то есть всякий объект накрывается проективным). Возьмем произвольный объект $X \in \mathcal{A}$ и построим точную последовательность $\dots \to P^{-3} \xrightarrow{d^{-3}} P^{-2} \xrightarrow{d^{-2}} P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P^0 \to X \to 0$, в которой все объекты P^i проективны. Применяя функтор F получим комплекс $\dots \to F(P^{-3}) \xrightarrow{F(d^{-3})} F(P^{-2}) \xrightarrow{F(d^{-2})} F(P^{-1}) \xrightarrow{F(d^{-1})} F(P^0) \to 0$. Оказывается, формула $L_i F = \operatorname{Ker} F(d^{-i}) / \operatorname{Im} F(d^{-i-1})$ определяет производные функторы. Но чтобы это доказать, нам потребуются некоторые сведения про комплексы.

Аналогично, если функтор $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ точен слева, а в категории $\mathcal{A}$ достаточно много инъективных объектов, заменяя левую проективную резольвенту на правую инъективную, можно построить правый производный функтор от F.

Классические производные функторы — построение

Часть 12. Комплексы

Пусть $(X^\bullet, d^\bullet)$ — комплекс в абелевой категории $\mathcal{A}$. Обозначим через

$$H^i(X^\bullet) := \operatorname{Ker} d^i / \operatorname{Im} d^{i-1} = \operatorname{Coker}(\operatorname{Im} d^{i-1} \to \operatorname{Ker} d^i) \cong \operatorname{Ker}(\operatorname{Coker} d^{i-1} \to \operatorname{Coim} d^i)$$

когомологию комплекса в члене X^i. Точные последовательности — это комплексы, у которых все когомологии равны нулю. Такие комплексы также называются ацикличными.

Морфизм комплексов $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ — это набор отображений $f^i : X^i \to Y^i$, таких что

$$d_Y^i \circ f^i = f^{i+1} \circ d_X^i.$$

Ясно, что мофризм комплексов индуцирует морфизм когомологий $H^i(f^\bullet) : H^i(X^\bullet) \to H^i(Y^\bullet)$.

Упражнение 12.1. Покажите, что (a) если категория $\mathcal{A}$ абелева, то категория комплексов $\operatorname{Com}(\mathcal{A})$ тоже абелева; (b) $H^i : \operatorname{Com}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ — аддитивный функтор, точный посередине.

Упражнение 12.2 (Лемма о змее)**.** Пусть $0 \to X^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} Y^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} Z^\bullet \to 0$ — точная тройка комплексов (то есть для всякого i последовательность $0 \to X^i \to Y^i \to Z^i \to 0$ точна). (a) Покажите, что из нее возникает длинная точная последовательность когомологий

$$\cdots \to H^{i-1}(Z^\bullet) \xrightarrow{\delta^{i-1}} H^i(X^\bullet) \to H^i(Y^\bullet) \to H^i(Z^\bullet) \xrightarrow{\delta^i} H^{i+1}(X^\bullet) \to \dots$$

(b) Проверьте, что если тройка почленно расщепима (то есть $Y^k \cong X^k \oplus Z^k$ для каждого k, так что f^k и g^k — стандартное вложение и проекция), то δ^k индуцирован морфизмом комплексов $p_{X^{k+1}} \circ d_Y^k \circ i_{Z^k}$.

На категории комплексов определен функтор сдвига на произвольное целое число t, который обозначается как $[t]$, $X^\bullet \mapsto X^\bullet[t]$. По определению

$$(X^\bullet[t])^k = X^{k+t}, \qquad d^k_{X^\bullet[t]} = (-1)^t d_X^{k+t}.$$

Упражнение 12.3. Покажите, что (a) $[t]$ — автоморфизм категории комплексов, причем $[t] \circ [s] = [t+s]$ для всех $t, s \in \mathbb{Z}$; (b) $H^i(X[t]) \cong H^{i+t}(X)$.

Морфизм комплексов $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ называется квазиизоморфизмом, если $H^i(f^\bullet) : H^i(X^\bullet) \to H^i(Y^\bullet)$ — изоморфизм при всех i.

Упражнение 12.4. Покажите, что $X^\bullet$ ацикличен $\iff$ нулевой морфизм $X^\bullet \to X^\bullet$ — квазиизоморфизм.

Морфизмы комплексов $f^\bullet, g^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ называются гомотопными (записывается $f \sim g$), если существует набор морфизмов $h^i : X^i \to Y^{i+1}$, такой что

$$f^i - g^i = d_Y^{i-1} \circ h^i + h^{i+1} \circ d_X^i.$$

Комплексы $X^\bullet$ и $Y^\bullet$ называются гомотопными, если существуют морфизмы комплексов $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ и $g^\bullet : Y^\bullet \to X^\bullet$, такие что $g^\bullet \circ f^\bullet \sim \mathrm{id}_X$, $f^\bullet \circ g^\bullet \sim \mathrm{id}_Y$.

Лемма 12.5. *Гомотопные морфизмы индуцируют одинаковые отображения на когомологиях. В частности, гомотопные комплексы квазиизоморфны.*

Доказательство. Достаточно проверить, что морфизм гомотопный нулю индуцирует нулевое отображение на когомологиях. Пусть $f^i = d_Y^{i-1} \circ h^i + h^{i+1} \circ d_X^i$. Тогда $f^i_{|\operatorname{Ker} d_X^i} = d_Y^{i-1} \circ h^i$ — пропускается через $\operatorname{Im} d_Y^{i-1}$, то есть $H^i(f^\bullet) = 0$. $\square$

В отличие от квазиизоморфности, гомотопическая эквивалентность сохраняется при действии любых аддитивных функторов. Если два морфизма (комплекса) гомотопны, они остаются гомотопными после применения любого аддитивного функтора,

Часть 13. Конус морфизма

Очень полезное понятие — конус морфизма комплексов. Пусть $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ — морфизм комплексов. Положим

$$C(f)^k = Y^k \oplus X^{k+1}, \qquad d^k_{C(f)} = \begin{pmatrix} d^k_Y & f^{k+1} \\ 0 & -d^{k+1}_X \end{pmatrix}.$$

Определим также

$$i^k = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{Y^k} \\ 0 \end{pmatrix} : Y^k \to C(f)^k, \qquad p^k = (0, \mathrm{id}^{k+1}_X) : C(f)^k \to X^{k+1}.$$

Лемма 13.1. *$(C(f)^\bullet, d^\bullet_{C(f)})$ — комплекс, а $i^\bullet : Y^\bullet \to C(f)^\bullet$ и $p^\bullet : C(f)^\bullet \to X^\bullet[1]$ — морфизмы комплексов. Более того, последовательность*

$$(\dagger) \qquad \dots \longrightarrow H^{i-1}(C(f)^\bullet) \xrightarrow{H^{i-1}(p^\bullet)} H^i(X^\bullet) \xrightarrow{H^i(f^\bullet)} H^i(Y^\bullet) \xrightarrow{H^i(i^\bullet)} H^i(C(f)^\bullet) \xrightarrow{H^i(p^\bullet)} H^i(X^\bullet) \longrightarrow \dots$$

точна.

Доказательство. Равенства $d^{k+1}_{C(f)} \circ d^k_{C(f)} = 0$, $d^k_{C(f)} \circ i^k = i^{k+1} \circ d^k_Y$ и $p^{k+1} \circ d^k_{C(f)} = d^k_{X[1]} \circ p^k$ проверяются непосредственно. Кроме того, легко видеть, что $p^\bullet \circ i^\bullet = 0$, а морфизмы $i^\bullet \circ f^\bullet$ и $f^\bullet[1] \circ p^\bullet$ гомотопны нулю (гомотопии задаются отображениями $\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{id}_{X^k} \end{pmatrix} : X^k \to C(f)^{k-1}$ и $\begin{pmatrix} \mathrm{id}_{Y^k} & 0 \end{pmatrix} : C(f)^k \to (Y^\bullet[1])^{k-1}$ соответственно), поэтому последовательность ($\dagger$) является комплексом. Для доказательства точности заметим, что морфизмы $i^\bullet : Y^\bullet \to C(f)^\bullet$ и $p^\bullet : C(f)^\bullet \to X^\bullet[1]$ образуют точную тройку комплексов

$$0 \to Y^\bullet \to C(f)^\bullet \to X^\bullet[1] \to 0.$$

Пользуясь леммой о змее, получаем длинную точную последовательность когомологий, причем согласно второй части леммы о змее связывающий гомоморфизм в ней индуцирован морфизмом f. $\square$

Следствие 13.2. *Морфизм комплексов $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ — квазиизоморфизм $\iff$ его конус $C(f)$ ацикличен.*

Всякий объект категории $\mathcal{A}$ можно рассматривать как комплекс сосредоточенный в градуировке нуль.

Упражнение 13.3. Покажите, что всякий ограниченный комплекс получается последовательными операциями взятиями конуса морфизма и сдвига из объектов категории $\mathcal{A}$.

Упражнение 13.4. Определим цилиндр морфизма f формулой $\mathrm{Cyl}(f) = C(i[-1] : C(f)[-1] \to X^\bullet)$, или явно

$$\mathrm{Cyl}(f)^k = Y^k \oplus X^k \oplus X^{k+1}, \qquad d^k_{\mathrm{Cyl}(f)} = \begin{pmatrix} d^k_Y & 0 & f^{k+1} \\ 0 & d^k_X & -\mathrm{id}_{X^{k+1}} \\ 0 & 0 & -d^{k+1}_X \end{pmatrix}.$$

Покажите, что существует точная последовательность $X^\bullet \xrightarrow{\bar f} \mathrm{Cyl}(f) \xrightarrow{\pi} C(f)$ и морфизмы $Y^\bullet \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Cyl}(f) \xrightarrow{\beta} Y^\bullet$, такие что $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_{Y^\bullet}$, $\alpha \circ \beta \sim \mathrm{id}_{\mathrm{Cyl}(f)}$, $\beta \circ \bar f = f$, $\pi \circ \alpha = i$.

Часть 14. Резольвенты

Резольвентой объекта $X \in \mathcal{A}$ называется любой комплекс квазиизоморфный X.

Если в категории $\mathcal{A}$ достаточно много проективных объектов, то всякий объект $X \in \mathcal{A}$ обладает проективной резольвентой, сосредоточенной в неположительных степенях:

$$\dots \to P^{-3} \to P^{-2} \to P^{-1} \to P^0 \to 0.$$

Мы докажем чуть более общее утверждение.

Лемма 14.1. *Пусть $X^\bullet$ — комплекс ограниченный сверху. Тогда существует комплекс $P^\bullet$, составленный из проективных объектов и квазиизоморфизм $f^\bullet : P^\bullet \to X^\bullet$.*

Доказательство. Будем строить P^i и f^i последовательно. Для таких k, что $X^i = 0$ при $i \geqslant k$, положим $P^k = 0$. Предположим, что P^i и морфизмы f^i с $i > k$ уже построены, причем так конус построенного морфизма ацикличен в степенях $\geqslant k+1$.

$$\begin{tikzcd}
 & P^k \arrow[r, dotted, "d_P^k"] \arrow[d, dotted, "f^k"'] & P^{k+1} \arrow[r, "d_P^{k+1}"] \arrow[d, "f^{k+1}"] & P^{k+2} \arrow[r] \arrow[d, "f^{k+2}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] X^{k-1} \arrow[r, "d_X^{k-1}"] & X^k \arrow[r, "d_X^k"] & X^{k+1} \arrow[r, "d_X^{k+1}"] & X^{k+2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Пусть $Y = \operatorname{Ker}\left(\begin{pmatrix} d_X^k & f^{k+1} \\ 0 & -d_P^{k+1} \end{pmatrix} : X^k \oplus P^{k+1} \to X^{k+1} \oplus P^{k+2}\right)$. Выберем проективную накрывающую $P^k \to Y$ и пусть композиция $P^k \to Y \to X^k \oplus P^{k+1}$ задается морфизмами $f^k : P^k \to X^k$ и $-d_P^k : P^k \to P^{k+1}$. Тогда $\begin{pmatrix} d_X^k & f^{k+1} \\ 0 & -d_P^{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^k \\ -d_P^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_X^k f^k - f^{k+1} d_P^k \\ d_P^{k+1} d_P^k \end{pmatrix}$, откуда следуют равенства $d_X^k f^k = f^{k+1} d_P^k$ и $d_P^{k+1} d_P^k = 0$. Значит морфизмы f^k и d_P^k определяют морфизм комплексов, причем такой, что его конус ацикличен также и в степени k. $\square$

Упражнение 14.2. Покажите, что если $P^\bullet$ — проективная резольвента объекта X, то существует морфизм $\epsilon : P_0 \to X$, такой что комплекс $\cdots \to P^{-3} \to P^{-2} \to P^{-1} \to P^0 \xrightarrow{\epsilon} X \to 0$ ацикличен.

Лемма 14.3. *Пусть $P^\bullet$ — проективная резольвента для X, а $Q^\bullet$ — проективная резольвента для Y. Тогда для любого морфизма $f : X \to Y$ существует единственный с точностью до гомотопии морфизм комплексов $f^\bullet : P^\bullet \to Q^\bullet$, такой что $H^0(f^\bullet) = f$.*

Доказательство. Построим последовательно морфизмы $f^i : P^i \to Q^i$, начиная с f^0. Обозначим $P^1 = X$, $d_P^0 = \epsilon_X$, $Q^1 = Y$, $d_Q^0 = \epsilon_Y$, $f^1 = f$ и предположим, что морфизмы f^i с $i > k$ уже построены.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P^{k-1} \arrow[r, "d_P^{k-1}"] & P^k \arrow[r, "d_P^k"] \arrow[d, dotted, "f^k"'] \arrow[dr, "\phi^k"] & P^{k+1} \arrow[r, "d_P^{k+1}"] \arrow[d, "f^{k+1}"] & P^{k+2} \arrow[r] \arrow[d, "f^{k+2}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Q^{k-1} \arrow[r, "d_Q^{k-1}"] & Q^k \arrow[r, "d_Q^k"] & Q^{k+1} \arrow[r, "d_Q^{k+1}"] & Q^{k+2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Рассмотрим морфизм $\phi^k = f^{k+1} \circ d_P^k$. Заметим, что $d_Q^{k+1} \circ \phi^k = d_Q^{k+1} \circ f^{k+1} \circ d_P^k = f^{k+2} \circ d_P^{k+1} \circ d_P^k = 0$. Но так как комплекс $Q^\bullet$ точен, это значит что $\operatorname{Im} \phi^k \subset \operatorname{Ker} d_Q^{k+1} = \operatorname{Im} d_Q^k$. Так как морфизм $Q^k \to \operatorname{Im} d_Q^k$ сюръективен, а P^k проективен, найдется морфизм $f^k : P^k \to Q^k$, такой что $\phi^k = d_Q^k \circ f^k$. Повторяя эту процедуру строим $f^\bullet$.

Пусть теперь $f^\bullet$ и $g^\bullet$ — два морфизма, такие что $H^0(f^\bullet) = H^0(g^\bullet)$. Будем строить h^i последовательно, начиная с h^0. Обозначим $Q^1 = Y$, $d_Q^0 = \epsilon_Y$ и предположим, что морфизмы h^i с $i > k$ уже построены.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P^{k-1} \arrow[r, "d_P^{k-1}"] & P^k \arrow[r, "d_P^k"] \arrow[dl, dotted, "h^k"'] \arrow[d, shift right, "g^k"'] \arrow[d, shift left, "f^k"] & P^{k+1} \arrow[r, "d_P^{k+1}"] \arrow[dl, "h^{k+1}"'] \arrow[d, shift right, "g^{k+1}"'] \arrow[d, shift left, "f^{k+1}"] & P^{k+2} \arrow[r] \arrow[dl, "h^{k+2}"'] \arrow[d, shift right, "g^{k+2}"'] \arrow[d, shift left, "f^{k+2}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Q^{k-1} \arrow[r, "d_Q^{k-1}"'] & Q^k \arrow[r, "d_Q^k"'] & Q^{k+1} \arrow[r, "d_Q^{k+1}"'] & Q^{k+2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Заметим, что $d_Q^k \circ (f^k - g^k - h^{k+1} \circ d_P^k) = (f^{k+1} - g^{k+1} - d_Q^k \circ h^{k+1}) \circ d_P^k = h^{k+2} \circ d_P^{k+1} \circ d_P^k = 0$. Но так как комплекс $Q^\bullet$ точен, это значит что $\operatorname{Im}(f^k - g^k - h^{k+1} \circ d_P^k) \subset \operatorname{Ker} d_Q^k = \operatorname{Im} d_Q^{k-1}$. Так как морфизм $Q^k \to \operatorname{Im} d_Q^k$ сюръективен, а P^k проективен, найдется морфизм $h^k : P^k \to Q^k$, такой что $f^k - g^k - h^{k+1} \circ d_P^k = d_Q^{k-1} \circ h^k$. Повторяя эту процедуру строим $h^\bullet$. $\square$

Заметим, что в доказательстве нигде не использовалась проективность Q^i и точность комплекса $P^\bullet$. Поэтому ровно то же рассуждение доказывает, следующую лемму.

Следствие 14.4. *Всякий морфизм из ограниченного сверху комплекса состоящего из проективных объектов в ацикличный комплекс гомотопен нулю.*

Аналогичные результаты верны для инъективных резольвент, если в категории достаточно много инъективных объектов.

Лемма 14.5. *Пусть $X^\bullet$ — комплекс ограниченный снизу. Тогда существует комплекс $I^\bullet$, составленный из инъективных объектов и квазиизоморфизм $f^\bullet : X^\bullet \to I^\bullet$. В частности, всякий объект $X \in \mathcal{A}$ обладает* инъективной резольвентой*, сосредоточенной в неотрицательных степенях:*

$$0 \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to I^3 \to \dots$$

Если $I^\bullet$ — инъективная резольвента для объекта X, а $J^\bullet$ — инъективная резольвента для Y, то для любого морфизма $f : X \to Y$ существует единственный с точностью до гомотопии морфизм комплексов $f^\bullet : I^\bullet \to J^\bullet$, такой что $H^0(f^\bullet) = f$. Всякий морфизм из ацикличного комплекса в ограниченный снизу комплекс состоящий из инъективных объектов гомотопен нулю.

Часть 15. Построение производных функторов

Теорема 15.1. *Пусть функтор $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ точен справа, а в категории $\mathcal{A}$ достаточно много проективных объектов. Для всякого объекта $X \in \mathcal{A}$ выберем произвольную проективную резольвенту $P^\bullet \cong X$ и положим $L_iF(X) = H^{-i}(F(P^\bullet))$. Тогда L_iF — производные функторы функтора F.*

Доказательство. Во-первых, докажем функториальность. Пусть $P^\bullet \cong X$ и $Q^\bullet \cong Y$ — проективные резольвенты, а $f : X \to Y$ — произвольный морфизм. Пусть $f^\bullet : P^\bullet \to Q^\bullet$ — произвольный морфизм резольвент, такой что $H^0(f^\bullet) = f$. Положим $L_iF(f) = H^{-i}(F(f^\bullet))$. Надо проверить, что данное определение не зависит от выбора $f^\bullet$. Но как мы знаем, разные $f^\bullet$ гомотопны, поэтому разные $F(f^\bullet)$ тоже гомотопны, а значит отображения на когомологиях одинаковы.

Кроме того, надо проверить, что определение $L_iF(X)$ не зависит от выбора резольвенты. В самом деле, если $Q^\bullet \to X$ — другая резольвента, то отображение $\mathrm{id}_X : X \to X$ дает морфизмы $f^\bullet : P^\bullet \to Q^\bullet$ и $g^\bullet : Q^\bullet \to P^\bullet$, причем композиции $g^\bullet \circ f^\bullet : P^\bullet \to P^\bullet$ и $f^\bullet \circ g^\bullet : Q^\bullet \to Q^\bullet$ гомотопны тождественным. Применяя функтор F заключаем, что комплексы $F(P^\bullet)$ и $F(Q^\bullet)$ гомотопны, а значит имеют одинаковые когомологии.

Теперь надо построить связывающие гомоморфизмы δ. Пусть $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ — точная тройка в $\mathcal{A}$. Выберем проективные резольвенты $P^\bullet \cong X$ и $Q^\bullet \cong Y$ и продолжим f до морфизма резольвент $f^\bullet : P^\bullet \to Q^\bullet$. Пусть $R^\bullet = C(f)$. Из леммы 13.1 получаем, что $P^\bullet \cong Z$. При этом все $R^k = Q^k \oplus P^{k+1}$ проективны, так что $R^\bullet$ — проективная резольвента для объекта Z. Применяя к тругольнику $P^\bullet \to Q^\bullet \to R^\bullet \to P^\bullet[1]$ функтор F получаем тройку комплексов $F(P^\bullet) \to F(Q^\bullet) \to F(R^\bullet) \to F(P^\bullet[1])$. Заметим, что в силу аддитивности F имеем

$$F(R^\bullet) = F(C(f)) \cong C(F(f)), \qquad F(P^\bullet[1]) = F(P^\bullet)[1].$$

Применяя к этому треугольнику лемму 13.1, получаем длинную точную последовательность

$$\dots \to L_2F(Z) \xrightarrow{\delta_1} L_1F(X) \to L_1F(Y) \to L_1F(Z) \xrightarrow{\delta_0} L_0F(X) \to L_0F(Y) \to L_0F(Z) \to 0$$

Теперь проверим функториальность связывающих гомоморфизмов. Рассмотрим морфизм

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\xi"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\eta"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\zeta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r, "f_1"] & Y_1 \arrow[r, "g_1"] & Z_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

точных троек. Пусть $P^\bullet \cong X$, $Q^\bullet \cong Y$, $P_1^\bullet \cong X_1$, $Q_1^\bullet \cong Y_1$ — проективные резольвенты, а $f^\bullet : P^\bullet \to Q^\bullet$ и $f_1^\bullet : P_1^\bullet \to Q_1^\bullet$ — продолжения f и f_1. Пусть также $\xi^\bullet : P^\bullet \to P_1^\bullet$ и $\eta^\bullet : Q^\bullet \to Q_1^\bullet$ — продолжения ξ и η. Тогда $f_1^\bullet \circ \xi^\bullet \sim \eta^\bullet \circ f^\bullet$. Пусть $h^k : P^k \to Q_1^{k-1}$ — гомотопия, такая что

$$\eta^k \circ f^k - f_1^k \circ \xi^k = d_{Q_1}^{k-1} \circ h^k + h^{k+1} \circ d_P^k.$$

Определим отображение $\gamma_k : R^k = Q^k \oplus P^{k+1} \to R_1^k = Q_1^k \oplus P_1^{k+1}$ формулой $\begin{pmatrix} \eta^k & h^{k+1} \\ 0 & \xi^k \end{pmatrix}$. Легко проверить, что γ^k — морфизм комплексов, такой что в диаграмме

$$\begin{tikzcd} P^\bullet \arrow[r, "f^\bullet"] \arrow[d, "\xi^\bullet"] & Q^\bullet \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\eta^\bullet"] & R^\bullet \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\gamma^\bullet"] & P^\bullet[1] \arrow[d, "\xi^\bullet[1]"] \\ P_1^\bullet \arrow[r, "f_1^\bullet"] & Q_1^\bullet \arrow[r, "i_1"] & R_1^\bullet \arrow[r, "p_1"] & P_1^\bullet \end{tikzcd}$$

первый квадрат гомотопически коммутативен, а два другие квадрата коммутативны. Рассматривая индуцированный морфизм на когомологиях, и пользуясь тем, что $\xi^\bullet$ и $\eta^\bullet$ индуцируют морфизмы $\xi : X \to X_1$ и $\eta : Y \to Y_1$, легко видеть, что $\gamma^\bullet$ индуцирует морфизм $\zeta : Z \to Z_1$. Следовательно, $H^{-i}(F(\xi^\bullet)) = L_iF(\xi)$, $H^{-i}(F(\eta^\bullet)) = L_iF(\eta)$, и $H^{-i}(F(\gamma^\bullet)) = L_iF(\zeta)$. Остается заметить, что морфизмы δ_k индуцированы морфизмами p и p_1 соответственно, поэтому из коммутативности правого квадрата следует их функториальность.

Таким образом, мы показали, что L_iF определенные выше являются δ-функтором. Остается проверить его универсальность. Для этого нам понадобится следующие свойства.

Лемма 15.2. *Если объект P проективен, то $L_0F(P) \cong P$, $L_iF(P) = 0$ при $i > 0$.*

Доказательство. Если P проективен, то в качестве проективной резольвенты мы можем взять комплекс $P^\bullet$ с $P^0 = P$, $P^i = 0$ при $i \neq 0$. Применяя функтор F получим комплекс с единственным членом $F(P)$ в степени 0, а его когомологии, очевидно, имеют указанный вид. □

Лемма 15.3. *Для любого X имеем изоморфизм функторов $L_0F(X) \cong F(X)$.*

Доказательство. Выберем для X проективную резольвенту $P^\bullet \cong X$. Она дает точную справа тройку $P^{-1} \to P^0 \to X \to 0$. Применяя F получаем последовательность $F(P^{-1}) \to F(P^0) \to F(X) \to 0$, которая также точна справа (так как F точен справа). Отсюда $H^0(F(P^\bullet)) = \operatorname{Coker}(F(P^{-1}) \to F(P^0)) \cong F(X)$. Функториальность изоморфизма легко проверяется. □

Левый (правый) δ-функтор $(E_\bullet, \delta_\bullet)$ называется **стирающим**, если для всякого $i > 0$ и всякого X найдется сюръекция $Y \to X$ (инъекция $X \to Y$), такая что $E_i(Y) = 0$. Заметим, что $L_\bullet F$ является стирающим в силу предыдущей леммы (в качестве Y можно взять проективную накрывающую), причем $L_0F \cong F$. Поэтому остается воспользоваться следующим результатом. □

Теорема 15.4. *Пусть (E_i, δ_i) — стирающий δ-функтор с $E_0 \cong F$. Тогда он универсален.*

Доказательство. Пусть (T_i, δ_i) — произвольный δ-функтор, а $f_0 : T_0 \to E_0$ — морфизм функторов. Предположим, что $f_i : T_i \to E_i$ при $i < k$ уже построены. Построим $f_k : T_k \to E_k$. Пусть X — произвольный объект, а $Y \to X$ — сюръекция, такая что $E_k(Y) = 0$. Положим $X' = \operatorname{Ker}(Y \to X)$ и рассмотрим точную тройку

$$0 \to X' \to Y \to X \to 0.$$

Получим коммутативную диаграмму с точными строками

$$(\ddagger)\qquad \begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & T_k(Y) \arrow[r] & T_k(X) \arrow[r, "\delta_{k-1}"] \arrow[d, dashed] & T_{k-1}(X') \arrow[r] \arrow[d, "f_{k-1,X'}"'] & T_{k-1}(Y) \arrow[d, "f_{k-1,Y}"'] \\ \cdots \arrow[r] & E_k(Y) \arrow[r] & E_k(X) \arrow[r, "\delta_{k-1}"] & E_{k-1}(X') \arrow[r] & E_{k-1}(Y) \end{tikzcd}$$

Но $E_k(Y) = 0$, поэтому $E_k(X) = \operatorname{Ker}(E_{k-1}(X') \to E_{k-1}(Y))$, следовательно морфизм $T_k(X) \to T_{k-1}(X') \to E_{k-1}(X')$ пропускается через $E_k(X)$, то есть существует единственная пунктирная стрелка, делающая диаграмму коммутативной. Обозначим ее f_{kX}.

Осталось проверить, что построенный морфизм не зависит от выбора накрывающей Y и что f_k и f_{k-1} коммутируют с δ_{k-1}. Для этого рассмотрим коммутативную диаграмму

$$(\star)\qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X_1' \arrow[r] \arrow[d, "\phi'"'] & Y_1 \arrow[r] \arrow[d] & X_1 \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X_2' \arrow[r] & Y_2 \arrow[r] & X_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

в которой $E_k(Y_1) = 0$. Она дает кубическую диаграмму

$$\begin{tikzcd} T_k(X_1) \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr, "T_k(\phi)"] \arrow[dd, "f_{kX_1}"'] & & T_{k-1}(X_1') \arrow[dr, "T_{k-1}(\phi')"] \arrow[dd, "f_{k-1,X_1'}"' near end] & \\ & T_k(X_2) \arrow[rr, "\delta" near start] \arrow[dd, "f_{kX_2}"' near start] & & T_{k-1}(X_2') \arrow[dd, "f_{k-1,X_2'}"] \\ E_k(X_1) \arrow[rr, "\delta"' near end] \arrow[dr, "E_k(\phi)"'] & & E_{k-1}(X_1') \arrow[dr, "E_{k-1}(\phi')"'] & \\ & E_k(X_2) \arrow[rr, "\delta"'] & & E_{k-1}(X_2') \end{tikzcd}$$

Заметим, что все грани кроме левой и передней коммутативны (верхняя и нижняя — так как $T_\bullet$ и $E_\bullet$ — δ-функторы, правая — в силу функториальности f_{k-1}, а задняя — по определению f_k).

Если теперь $E_k(Y_2) = 0$, то передняя грань тоже коммутативна. Отсюда следует, что

$$\delta \circ f_{kX_2} \circ T_k(\phi) = f_{k-1,X_2'} \circ \delta \circ T_k(\phi) = f_{k-1,X_2'} \circ T_{k-1}(\phi') \circ \delta = \\ = E_{k-1}(\phi') \circ f_{k-1,X_1'} \circ \delta = E_{k-1}(\phi') \circ \delta \circ f_{kX_1} = \delta \circ E_k(\phi) \circ f_{kX_1}.$$

Но так как $E_k(Y_2) = 0$ морфизм $\delta : E_k(X_2) \to E_{k-1}(X_2')$ инъективен, значит $f_{kX_2} \circ T_k(\phi) = E_k(\phi) \circ f_{kX_1}$, то есть левая грань коммутативна. Значит построенный таким образом морфизм $f_k : T_k \to E_k$ является морфизмом функторов.

Чтобы проверить корректность определения f_{kX} рассмотрим предыдущую ситуацию с $X_1 = X_2 = X$ и $\phi = \mathrm{id}_X$ и $E_k(Y_1) = E_k(Y_2) = 0$. Так как $T_k(\phi) = \mathrm{id}_{T_k(X)}$, $E_k(\phi) = \mathrm{id}_{E_k(X)}$, из коммутативности левой грани следует совпадение морфизмов $f_{kX} : T_k(X) \to E_k(X)$, построенных по Y_1 и Y_2. Остается заметить, что для любых накрывающих $Y_1 \to X$ и $Y_2 \to X$, таких что $E_k(Y_1) = E_k(Y_2) = 0$, найдется накрывающая $Y \to X$, такая что $E_k(Y) = 0$ и морфизмы $Y_1, Y_2 \to X$ пропускаются через Y (достаточно взять $Y = Y_1 \oplus Y_2$). Из предыдущего рассуждения видно, что морфизмы $T_k(X) \to E_k(X)$, построенных по Y_1 и Y_2, совпадают с морфизмом, построенным по Y, а значит и между собой. В частности, в кубической диаграмме левая грань всегда коммутативна.

Рассмотрим теперь коммутативную диаграмму ($\star$) для $X_1 = X_2 = X$, $\phi = \mathrm{id}_X$ и $E_k(Y_1) = 0$, и соответствующую ей кубическую диаграмму. Как было показано выше в ней верхняя, нижняя, правая и задняя грани коммутативны, а левая грань тоже коммутативна в силу функториальности f_k. Но тогда легко видеть, что передняя грань тоже коммутативна, что и дает согласованность $f_\bullet$ и $\delta_\bullet$. $\square$

Аналогично доказывается

Теорема 15.5. *Пусть функтор $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ точен слева, а в категории $\mathcal{A}$ достаточно много инъективных объектов. Для всякого объекта $X \in \mathcal{A}$ выберем произвольную инъективную резольвенту $I^\bullet \cong X$ и положим $R^iF(X) = H^i(F(I^\bullet))$. Тогда $R^\bullet F$ — стирающий δ-функтор с $R^0F \cong F$. В частности $R^\bullet F$ — правый производный функтор функтора F. Если X инъективен, то $R^iF(X) = 0$ при $i > 0$.*

Примеры производных функторов

Часть 16. Функторы Ext

Важнейшим примеров производных функторов являются производные функторы от функтора Hom. Поскольку это функтор от двух аргументов, есть выбор — по какому аргументу рассматривать производный функтор. Оказывается, что ответ получается одинаковым в обоих случаях, но так как априори это не очевидно, обозначим

$$\mathrm{Ext}^i_1(X,Y)=(R^i\,\mathrm{Hom}(-,Y))(X),\qquad \mathrm{Ext}^i_2(X,Y)=(R^i\,\mathrm{Hom}(X,-))(Y).$$

Заметим, что $\mathrm{Hom}(X,-):\mathcal{A}\to\mathsf{Ab}$ — точный слева функтор, поэтому для его вычисления надо объект Y заменять на его инъективную резольвенту в $\mathcal{A}$. С другой стороны, $\mathrm{Hom}(-,Y):\mathcal{A}^\circ\to\mathsf{Ab}$ — точный слева функтор, поэтому для его вычисления надо объект X заменять на его инъективную резольвенту в $\mathcal{A}^\circ$, то есть на проективную резольвенту в $\mathcal{A}$.

Для доказательства того, что $\mathrm{Ext}^k_1(X,Y)\cong\mathrm{Ext}^k_2(X,Y)$ рассмотрим третье определение, принадлежащее Ионеде. Рассмотрим множество $E^k(X,Y)$ всех точных последовательностей вида

$$0\to Y\to Z_k\to Z_{k-1}\to\cdots\to Z_2\to Z_1\to X\to 0.$$

Две таких точных последовательности $Z_\bullet$ и $Z'_\bullet$ называются **элементарно эквивалентными**, если существует коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & Z_k \arrow[r] \arrow[d] & Z_{k-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & Z_2 \arrow[r] \arrow[d] & Z_1 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z'_k \arrow[r] & Z'_{k-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Z'_2 \arrow[r] & Z'_1 \arrow[r] & X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Далее, две таких точных последовательности $Z_\bullet$ и $W_\bullet$ называются **эквивалентными**, если существует последовательность элементарных эквивалентностей $Z_\bullet\sim Z'_\bullet\sim\cdots\sim Z^{(n)}_\bullet\sim W_\bullet$ (в которой направление морфизмов может меняться!). При $k\geqslant 1$ определим $\mathrm{Ext}^k_I(X,Y)$ как фактор $E^k(X,Y)$ по этому отношению эквивалентности, а при $k=0$ положим $\mathrm{Ext}^0_I(X,Y)=\mathrm{Hom}(X,Y)$.

Лемма 16.1. $\mathrm{Ext}^k_I(X,Y)$ *— бифунктор, ковариантный по Y и контравариантный по X.*

Доказательство. Рассмотрим класс в $\mathrm{Ext}^k_I(X,Y)$, представленный последовательностью $Z_\bullet$ и пусть $X'\to X$ — морфизм. Пусть $Z'_1=\mathrm{Ker}(Z_1\oplus X'\to X)$ — корасслоенное произведение Z_1 и X' над X, и $Z'_i=Z_i$ при $2\leqslant i\leqslant k$. Легко видеть, что $Z'_\bullet$ задает некоторый класс в $E^k(X',Y)$, причем при замене $Z_\bullet$ на элементарно эквивалентную последовательность, $Z'_\bullet$ тоже заменяется на элементарно эквивалентную. Поэтому получаем корректно определенное отображение $f^*:\mathrm{Ext}^k_I(X,Y)\to\mathrm{Ext}^k_I(X',Y)$, причем легко проверить, что для любого морфизма $g:X''\to X'$ выполнено $(f\circ g)^*=g^*\circ f^*$, так что $\mathrm{Ext}^k_I(X,Y)$ функториален по первому аргументу. Функториальность по второму аргументу доказывается аналогично. □

Теорема 16.2. *Существуют изоморфизмы функторов* $\mathrm{Ext}^k_1(X,Y)\cong\mathrm{Ext}^k_I(X,Y)\cong\mathrm{Ext}^k_2(X,Y)$.

Доказательство. Построим, например, первый изоморфизм. Для этого проверим, что $\mathrm{Ext}^\bullet_I$ является стирающим δ-функтором по первому аргументу. Вначале покажем, что если P проективен, то $\mathrm{Ext}^i_I(P,Y)=0$ для всех Y и $i\geqslant 1$. В самом деле, так как всякая сюръекция $Z_1\to P$ изоморфна проекции $Z_1=Z'_1\oplus P\to P$, всякий элемент из $E^i(P,Y)$ эквивалентен элементу, имеющему вид $0\to Y\to Y\oplus P\to P\to 0$, если $i=1$ и $0\to Y\to Y\to 0\to\cdots\to 0\to P\to P\to 0$, если $i\geqslant 2$, который мы и будем считать нулем.

Теперь построим морфизмы δ. Пусть $0\to X'\xrightarrow{f}X\xrightarrow{g}X''\to 0$ — точная тройка, а последовательность $Z'_\bullet$ задает элемент из $E^{k-1}(X',Y)$. Положим $Z''_1=X$, а $Z''_{i+1}=Z'_i$ при $1\leqslant i\leqslant k-1$. Тогда $Z''_\bullet\in E^k(X'',Y)$. Получаем отображение $E^{k-1}(X',Y)\to E^k(X'',Y)$. Оно очевидно согласовано с нашим отношением эквивалентности, поэтому индуцирует отображение $\delta^{k-1}:\mathrm{Ext}^{k-1}_I(X',Y)\to\mathrm{Ext}^k_I(X'',Y)$.

Упражнение 16.3. Покажите, что построенное отображение δ функториально относительно морфизмов точных последовательностей.

Упражнение 16.4. Покажите, что последовательность

$$\dots \to \mathrm{Ext}_I^{k-1}(X,Y) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Ext}_I^{k-1}(X',Y) \xrightarrow{\delta^{k-1}} \mathrm{Ext}_I^k(X'',Y) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Ext}_I^k(X,Y) \to \dots$$

точна.

Таким образом, $\mathrm{Ext}_I^\bullet$ является стирающим δ-функтором по первому аргументу. Применяя теорему из предыдущей лекции, получаем $\mathrm{Ext}_1^k(X,Y) \cong \mathrm{Ext}_I^k(X,Y)$. Аналогично строится второй изоморфизм. □

Следствие 16.5. *Функторы Ext_I^k аддитивны.*

Упражнение 16.6. Опишите операцию сложения на $\mathrm{Ext}_I^k(X,Y)$ в терминах точных последовательностей.

Упражнение 16.7. Пусть $P^\bullet \cong X$ — проективная резольвента и $f : P^k \to Y$ — морфизм, представляющий класс в $\mathrm{Ext}_1^k(X,Y)$. Постройте по нему элемент в $E^k(X,Y)$, представляющий его образ в $\mathrm{Ext}_I^k(X,Y)$.

Так как Ext_1^k канонически изоморфно Ext_k^2, мы не будем их различать, и будем писать просто Ext^k.

Упражнение 16.8. Покажите, что в категории Ab выполнено $\mathrm{Ext}^i(X,Y) = 0$ при $i \geqslant 2$. Вычислите $\mathrm{Ext}^i(X,Y)$ для $X, Y = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Упражнение 16.9. Пусть $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ — точная тройка. Покажите, что
(a) морфизм $X' \to Y$ продолжается до морфизма $X \to Y \iff$ его образ в $\mathrm{Ext}^1(X'',Y)$ равен нулю;
(b) морфизм $Y \to X''$ поднимается до морфизма $Y \to X \iff$ его образ в $\mathrm{Ext}^1(Y,X')$ равен нулю.

Упражнение 16.10. Покажите, что (a) объект P проективен $\iff \mathrm{Ext}^1(P,Y) = 0$ для всех Y; (b) объект I инъективен $\iff \mathrm{Ext}^1(X,I) = 0$ для всех X.

Часть 17. Функторы Tor

Рассмотрим категории $R-\mathsf{mod}$ и $\mathsf{mod}-R$ левых и правых модулей над кольцом R и функтор тензорного произведения над R: $\otimes_R : (\mathsf{mod}-R) \times (R-\mathsf{mod}) \to \mathsf{Ab}$, $(M,N) \mapsto M \otimes_R N$.

Лемма 17.1. *Функтор тензорного произведения точен справа по каждому из аргументов.*

Доказательство. По определению тензорного произведения имеем $\mathrm{Hom}(M \otimes_R N, L) \cong \mathrm{Hom}_R(N, \mathrm{Hom}(M,L))$, значит функтор $M \otimes_R - : R-\mathsf{mod} \to \mathsf{Ab}$ сопряжен слева к функтору $\mathrm{Hom}(M,-) : \mathsf{Ab} \to R-\mathsf{mod}$. Но левый сопряженный функтор всегда точен справа. Значит тензорное произведение точно по второму аргументу. Точность по первому аргументу доказывается аналогино. □

Аналогично случаю с функтором Hom мы можем рассмотреть левые производные функторы по первому и по второму аргументу. Опять же, априори их связь не очевидна, поэтому обозначим пока

$$\mathrm{Tor}_i^1(X,Y) = R^i(- \otimes_R Y)(X), \qquad \mathrm{Tor}_i^2(X,Y) = R^i(X \otimes_R -)(Y).$$

Так как $\otimes_R$ — точный справа функтор, для вычисления функторов Tor надо объекты X и Y заменять на проективную резольвенту. Рассмотрим функтор $\mathrm{Tor}_i^1(X,Y)$ как функтор от Y.

Упражнение 17.2. Покажите, что (a) если P проективен, то $\mathrm{Tor}_i^1(X,P) = 0$, а функтор $- \otimes_R P$ — точен;
(b) если $P^\bullet$ — проективная резольвента для X, а $0 \to Y_1 \to Y_2 \to Y_3 \to 0$ — точная последовательность, то $0 \to P^\bullet \otimes Y_1 \to P^\bullet \otimes Y_2 \to P^\bullet \otimes Y_3 \to 0$ — точная последовательность комплексов;
(c) $\mathrm{Tor}_\bullet^1(X,-)$ — стирающий δ-функтор по второму аргументу.

Из упражнения следует, что $\mathrm{Tor}_i^1(X,Y) \cong \mathrm{Tor}_i^2(X,Y)$, так что мы не будем их различать, а будем писать просто $\mathrm{Tor}_i(X,Y)$.

Упражнение 17.3. Покажите, что в категории Ab выполнено $\mathrm{Tor}_i(X,Y) = 0$ при $i \geqslant 2$. Вычислите $\mathrm{Tor}_i(X,Y)$ для $X, Y = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Часть 18. Когомологии групп

Пусть G — конечная группа, а $G-\mathsf{mod}$ — категория модулей над групповым кольцом $\mathbb{Z}[G]$ (= категория абелевых групп с линейным действием группы G = категория аддитивных функторов из $*_G$ в Ab). Ясно, что в этой категории достаточно проективных и инъективных объектов.

Рассмотрим функторы инвариантов и коинвариантов $G-\mathsf{mod} \to \mathsf{Ab}$,

$$M \mapsto M^G := \{\, m \in M \mid gm = m \ \forall g \in G \,\}, \qquad M \mapsto M^G := M/\langle m - gm \rangle_{m \in M,\ g \in G}.$$

Легко видеть, что функтор инвариантов точен слева, а коинвариантов — справа. Их производные функторы называются когомологиями и гомологиями группы G с коэффициентами в G-модуле M соответственно

$$H^i(G, M) = R^i(-^G)(M), \qquad H_i(G, M) = L_i(-_G)(M).$$

Упражнение 18.1. Покажите, что $H^i(G, M) \cong \mathrm{Ext}^i(\mathbb{Z}, M)$, $H_i(G, M) = \mathrm{Tor}_i(\mathbb{Z}, M)$, где $\mathbb{Z}$ — тривиальный G-модуль.

Упражнение 18.2. Покажите, что если G — циклическая группа, то $H^{i+2}(G, M) \cong H^i(G, M)$, $H_{i+2}(G, M) \cong H_i(G, M)$ при $i \geqslant 1$ (постройте для $\mathbb{Z}$ периодическую проективную резольвенту).

Часть 19. Ацикличные резольвенты

Пусть функтор $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ точен справа. Объект Y называется F-ацикличным, если $L_i F(Y) = 0$ для $i > 0$. Аналогично, объект Y называется F-ацикличным для точного слева функтора F, если $R^i F(Y) = 0$ для $i > 0$.

Упражнение 19.1. Покажите, что для точного справа функтора F все проективные объекты F-ацикличны, а для точного слева функтора F все инъективные объекты F-ацикличны.

Лемма 19.2. *Если F точен справа, то ядро эпиморфизма F-ацикличных объектов F-ациклично.*

Доказательство. Следует из длинной точной последовательности производных функторов. □

Лемма 19.3. *Если F точен справа, а $Y^\bullet$ — ограниченный сверху ацикличный комплекс, сотоящий из F-ацикличных объектов, то комплекс $F(Y^\bullet)$-ацикличен.*

Доказательство. Пусть $Z^i = \mathrm{Ker}(d^i : Y^i \to Y^{i+1})$. Тогда морфизм d^i раскладывается в композицию $Y^i \twoheadrightarrow Z^{i+1} \hookrightarrow Y^{i+1}$, причем каждая из последовательностей $0 \to Z^i \to Y^i \to Z^{i+1} \to 0$ точна. Убывающей индукцией по i легко проверить, что все Z^i являются F-ацикличными. Поэтому для каждого i последовательность $0 \to F(Z^i) \to F(Y^i) \to F(Z^{i+1}) \to 0$ точна. Но $f(d^i)$ раскладывается в композицию $F(Y^i) \to F(Z^{i+1}) \to F(Y^{i+1})$, значит комплекс $F(Y^\bullet)$-ацикличен. □

Теорема 19.4. *Если $Y^\bullet \cong X$ — ограниченная справа F-ацикличная резольвента, то $L_i F(X) \cong H^{-i}(F(Y^\bullet))$.*

Доказательство. Выберем для $Y^\bullet$ проективную резольвенту $P^\bullet$. Тогда $P^\bullet$ также является проективной резольвентой для X. Пусть $f : P^\bullet \to Y^\bullet$ — квазиизоморфизм. Получаем треугольник $P^\bullet \to Y^\bullet \to C(f)$. Из длинной точной последовательности когомологий следует, что $C(f)$ ацикличен. Кроме того, он ограничен сверху (поскольку и $Y^\bullet$ и $P^\bullet$ ограничены сверху), и состоит из F-ацикличных объектов, так как каждый его член — это сумма Y^i и P^{i+1}. Значит по предыдущей лемме $F(C(f))$ ацикличен. Но $F(C(f)) \cong C(F(f))$, значит $F(f) : F(P^\bullet) \to F(Y^\bullet)$ — квазиизоморфизм, то есть $H^{-i}(F(Y^\bullet)) \cong H^{-i}(F(P^\bullet)) =: L_i F(X)$. □

Упражнение 19.5. Покажите, что если Y ацикличен для функторов $\mathrm{Hom}(-, X)$ для всех X, то он проективен (аналогично, если Y ацикличен для функторов $\mathrm{Hom}(X, -)$ для всех X, то он инъективен).

R-модуль M называется плоским, если он ацикличен для функторов $- \otimes_R N$ для всех N.

Упражнение 19.6. Покажите, что (a) всякий проективный модуль плоский, поэтому плоских модулей достаточно много; (b) для вычисления функторов Tor можно использовать плоские резольвенты.

Для нетерова коммутативного кольца R можно проверить, что конечно порожденный модуль M плоский $\iff$ он проективен. Однако бывают не проективные, но плоские бесконечномерные модули.

Часть 20. Функторы между категориями пучков

Пусть X — топологическое пространство, а $\mathcal{A} = \mathsf{Sh}(X)$ — категория пучков абелевых групп на X. Пусть также $\mathsf{PreSh}(X)$ — категория предпучков абелевых групп на X. По определению, $\mathsf{Sh}(X)$ — строго полная подкатегория в $\mathsf{PreSh}(X)$. Обозначим через $i : \mathsf{Sh}(X) \to \mathsf{PreSh}(X)$ — функтор вложения. Хорошо известно, что он обладает левым сопряженным функтором $a : \mathsf{PreSh}(X) \to \mathsf{Sh}(X)$ (функтором пучковизации). Функтор a точен, а функтор i точен слева!

Лемма 20.1. *В категории пучков достаточно много инъективных объектов.*

Доказательство. Выберем для каждой точки $x \in X$ абелеву группу G_x и рассмотрим топологическое пространство $\tilde{G} = \sqcup_{x\in X} G_x$ с дискретной топологией. Пусть $\pi : \tilde{G} \to X$ — естественная проекция. Рассмотрим его пучок сечений, то есть предпучок $\mathcal{G}$ на X, такой что $\mathcal{G}(U) = \{\, s : X \to \pi^{-1}(U) \subset \tilde{G} \mid \pi \circ s = \mathrm{id}_U \,\}$. Легко видеть, что он на самом деле пучок. Пучки такого вида называются **пучками разрывных сечений**.

Пусть теперь $\mathcal{F}$ — произвольный пучок на X. Для каждой точки $x \in X$ обозначим через $\mathcal{F}_x = \varinjlim_{x\in U} \mathcal{F}(U)$ — его слой в точке x. Заметим, что $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \prod_{x\in X} \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_x, G_x)$. В самом деле, если $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, то для каждой точки $x \in X$ композиция $\mathcal{F}_x \xrightarrow{\phi_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{\mathrm{ev}_x} G_x$ задает морфизм $\mathcal{F}_x \to G_x$. Обратно, если $\{\, \phi_x \,\}_{x\in X}$ — набор морфизмов $\mathcal{F}_x \to G_x$ положим $\phi(s)(x) = \phi_x(s_x)$, где $s \in \mathcal{F}(U)$, $x \in U$, и s_x — образ s в $\mathcal{F}_x$. Легко видеть, что ϕ — морфизм пучков. Более того, легко видеть, что построенные отображения между $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ и $\prod_{x\in X} \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_x, G_x)$ — взаимно обратные изоморфизмы.

Из доказанного сразу следует, что если каждая из групп G_x инъективна, то и пучок $\mathcal{G}$ инъективен. Поэтому, чтобы вложить пучок $\mathcal{F}$ в инъективный пучок, достаточно для каждой точки $x \in X$ найти вложение группы $\mathcal{F}_x$ в инъективную абелеву группу G_x. $\square$

Упражнение 20.2. Покажите, что (a) последовательность пучков точна $\iff$ она точна послойна;
(b) слои предпучка совпадают со слоями его пучковизации.

Рассмотрим функтор глобальных сечений $\Gamma(X, -) : \mathsf{Sh}(X) \to \mathsf{Ab}$. Легко видеть, что он точен слева (в этом состоит определение пучка). Поскольку в категории пучков достаточно много инъективных объектов, он обладает правым производным функтором, который называется функтором когомологий X с коэффициентами в пучке:

$$H^i(X, \mathcal{F}) = R^i\Gamma(X, \mathcal{F}).$$

В частном случае, когда $\mathcal{F}$ — постоянный пучок (пучковизация постоянного предпучка), построенный по группе A, пишут $H^i(X, \mathcal{F}) = H^i(X, A)$. Для вычисления когомологий гораздо удобнее использовать ацикличные резольвенты вместо инъективных.

Пусть X паракомпактно (то есть отделимо и у каждого открытого покрытия есть локально конечное подпокрытие). Пучок $\mathcal{F}$ называется

- **вялым**, если $\forall$ открытого $U \subset X$ отображение ограничения $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(U)$ сюръективно;
- **мягким**, если $\forall$ замкнутого $Y \subset X$ отображение $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y) := \varinjlim_{Y\subset U} \mathcal{F}(U)$ сюръективно;
- **тонким**, если $\forall$ замкнутых $Y_1, Y_2 \subset X$, таких что $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$ существует автоморфизм ϕ пучка $\mathcal{F}$, такой что $\phi_{|Y_1} = \mathrm{id}$, $\phi_{|Y_2} = 0$.

Упражнение 20.3. Покажите, что (a) вялые, мягкие и тонкие пучки Γ-ацикличны; (b) пучки гладких сечений гладких расслоений мягкие; (c) пучки непрерывных сечений непрерывных расслоений мягкие.

Из пункта (b) следует, что пучок гладких дифференциальных форм Ω^i_X на X мягкий, поэтому комплекс де Рама $\Omega^\bullet_X$ является мягкой (а значит ацикличной) резольвентой постоянного пучка $\mathbb{R}$. Отсюда сразу следует

Теорема 20.4 (теорема де Рама)**.** *Существует изоморфизм $H^i(X, \mathbb{R}) \cong H^i(\Gamma(X, \Omega^\bullet_X))$.*

Часть 21. Прямой и обратный образ

Пусть $f : X \to Y$ морфизм топологических пространств, $\mathcal{F}$ — пучок на X, а $\mathcal{G}$ — пучок на Y. Определим пучок $f_*\mathcal{F}$ на Y и пучок $f^{-1}\mathcal{G}$ на X формулами

$$f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U)), \qquad f^{-1}\mathcal{G} = a(U \mapsto \varinjlim_{f(U)\subset V} \mathcal{G}(V)).$$

Лемма 21.1. *Функтор $f^{-1} : \mathsf{Sh}(Y) \to \mathsf{Sh}(X)$ сопряжен слева к функтору $f_* : \mathsf{Sh}(X) \to \mathsf{Sh}(Y)$. Функтор f^{-1} точен, а функтор f_* точен слева.*

Доказательство. Обозначим предпучок $U \mapsto \varinjlim_{f(U)\subset V} \mathcal{G}(V)$ через $f'\mathcal{G}$. Пусть $\phi : f^{-1}\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ — морфизм пучков. В частности, ϕ дает морфизм $f^{-1}\mathcal{G}(f^{-1}(U)) \to \mathcal{F}(f^{-1}(U))$. Компонируя его с морфизмом из предпучка $f'\mathcal{G}$ в его пучковизацию $f^{-1}\mathcal{G}$, получаем морфизм $\mathcal{G}(U) = f'\mathcal{G}(f^{-1}(U)) \to \mathcal{F}(f^{-1}(U)) = f_*\mathcal{F}(U)$, что дает нам морфизм $\mathcal{G} \to f_*\mathcal{F}$.

Обратно, пусть $\psi : \mathcal{G} \to f_*\mathcal{F}$ — морфизм пучков. Для каждой пары $U \subset X$, $V \subset Y$ такой, что $f(U) \subset V$, получаем морфизм $\mathcal{G}(V) \to f_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \to \mathcal{F}(U)$. Переходя к пределу по V получаем морфизм предпучков $f'\mathcal{G} \to \mathcal{F}$, который по определению пучковизации пропускается через $a(f'\mathcal{G}) = f^{-1}\mathcal{G}$.

Построенные отображения очевидно взаимно обратны, что доказывает сопряженность функторов. Далее, функтор f_* будучи правым сопряженным точен слева, а f^{-1} аналогично точен справа. Поэтому надо проверить лишь то, что f^{-1} точен слева, то есть сохраняет мономорфизмы. Для этого достаточно заметить, что $(f^{-1}\mathcal{G})_x = \varinjlim_{x\in U\subset f^{-1}(V)} \mathcal{G}(V) = \mathcal{G}_{f(y)}$ и что морфизм пучков мономорфизм $\iff$ он мономорфизм на слоях. $\square$

Упражнение 21.2. Покажите, что функтор f_* переводит инъективные пучки в инъективные.

Упражнение 21.3. Пусть X_d — множество точек X с дискретной топологией, а $\xi : X_d \to X$ — морфизм, тождественный на точках. Покажите, что (a) $\mathsf{Sh}(X_d) \cong \mathsf{Fun}_{\mathsf{add}}(X, \mathsf{Ab})$, где X рассматривается как дискретная категория (не имеющая морфизмов кроме тождественных); (b) $\mathrm{Inj}(\mathsf{Sh}(X_d)) = \mathsf{Fun}_{\mathsf{add}}(X, \mathrm{Inj}(\mathsf{Ab}))$; (c) пучок разрывных сечений пучка $\mathcal{F}$ совпадает с $\xi_*\xi{-}1\mathcal{F}$.

Упражнение 21.4. Определим пучок $f_!\mathcal{F}$ равенством $f_!\mathcal{F}(U) = \{\, s \in \mathcal{F}(f^{-1}(U)) \mid \operatorname{supp}(s) \text{ собственен над } U \,\}$. Покажите, что функтор $f_!$ сопряжен слева к f^{-1}.

Пусть $\{\, U_i \,\}_{i\in I}$ — открытое покрытие X. Выберем на I полный порядок и для каждого набора индексов $\{\, i_0 < i_1 < \cdots < i_n \,\} \in I$ рассмотрим подмножество $U_{i_0,\dots,i_n} = U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_n}$ и пучок $\mathcal{F}_{i_0,\dots,i_n} = j_*j^{-1}\mathcal{F}$, где $j : U_{i_0,\dots,i_n} \to X$ — вложение. Для каждого $i_k < i < i_{k+1}$ пусть $i : U_{i_0,\dots,i_k,i,i_{k+1},\dots,i_n} \to U_{i_0,\dots,i_n}$ — вложение. Рассмотрим естественное отображение $\mathcal{F}_{i_0,\dots,i_n} = j_*j^{-1}\mathcal{F} \to j_*i_*i^{-1}j^{-1}\mathcal{F}$, индуцированное сопряженностью i_* и i^{-1}. Положим

$$C^n(\{\, U_i \,\}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0<i_1<\cdots<i_n} \mathcal{F}_{i_0,\dots,i_n}$$

и определим отображение $\delta : C^n(\{\, U_i \,\}, \mathcal{F}) \to C^{n+1}(\{\, U_i \,\}, \mathcal{F})$ формулой

$$\alpha = (\alpha_{i_0,\dots,i_n}) \mapsto (\delta\alpha)_{i_0,\dots,i_{n+1}} := \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \alpha_{i_0,\dots,\hat{i}_k,\dots,i_n},$$

где в правой части неявно используются построенный выше отображения. Легко видеть, что $C^\bullet(\{\, U_i \,\}, \mathcal{F})$ — комплекс. Он называется **комплексом Чеха** пучка $\mathcal{F}$.

Упражнение 21.5. Покажите, что (a) комплекс Чеха является резольвентой пучка $\mathcal{F}$; (b) если все множества $U_{i_0,\dots,i_n}$ стягиваемы, то резольвента Чеха — Γ-ациклична.

Часть 22. Функторы между категориями когерентных пучков

Пусть X — **схема**, то есть локально окольцованное топологическое пространство локально изоморфное **аффинной схеме**, то есть спектру некоторого коммутативного кольца. Пучок колец на X обозначается $\mathcal{O}_X$. Пучок $\mathcal{F}$ на X называется **пучком $\mathcal{O}_X$-модулей**, если на каждой группе $\mathcal{F}(U)$ задана структура модуля над кольцом $\mathcal{O}_X(U)$, так что отображения ограничения являются гомоморфизмами модулей. Пучок $\mathcal{O}_X$-модулей называется квазикогерентным, если $\mathcal{F}(U) \cong \mathcal{F}(V) \otimes_{\mathcal{O}_X(V)} \mathcal{O}_X(U)$ для всех достаточно маленьких $U \subset V \subset X$, и когерентным, если он квазикогерентен и $\mathcal{F}(U)$ конечно порожден над $\mathcal{O}_X(U)$ для всех достаточно маленьких U. Категории $\mathsf{QCoh}(X)$ квазикогерентных и $\mathsf{Coh}(X)$ когерентных пучков являются связующим звеном между алгеброй и геометрией.

Лемма 22.1. *Если $X = \operatorname{Spec} A$ — аффинная схема, то функтор $\Gamma(X, -) : \mathsf{QCoh}(X) \to A-\mathsf{Mod}$ — точная эквивалентность категорий, отождествляющая $\mathsf{Coh}(X)$ с $A-\mathsf{mod}$.*

Мы не будем приводить доказательства этой леммы, а также других результатов, которые можно отнести к основаниям алгебраической геометрии. Вместо этого мы приведем краткое определение основных алгебро-геометрических функторов и перечислим их основные свойства.

В алгебро-геометрической ситуации можно определить как чисто алгебраические функторы (типа Ext и Tor), так и геометрические (глобальные сечения, прямые и обратные образы). Начнем с алгебраических.

Функторы Hom и Ext. Как и во всякой абелевой категории на категории квазикогерентных пучков определен функтор Hom. Хотя проективных объектов в этой категории практически нет, но инъективных объектов достаточно много (к тому же можно вместо инъективных квазикогерентных пучков использовать инъективные пучки $\mathcal{O}_X$-модулей), поэтому определены и функторы Ext.

Функторы $\mathcal{H}om$ и $\mathcal{E}xt$. Можно также определить локальные аналоги функторов Hom и Ext. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ квазикогрентные пучки, а $U \subset X$ — аффинное открытое подмножество. Тогда $\mathcal{F}(U)$ и $\mathcal{G}(U)$ — $\mathcal{O}_X(U)$-модули. При этом группа $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{F}(U), \mathcal{G}(U))$ тоже обладает естественной структурой $\mathcal{O}_X(U)$-модуля (так как $\mathcal{O}_X(U)$ коммутативно). Можно убедиться, что эти структуры согласованы для разных U, то есть эти модули склеиваются в квазикогерентный пучок, который обозначается $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Функтор $\mathcal{H}om$ точен слева по каждому аргументу.

Аналогично, модули $\operatorname{Ext}^i_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{F}(U), \mathcal{G}(U))$ определяют квазикогерентный пучок $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Легко убедиться, что $\mathcal{E}xt^i$ — стирающий δ-функтор по каждому из аргументов, поэтому является правым производным от $\mathcal{H}om$. Для вычисления функторов $\mathcal{E}xt^i$ удобнее всего использовать локально свободные резольвенты первого аргумента (локально свободные пучки очевидно $\mathcal{H}om(-, \mathcal{F})$-ацикличны для любого $\mathcal{F}$).

Функторы $\mathcal{H}om$ и $\mathcal{E}xt$ сохраняют когерентность (если оба аргумента когерентны, то и результат когерентен).

Тензорное произведение и функторы Tor. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ квазикогрентные пучки, а $U \subset X$ — аффинное открытое подмножество. Тогда $\mathcal{F}(U)$ и $\mathcal{G}(U)$ — $\mathcal{O}_X(U)$-модули, значит определен $\mathcal{O}_X(U)$-модуль $\mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$. Можно убедиться, что эти структуры согласованы для разных U, то есть эти модули склеиваются в квазикогерентный пучок, который обозначается $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ или $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$. Функтор $\otimes$ точен справа по каждому аргументу.

Аналогично, модули $\operatorname{Tor}_i^{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{F}(U), \mathcal{G}(U))$ определяют квазикогерентный пучок $\operatorname{Tor}_i(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Легко убедиться, что Tor_i — стирающий δ-функтор по каждому из аргументов, поэтому является левым производным от $\otimes$. Для вычисления функторов Tor_i удобнее всего использовать локально свободные резольвенты любого из аргументов (локально свободные пучки очевидно $\otimes$-ацикличны).

Функторы $\otimes$ и Tor сохраняют когерентность (если оба аргумента когерентны, то и результат когерентен).

Замечание 22.2. Формула $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})(U) \cong \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$ и аналогичные формулы для Tor_i, $\mathcal{H}om$ и $\mathcal{E}xt^i$ верны только для аффинных открытых подмножеств $U \subset X$.

Глобальные сечения. Так как когерентный пучок является пучком абелевых групп, определен функтор $\Gamma(X, -) : \mathsf{QCoh}(X) \to \mathsf{Ab}$. Пусть $R = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Тогда R — коммутативное кольцо, а функтор Γ пропускается через категорию R-модулей. В частности, если X — схема над полем k, то Γ пропускается через категорию k-векторных пространств.

Функтор Γ точен слева и имеет производные функторы $H^i(X, -)$. Для аффинной схемы X функтор Γ точен на категории квазикогерентных пучков, поэтому $H^i(X, -) = 0$ для $i > 0$.

Упражнение 22.3. Покажите, что если функтор F точен, то положив $T_0 = F$, $T_i = 0$ при $i > 0$, получим стирающий δ-функтор, значит $L_i F = 0$ для $i > 0$. Аналогично для правых производных функторов.

На произвольной схеме вычислять когомологии пучков можно, рассматривая инъективные (вялые, мягкие, и т.д.) резольвенты. В частности, можно показать, что если дано аффинное покрытие $\{U_i\}$ схемы X, такое что все $U_{i_0,\dots,i_n}$ тоже аффинны (это заведомо выполнено, если схема X отделима), то комплекс Чеха является Г-ацикличной резольвентой пучка и может быть использован для вычисления когомологий. Отсюда следует, что все $H^i(X,\mathcal{F})$ являются $\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$-модулями.

Упражнение 22.4. Пользуясь резольвентой Чеха, посчитайте когомологии пучков $\mathcal{O}(i)$ на $\mathbb{P}^n$.

При $i > \dim X$ когомологии квазикогерентных пучков обращаются в нуль:

$$H^i(X,\mathcal{F}) = 0 \qquad \text{при } i > \dim X, \text{ если } \mathcal{F} \in \mathsf{QCoh}(X).$$

Прямой образ. Пусть $f : X \to Y$ — морфизм схем (то есть морфизм топологических пространств плюс морфизм пучков колец $f^{\#} : f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$. Аналогично описанному выше случаю, определен функтор $f_* : \mathsf{QCoh}(X) \to \mathsf{Ab}$. При этом $f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$ является $\mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$-модулем, поэтому морфизм $f^{\#}$ задает на нем структуру модуля над $f^{-1}\mathcal{O}_Y(f^{-1}(U)) = \mathcal{O}_Y(U)$. Легко проверить, что эти структуры согласованы для разных U, поэтому $f_*\mathcal{F}$ — пучок $\mathcal{O}_Y$-модулей, если $\mathcal{F} \in \mathsf{QCoh}(X)$. Более того, можно проверить, что $f_*\mathcal{F}$ квазикогерентен, так что прямой образ дает функтор $f_* : \mathsf{QCoh}(X) \to \mathsf{QCoh}(Y)$.

Функтор f_* точен слева и имеет производные функторы R^if_*. Если морфизм f аффинный, то функтор f_* точен на категории квазикогерентных пучков, поэтому $R^if_* = 0$ для $i > 0$.

Для произвольного морфизма вычислять прямые образы можно с помощью комплекса Чеха (если дано аффинное покрытие $\{U_i\}$ схемы X, такое что все $U_{i_0,\dots,i_n}$ тоже аффинны , то комплекс Чеха является f_*-ацикличной резольвентой пучка). Отсюда следует, что все $R^if_*\mathcal{F}$ являются квазикогерентными пучками.

Если слои морфизма f имеют размерность не больше n, то

$$R^if_*\mathcal{F} = 0 \qquad \text{при } i > n, \text{ если } \mathcal{F} \in \mathsf{QCoh}(X).$$

Если морфизм f собственный, то (высшие) прямые образы сохраняют когерентность. В частности, если X собственная схема над полем, то когомологии когерентного пучка — конечномерные векторные пространства.

Обратный образ. Пусть $f : X \to Y$ — морфизм схем. Если $\mathcal{F}$ — квазикогерентный пучок, то $f^{-1}\mathcal{F}$ не имеет структуры $\mathcal{O}_X$-модуля. Однако, он является $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-модулем, поэтому пользуясь морфизмом $f^{\#}$ можно получить структуру $\mathcal{O}_X$-модуля на

$$f^*\mathcal{F} := f^{-1}\mathcal{F} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X.$$

Легко видеть, что $f^*\mathcal{F}$ квазикогерентен.

Замечание 22.5. Важно понимать, что функтор обратного образа для когерентных пучков определяется совсем не так, как для пучков абелевых групп. В частности, он обладает совершенно другими свойствами!

Функтор f^* равен композиции точного функтора f^{-1} и точного справа функтора тензорного произведения, поэтому он точен справа. Можно показать, что он имеет производные функторы L_if^*. Если морфизм f плоский (то есть $\mathcal{O}_X$ является плоским $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-модулем), то функтор f^* точен, поэтому $L_if^* = 0$ для $i > 0$.

Аналогично, если $\mathcal{F}$ — плоский $\mathcal{O}_Y$-модуль (например, если $\mathcal{F}$ локально свободен), то $L_if^*\mathcal{F} = 0$. Поэтому для произвольного морфизма вычислять обратные образы можно с помощью локально свободных резольвент. Отсюда следует, что все $L_if^*\mathcal{F}$ являются квазикогерентными пучками.

Обратные образы и их производные функторы сохраняют когерентность.

Между перечисленными функторами есть масса соотношений, которые мы пока не обсуждаем, так как это гораздо удобнее сделать в рамках формализма производных категорий. Ограничимся лишь следующими замечаниями.

Упражнение 22.6. Покажите, что (a) функтор f^* сопряжен слева к f_*; (b) $\otimes$ сопряжен слева к $\mathcal{H}om$.

Упражнение 22.7. Покажите, что если f — открытое вложение, то $f^* = f^{-1}$.

Производные категории

Часть 23. Локализация категорий

Определение производной категории очень просто. Производная категория абелевой категории $\mathcal{A}$ — это локализация категории комплексов $\mathrm{Com}(\mathcal{A})$ относительно класса квазиизоморфизмов. Единственное нетривиальное место здесь — это понятие локализации категории. Как это часто бывает, здесь есть два подхода.

Во-первых, есть формальное определение через универсальное свойство, от которого, на первый взгляд, мало толку. Однако оно часто очень удачно работает. Например, с его помощью легко строить функторы из локализованной категории (в частности из производной категории).

Во-вторых, есть явная (относительно) конструкция локализованной категории, которая по началу сильно облегчает жизнь. Однако, это эффект чисто психологический — явная конструкция при работе с производными категориями практически никогда не используется.

Начнем с формального определения. Для всякой категории $\mathcal{C}$ обозначим через $\mathrm{Iso}(\mathcal{C})$ класс всех изоморфизмов в $\mathcal{C}$. Пусть теперь $\mathcal{C}$ — категория, а S — какой-либо класс морфизмов в $\mathcal{C}$. Локализацией категории $\mathcal{C}$ относительно класса S называется пара, состоящая из категории $\mathcal{C}[S^{-1}]$ и функтора $Q:\mathcal{C}\to\mathcal{C}[S^{-1}]$, такие что

(1) $Q(S)\subset \mathrm{Iso}(\mathcal{C}[S^{-1}])$;
(2) для любого функтора $F:\mathcal{C}\to\mathcal{C}'$, такого что $F(S)\subset\mathrm{Iso}(\mathcal{C}')$ существует единственный с точностью до изоморфизма функтор $F':\mathcal{C}[S^{-1}]\to\mathcal{C}'$, такой что $F'\circ Q\cong F$.

Лемма 23.1. *Если локализация $\mathcal{C}[S^{-1}]$ существует, то она определена однозначно с точностью до эквивалентности категорий.*

Доказательство. Пусть $Q_1:\mathcal{C}\to\mathcal{C}_1$ и $Q_2:\mathcal{C}\to\mathcal{C}_2$ — две локализации категории $\mathcal{C}$ относительно одного и того же класса морфизмов S. Так как $Q_1(S)\subset\mathrm{Iso}(\mathcal{C}_1)$ и $Q_2(S)\subset\mathrm{Iso}(\mathcal{C}_2)$, по универсальному свойству получаем функторы $F:\mathcal{C}_1\to\mathcal{C}_2$ и $G:\mathcal{C}_2\to\mathcal{C}_1$, такие что $F\circ Q_1\cong Q_2$ и $G\circ Q_2\cong Q_1$. Следовательно, $G\circ F\circ Q_1\cong Q_1$, поэтому в силу единственности функтора в универсальном свойстве, получаем изоморфизм $G\circ F\cong\mathrm{id}_{\mathcal{C}_1}$. Аналогично $F\circ G\cong\mathrm{id}_{\mathcal{C}_2}$. Значит F и G взаимно обратные эквиваллентности. $\square$

Упражнение 23.2. Покажите, что (a) если $S\subset\mathrm{Iso}(\mathcal{C})$, то $\mathcal{C}[S^{-1}]\cong\mathcal{C}$, $Q\cong\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$; (b) если $S=\mathrm{Hom}(\mathcal{C})$, то $\mathcal{C}[S^{-1}]\cong\pi_0(\mathcal{C})$, где $\pi_0(\mathcal{C})$ — это категория, такая что $\mathrm{Ob}(\pi_0(\mathcal{C}))$ — это классы изоморфизма объектов в $\mathcal{C}$, а морфизмы — только тождественные.

Если S — произвольный класс морфизм, обозначим через $\overline{S}$ минимальный класс, содержащий S, $\mathrm{Iso}(\mathcal{C})$, и такой что если $f\circ g=h$ и два из трех морфизмов f, g и h содержатся в S, то содержится и третий. Класс морфизмов S называется насыщеным, если $\overline{S}=S$.

Лемма 23.3. *Если одна из категорий $\mathcal{C}[S^{-1}]$ и $\mathcal{C}[\overline{S}^{-1}]$ существует, то существует и вторая и они эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{C}[S^{-1}]$ существует, $Q:\mathcal{C}\to\mathcal{C}[S^{-1}]$ функтор локализации, а $F:\mathcal{C}\to\mathcal{C}'$ — функтор, такой что $F(\overline{S})\subset\mathrm{Iso}(\mathcal{C}')$. Так как $S\subset\overline{S}$, существует единственный функтор $F':\mathcal{C}[S^{-1}]\to\mathcal{C}'$, такой что $F\cong F'\circ Q$. При этом ясно, что $Q(\overline{S})\subset\overline{Q(S)}\subset\overline{\mathrm{Iso}}=\mathrm{Iso}$. Поэтому $\mathcal{C}[S^{-1}]$ является локализацией $\mathcal{C}$ в $\overline{S}$.

Обратно, пусть $\mathcal{C}[\overline{S}^{-1}]$ существует, $\overline{Q}:\mathcal{C}\to\mathcal{C}[\overline{S}^{-1}]$ функтор локализации, а $F:\mathcal{C}\to\mathcal{C}'$ — функтор, такой что $F(S)\subset\mathrm{Iso}(\mathcal{C}')$. Тогда $F(\overline{S})\subset\overline{F(S)}\subset\overline{\mathrm{Iso}}=\mathrm{Iso}$, поэтому существует единственный функтор $F':\mathcal{C}[\overline{S}^{-1}]\to\mathcal{C}'$, такой что $F\cong F'\circ\overline{Q}$. При этом $\overline{Q}(S)\subset\overline{Q}(\overline{S})\subset\mathrm{Iso}$. Поэтому $\mathcal{C}[\overline{S}^{-1}]$ является локализацией $\mathcal{C}$ в S. $\square$

Упражнение 23.4. Покажите, что если $S\subset T$, то $\mathcal{C}[T^{-1}]\cong\mathcal{C}[S^{-1}][Q_S(T)^{-1}]$.

Часть 24. Исчисление частных

Явно категория $\mathcal{C}[S^{-1}]$ строится с помощью "исчисления частных". Для удобства будем считать класс S насыщенным. Пусть $X, Y \in \mathcal{C}$. Рассмотрим диаграммы

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & Z & \\ X \arrow[ur, "f"] & & Y \arrow[ul, "s"'] \end{tikzcd} \qquad \text{и} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] X & & Y \\ & Z \arrow[ul, "s"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

в которых $s \in S$, а f — произвольный морфизм. Первую из этих диаграмм будем называть **левой S-дробью** и обозначать $s^{-1} \circ f$, а вторую — **правой S-дробью** и обозначать $f \circ s^{-1}$. При этом f будем называть числителем дроби, а s — знаменателем.

Кроме того, рассмотрим диаграммы вида

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & Z_1 & & Z_2 & & \cdots & & Z_{n-1} & & Z_n & \\ X \arrow[ur, "f_1"] & & W_1 \arrow[ul, "s_1"'] \arrow[ur, "f_2"] & & \arrow[ul, "s_2"'] & \cdots & \arrow[ur, "f_{n-1}"] & & W_{n-1} \arrow[ul, "s_{n-1}"'] \arrow[ur, "f_n"] & & Y \arrow[ul, "s_n"'] \end{tikzcd}$$

в которых $s_i \in S$, а f_i — произвольные морфизмы. Такие диаграммы будем называть **сложными S-дробями**. Две сложные дроби будем называть элементарно эквивалентными, если одна из них получается

- добавлением в цепочку морфизмов фрагмента $s^{-1} \circ s$ или $s \circ s^{-1}$ для некоторого $s \in S$;
- заменой фрагмента $g \circ \mathrm{id}^{-1} \circ f$ на $(g \circ f)$;
- заменой фрагмента $s^{-1} \circ \mathrm{id} \circ t^{-1}$ на $(t \circ s)^{-1}$;

и просто эквивалентными, если их можно соединить цепочкой элементарных эквивалентностей.

Можно определить категорию $\mathcal{C}[S^{-1}]$ следующим образом. Объекты в $\mathcal{C}[S^{-1}]$ — это объекты в $\mathcal{C}$, морфизмы из X в Y— классы эквивалентности сложных дробей, начинающиеся в X и кончающиеся в Y, а композиция морфизмов — присоединение сложных дробей (она очевидно согласована с отношением эквивалентности). При этом левая дробь $\mathrm{id}^{-1} \circ \mathrm{id}$ очевидно является тождественным морфизмом. Единственная сложность — вообще говоря, морфизмы в этой категории не будут образовывать множество, а будут образовывать лишь класс. Чтобы бороться с этой проблемой, приходится вводить ограничения на категорию $\mathcal{C}$. Например, можно ограничиться рассмотрением лишь малых категорий $\mathcal{C}$. Действительно, если категория $\mathcal{C}$ малая, то все сложные дроби образуют множество.

Лемма 24.1. *Если $\mathcal{C}$ — малая категория, то определенная выше категория $\mathcal{C}[S^{-1}]$ является локализацией категории $\mathcal{C}$ относительно S.*

Доказательство. Покажем, что построенная категория в самом деле является локализацией. Определим функтор $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[S^{-1}]$, являющийся тождественным на объектах и переводящим морфизм f в левую дробь $\mathrm{id}^{-1} \circ f$. Так как $\mathrm{id}^{-1} \circ g \circ \mathrm{id}^{-1} \circ f \sim \mathrm{id}^{-1} \circ (g \circ f)$ это действительно функтор. Пусть теперь $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ — функтор, такой что $F(S) \subset \mathrm{Iso}(\mathcal{C}')$. Определим функтор $F' : \mathcal{C}[S^{-1}] \to \mathcal{C}'$ таким образом. На объектах F' совпадает с F, а дробь $s_n^{-1} \circ f_n \circ \cdots \circ s_1^{-1} \circ f_1$ переводит в морфизм $F(s_n)^{-1} \circ F(f_n) \circ \cdots \circ F(s_1)^{-1} \circ F(f_1)$. Легко видеть, что эквивалентные дроби переходят в один и тот же морфизм, и что композиция морфизмов переходит в композицию. Поэтому это функтор. Единственность такого функтора тоже ясна. □

Чтобы сокращать сложные дроби, надо уметь переносить знаменатели справа налево или слева направо.

Лемма 24.2. *Предположим композиции морфизмов $W_1 \xrightarrow{s_1} Z_1 \xrightarrow{g} Z$ и $W_1 \xrightarrow{f_2} Z_2 \xrightarrow{t} Z$ равны, причем $s_1, t \in S$. Тогда $s_2^{-1} \circ f_2 \circ s_1^{-1} \circ f_1 \sim (t \circ s_2)^{-1} \circ (g \circ f_1)$.*

Доказательство. В самом деле,

$$s_2^{-1} \circ f_2 \circ s_1^{-1} \circ f_1 \sim s_2^{-1} \circ \mathrm{id} \circ \mathrm{id}^{-1} \circ f_2 \circ s_1^{-1} \circ f_1 \sim s_2^{-1} \circ \mathrm{id} \circ t^{-1} \circ t \circ \mathrm{id}^{-1} \circ f_2 \circ s_1^{-1} \circ f_1 \sim$$
$$\sim (ts_2)^{-1} \circ (tf_2) \circ s_1^{-1} \circ f_1 = (ts_2)^{-1} \circ (gs_1) \circ s_1^{-1} \circ f_1 \sim (ts_2)^{-1} \circ g \circ \mathrm{id}^{-1} \circ s_1 \circ s_1^{-1} \circ f_1 \sim$$
$$\sim (ts_2)^{-1} \circ g \circ \mathrm{id}^{-1} \circ f_1 \sim (ts_2)^{-1} \circ (gf_1).$$

□

Лемма 24.3. *Если $\mathcal{C}$ имеет нулевой объект $0_{\mathcal{C}}$, то он же является нулевым объектом в $\mathcal{C}[S^{-1}]$.*

Доказательство. Заметим вначале, что всякая левая дробь $0 \xrightarrow{0} Z \xleftarrow{s} X$ эквивалентна дроби $0 \xrightarrow{0} X \xleftarrow{\mathrm{id}} X$. В самом деле $s^{-1} \circ 0 \sim s^{-1} \circ s \circ \mathrm{id}^{-1} \circ 0 \sim \mathrm{id}^{-1} \circ 0$. При этом, композицию последней дроби с любой другой можно свернуть $s^{-1} \circ f \circ \mathrm{id}^{-1} \circ 0 \sim (\mathrm{id}\, s)^{-1} \circ (f0) = s^{-1} \circ 0$. Пользуясь этими двумя замечаниями легко показать, что $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}(0, Y)$ состоит из одного элемента, то есть 0 является начальным объектом.

Аналогично, всякая левая дробь $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{0} 0$ эквивалентна дроби $X \xrightarrow{0} 0 \xleftarrow{0} 0$. В самом деле $0^{-1} \circ f \sim 0^{-1} \circ 0 \circ 0^{-1} \circ f \sim 0^{-1} \circ 0$ (во второй эквивалентности использовалось равенство $0 = \mathrm{id} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(0, 0)$). При этом, по той же причине композицию последней дроби с любой другой можно свернуть $0^{-1} \circ 0 \circ s^{-1} \circ f \sim 0^{-1} \circ f$. Таким образом, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}(X, 0)$ состоит из одного элемента, то есть 0 является конечным объектом. □

Часть 25. Условия Оре

Однако, указанная конструкция имеет большие недостатки. Во-первых, множество сложных дробей имеет непростую структуру и его сложно описать. Во-вторых, если, например, исходная категория $\mathcal{C}$ аддитивна, совершенно непонятно, будет ли аддитивной категория $\mathcal{C}[S^{-1}]$. Обе эти проблемы исчезают, если множество S удовлетворяет следующим свойствам, которые иногда называются (левые) условия Оре:

(1) класс S насыщен;
(2) для всякой правой S-дроби $g \circ t^{-1}$ найдется левая S-дробь $s^{-1} \circ f : X \to Y$, так что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & Z & \\
X \arrow[ur, "f"] & & Y \arrow[ul, "s"'] \\
 & W \arrow[ul, "t"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

коммутативна;
(3) если для морфизмов f, g найдется $s \in S$, такой что $fs = gs$, то найдется и $t \in S$, так что $tf = tg$.

Замечание 25.1. Вместо условий (2) и (3) можно использовать правые условия Оре, в которых левые дроби меняются с правыми ролями.

Лемма 25.2. *Если класс S удовлетворяет левым условиям Оре, то $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}(X, Y)$ есть фактор множества левых S-дробей из X в Y по отношению эквивалентности: $s^{-1} \circ f \approx (ts)^{-1} \circ (tf)$, где $t \in S$.*

Доказательство. Всякую левую дробь можно рассматривать как сложную. Так как

$$s^{-1} \circ f \sim s^{-1} \circ \mathrm{id} \circ \mathrm{id}^{-1} \circ f \sim s^{-1} \circ \mathrm{id} \circ t^{-1} \circ t \circ \mathrm{id}^{-1} \circ f \sim (ts)^{-1} \circ (tf),$$

эквивалентным левым дробям соответствуют эквивалентные сложные дроби, значит мы получаем корректно определенное отображение из множества классов эквивалентности левых дробей в классы эквивалентности сложных дробей.

Построим обратное отображение. Пусть $s_n^{-1} \circ f_n \circ \dots \circ s_1^{-1} \circ f_1$ — сложная дробь. Пользуясь условием Оре (2), для каждой правой дроби $f_i \circ s_{i-1}^{-1}$ найдем подходящую левую дробь $s_{i-1,i}^{-1} \circ f_{i-1,i}$. Затем для каждой правой дроби $f_{i,i+1} \circ s_{i-1,i}^{-1}$ найдем подходящую левую дробь $s_{i-1,i+1}^{-1} \circ f_{i-1,i+1}$, и т.д. В результате получим коммутативную диаграмму вида

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & Z_{15} & & & & & \\
 & & & & Z_{14} \arrow[ur, "f_{15}"] & & Z_{25} \arrow[ul, "s_{15}"'] & & & & \\
 & & & Z_{13} \arrow[ur, "f_{14}"] & & Z_{24} \arrow[ul, "s_{14}"'] \arrow[ur, "f_{25}"] & & Z_{35} \arrow[ul, "s_{25}"'] & & & \\
 & & Z_{12} \arrow[ur, "f_{13}"] & & Z_{23} \arrow[ul, "s_{13}"'] \arrow[ur, "f_{24}"] & & Z_{34} \arrow[ul, "s_{24}"'] \arrow[ur, "f_{35}"] & & Z_{45} \arrow[ul, "s_{35}"'] & & \\
 & Z_1 \arrow[ur, "f_{12}"] & & Z_2 \arrow[ul, "s_{12}"'] \arrow[ur, "f_{23}"] & & Z_3 \arrow[ul, "s_{23}"'] \arrow[ur, "f_{34}"] & & Z_4 \arrow[ul, "s_{34}"'] \arrow[ur, "f_{45}"] & & Z_5 \arrow[ul, "s_{45}"'] & \\
X \arrow[ur, "f_1"] & & W_1 \arrow[ul, "s_1"'] \arrow[ur, "f_2"] & & W_2 \arrow[ul, "s_2"'] \arrow[ur, "f_3"] & & W_3 \arrow[ul, "s_3"'] \arrow[ur, "f_4"] & & W_4 \arrow[ul, "s_4"'] \arrow[ur, "f_5"] & & Y \arrow[ul, "s_5"']
\end{tikzcd}$$

Положим $f = f_{1n} \circ f_{1,n-1} \circ \cdots \circ f_{12} \circ f_1$ и $s = s_{1n} \circ s_{2n} \circ \cdots \circ s_{n-1,n} \circ s_n$. Покажем, что левая дробь $s^{-1} \circ f$ определена исходной сложной дробью однозначно с точностью до эквивалентности (то есть меняется на эквивалентную при другом выборе морфизмов s_{ij}, f_{ij} и замене исходной дроби на эквивалентную). В самом деле, поменяем например левую дробь $s_{12}^{-1} \circ f_{12}$ на $t_{12}^{-1} \circ g_{12}$ (так что $f_{12}s_1 = s_{12}f_2$ и $g_{12}s_1 = t_{12}f_2$). Рассмотрим правую дробь $s_{12} \circ t_{12}^{-1}$ и найдем для нее подходящую левую дробь $u^{-1} \circ v$. Тогда $vt_{12} = us_{12}$, причем $u \in S$. В силу насыщенности S получаем также $v \in S$. Теперь $vg_{12}s_1 = vt_{12}f_2 = us_{12}f_2 = uf_{12}s_1$. Пользуясь условием Оре (3), находим $w \in S$, такой что $wvg_{12} = wuf_{12}$. Значит

$$(s_{12}s_2)^{-1} \circ (f_{12}f_1) \approx (wus_{12}s_2)^{-1} \circ (wuf_{12}f_1) = (wvt_{12}s_2)^{-1} \circ (wvg_{12}f_1) \approx (t_{12}s_2)^{-1} \circ (g_{12}f_1).$$

Остается проверить, что результат нашей операции не зависит (с точностью до эквивалентности) от замены одной из левых дробей на эквивалентную. В самом деле, пусть мы меняем $s_i^{-1} \circ f_i$ на $(t_is_i)^{-1} \circ (t_if_i)$. Найдем для правых дробей $t_i \circ s_{i-1,i}^{-1}$ и $f_{i,i+1} \circ t_i^{-1}$ подходящие левые дроби $u^{-1} \circ t_{i-1,i}$ и $t_{i,i+1}^{-1} \circ g$. Как и раньше доказываем $t_{i-1,i} \in S$. Теперь меняем левые дроби $s_{i-1,i}^{-1} \circ f_{i-1,i}$ и $s_{i,i+1}^{-1} \circ f_{i,i+1}$ на $(t_{i-1,i}s_{i-1,i})^{-1} \circ (t_{i-1,i}f_{i-1,i})$ и $(t_{i,i+1}s_{i,i+1}^{-1}) \circ (t_{i,i+1}f_{i,i+1})$ соответственно. Продолжая тем же способом, заменим всю диаграмму, в результате чего будет видно, что результат операции будет заменен на эквивалентную левую дробь. Следовательно, наша операция корректно определена и остается лишь проверить, что она действительно обратная, то есть что композиции тождественны.

Случай одной из композиций очевиден. Если мы берем левую дробь, рассматриваем ее как сложную, то диаграмма тривиальна, и результат — исходная левая дробь. Поэтому остается заметить, что в силу леммы 24.2 левая дробь, построенная по сложной дроби, эквивалентна ей как сложная дробь. □

Другой способ доказать лемму — проверить свойство универсальности.

Упражнение 25.3. Положим $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}' = \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y)$ — фактор множества левых S-дробей из X в Y по отношению эквивалентности $\sim$. (a) Введите операцию композиции. (b) Проверьте ее ассоциативность.
(c) Покажите, что категория $\mathcal{C}'$ удовлетворяет универсальному свойству локализации.

Пользуясь условиями Оре можно приводить дроби к общему знаменателю, что позволяет их складывать.

Лемма 25.4. *Пусть категория $\mathcal{C}$ аддитивна, а для S выполнены условия Оре. Тогда категория $\mathcal{C}[S^{-1}]$ и функтор $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[S^{-1}]$ аддитивны.*

Доказательство. Введем операцию сложения на $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[S^{-1}]}(X, Y)$ следующим образом. Пусть $s^{-1} \circ f$ и $t^{-1} \circ g$ — две левых дроби из X в Y. Рассмотрим правую дробь $s \circ t^{-1}$ и найдем для нее подходящую левую дробь $u^{-1} \circ v$. Тогда $w := vt = us$, причем $u \in S$. В силу насыщенности S получаем также $v \in S$. Положим

$$s^{-1} \circ f + t^{-1} \circ g := w^{-1} \circ (uf + vg).$$

Упражнение 25.5. Покажите, что (a) построенная операция задает структуру абелевой группы;
(b) операция композиции морфизмов билинейна; (c) функтор $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[S^{-1}]$ линеен на морфизмах.

Остается проверить, что существуют произведения. Для любых объектов $Y_1, Y_2 \in Y$ рассмотрим проекции $p_k : Y_1 \times Y_2 \to Y_k$ и вложения $i_k : Y_k \to Y_1 \times Y_2$. Тогда $p_ki_l = \delta_{kl}$, $i_1p_1 + i_2p_2 = \mathrm{id}$. Так как Q линеен на морфизмах, все те же соотношения выполняются и в $\mathcal{C}[S^{-1}]$, откуда следует, что $Y_1 \times Y_2$ является произведением (а также и копроизведением) объектов Y_1 и Y_2 в $\mathcal{C}[S^{-1}]$. □

Таким образом, при локализации категории по классу морфизмов, удовлетворяющему условиям Оре, аддитивность категории сохраняется. Естественно спросить, сохраняется ли абелевость. Ответ оказывается почти всегда отрицательным. Однако, в дальнейшем мы покажем, что при локализации сохранятся другое важное свойство категории — триангулированность — которое является неплохой заменой абелевости. Пока же вернемся к определению производной категории.

Часть 26. Производная категория как локализация гомотопической

Итак, напомним, что производная категория $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ абелевой категории $\mathcal{A}$ — это локализация категории комплексов $\mathrm{Com}(\mathcal{A})$ относительно класса квазиизоморфизмов Qis:

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) := \mathrm{Com}(\mathcal{A})[\mathrm{Qis}^{-1}].$$

Упражнение 26.1. Покажите, что класс Qis насыщен.

Однако, класс Qis в категории комплексов не удовлетворяет условиям Оре. Поэтому напрямую воспользоваться результатами предыдущей части невозможно. Однако, все становится значительно лучше, если перейти к гомотопической категории.

Гомотопическая категория комплексов $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$ определяется следующим образом:

$$\mathrm{Ob}\,\mathrm{Hot}(\mathcal{A}) = \mathrm{Ob}\,\mathrm{Com}(\mathcal{A}), \qquad \mathrm{Hom}_{\mathrm{Hot}(\mathcal{A})}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Com}(\mathcal{A})}(X,Y)/\sim_h,$$

где $\sim_h$ — гомотопическая эквивалентность.

Упражнение 26.2. Покажите, что морфизмы гомотопные нулю образуют идеал (то есть набор абелевых подгрупп в морфизмах, инвариантный относительно композиции с произвольными морфизмами). В частности, на $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$ существует структура категории, такая что естественный отображение $H : \mathrm{Com}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Hot}(\mathcal{A})$ (тождественный на объектах и проекция на морфизмах) является функтором. Проверьте, что категория $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$ и функтор H аддитивны.

Лемма 26.3. *Функтор локализации $Q : \mathrm{Com}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{A})$ раскладывается в композицию $Q = Q' \circ H$, где $Q' : \mathrm{Hot}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(A)$. Более того, существует эквивалентность*

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) \cong \mathrm{Hot}(\mathcal{A})[H(\mathrm{Qis})^{-1}],$$

такая что Q' изоморфен функтору локализации $Q_H : \mathrm{Hot}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Hot}(\mathcal{A})[H(\mathrm{Qis})^{-1}]$.

Доказательство. Естественный функтор $Q_H \circ H : \mathrm{Com}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Hot}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Hot}(\mathcal{A})[H(\mathrm{Qis})^{-1}]$ переводит квазиизоморфизмы в изоморфизмы, и, значит пропускается через функтор $F : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Hot}(\mathcal{A})[H(\mathrm{Qis})^{-1}]$. Для построения обратного функтора покажем, что функтор локализации $Q : \mathrm{Com}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{A})$ переводит морфизмы, гомотопные нулю в нуль. В самом деле, пусть $f : X \to Y$ и $f \sim_h 0$. Рассмотрим конус $C(\mathrm{id}_X)$. Заметим, что морфизм

$$c^k = (f^k, h^{k+1}) : C(\mathrm{id}_X)^k = X^k \oplus X^{k+1} \to Y^k$$

является морфизмом комплексов $c : C(\mathrm{id}_X) \to Y$, причем $f = c \circ i : X \to C(\mathrm{id}_X) \to Y$. Значит $Q(f) = Q(c)Q(i)$. С другой стороны, комплекс $C(\mathrm{id}_X)$ ацикличен, то есть квазиизоморфен нулевому, а значит $Q(C(\mathrm{id}_X)) \cong 0$ в $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Таким образом, морфизм $Q(f)$ пропускается через нулевой объект, и значит равен нулю. Следовательно, функтор Q раскладывается в композицию $Q' \circ H$. При этом $Q'(H(\mathrm{Qis})) = Q(\mathrm{Qis}) \subset \mathrm{Iso}$, поэтому Q' раскладывается в композицию $Q' = G \circ Q_H$. Получаем коммутативную диаграмму функторов

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Com}(\mathcal{A}) \arrow[rr, "H"] \arrow[d, "Q"'] & & \mathrm{Hot}(\mathcal{A}) \arrow[d, "Q_H"] \arrow[dll, "Q'"'] \\
\mathrm{Com}(\mathcal{A})[\mathrm{Qis}]^{-1} \arrow[rr, shift left, "F"] & & \mathrm{Hot}(\mathcal{A})[H(\mathrm{Qis})^{-1}] \arrow[ll, shift left, "G"]
\end{tikzcd}$$

Покажем, что F и G квазиобратны. В самом деле, $G \circ F \circ Q = G \circ Q_H \circ H = Q' \circ H = Q$, поэтому в силу универсальности, получаем $G \circ F \cong \mathrm{id}$. Аналогично, $F \circ G \circ Q_H = F \circ Q' = Q_H$, откуда $F \circ G \cong \mathrm{id}$. □

Лемма 26.4. *В гомотопической категории $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$ класс квазиизоморфизмов удовлетворяет и левым и правым условиям Оре.*

Доказательство. Проверим левые условия Оре. Насыщенность класса квазиизоморфизмов очевидна. Докажем свойство (2). Пусть, $g : W \to Y$, $t : W \to X$ — морфизмы в $\mathrm{Com}(\mathcal{A})$ (любые морфизмы в $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$ по определению поднимаются), причем $t \in \mathrm{Qis}$. Рассмотрим морфизм $\phi = t \oplus g : W \to X \oplus Y$ и положим $Z = C(\phi)$. Получим морфизм $i_\phi : X \oplus Y \to Z$, такой что $i_\phi \circ \phi \sim_h 0$ в силу следующего упражнения.

Упражнение 26.5. Пусть $f : X \to Y$ — морфизм комплексов, а $i : Y \to C(f)$ и $p : C(f) \to X[1]$ — естественные морфизмы. Покажите, что $i \circ f \sim_h 0$ и $f[1] \circ p \sim_h 0$.

Пусть $i_\phi = f \oplus s$, где $f : X \to Z$ и $s : Y \to Z$. Тогда $i_\phi \circ \phi = f \circ t + s \circ g \sim_h 0$, откуда $(-f) \circ t \sim_h s \circ g$. Остается проверить, что s — квазиизоморфизм. Для этого напишем точную последовательность когомологий

$$\cdots \to H^{k-1}(Z) \to H^k(W) \xrightarrow{H^k(\phi)} H^k(X) \oplus H^k(Y) \xrightarrow{H^k(i_\phi)} H^k(Z) \to H^{k+1}(W) \to \dots$$

Так как $\phi = t \oplus g$, а t — квазиизоморфизм, морфизм $H^k(W) \to H^k(X) \oplus H^k(Y)$ инъективен, значит морфизмы $H^k(Z) \to H^{k+1}(W)$ равны нулю, то есть длинная точная последовательность разрезается на точные тройки

$$0 \to H^k(W) \stackrel{H^k(\phi)}{\to} H^k(X) \oplus H^k(Y) \stackrel{H^k(i_\phi)}{\to} H^k(Z) \to 0.$$

Отсюда следует, что квадрат

$$\begin{tikzcd} H^k(W) \arrow[r, "H^k(t)"] \arrow[d, "H^k(g)"'] & H^k(X) \arrow[d, "-H^k(f)"] \\ H^k(Y) \arrow[r, "H^k(s)"] & H^k(Z) \end{tikzcd}$$

декартов и кодекартов, поэтому из того, что $H^k(t)$ изоморфизм следует, что $H^k(s)$ также изоморфизм.

Остается проверить свойство (3). В силу аддитивности достаточно показать, что если для $f : X \to Y$ найдется $s : Z \to X$, $s \in \mathrm{Qis}$, такой что $fs \sim_h 0$, то найдется и $t : Y \to W$, $t \in \mathrm{Qis}$, такой что $tf = 0$. Рассмотрим конус $C(s)$ и морфизм $i : X \to C(s)$. Пусть h — гомотопия для морфизма fs, так что $fs = dh + hd$. Рассмотрим морфизм $g^k = (f^k, h^{k+1}) : C(s)^k = X^k \oplus Z^{k+1} \to Y^k$. Тогда

$$gd_{C(s)} = (f, h)\left(\begin{smallmatrix} d & s \\ 0 & -d \end{smallmatrix}\right) = (fd, fs - hd) = (df, dh) = d(f, h) = d_Y g, \qquad gi_f = (f, h)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = f,$$

значит g — морфизм комплексов и $g \circ i_f = f$. Пусть теперь $W = C(g)$ и $t = i_g : X \to W$. Тогда $tf = i_g g i_f \sim_h 0$ так как $i_g g \sim_h 0$. С другой стороны, $C(s)$ ацикличен, так как s квазиизоморфизм, поэтому из длинной точной последовательности для $C(g)$ следует, что t квазиизоморфизм. $\square$

Следствие 26.6. *Производная категория $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ аддитивна.*

В определении производной категории можно заменить категорию комплексов $\mathrm{Com}(\mathcal{A})$ на любую из следующих подкатегорий:

- $\mathrm{Com}^b(\mathcal{A})$ — категорию ограниченных комплексов;
- $\mathrm{Com}^+(\mathcal{A})$ — категорию ограниченных снизу комплексов;
- $\mathrm{Com}^-(\mathcal{A})$ — категорию ограниченных сверху комплексов.

Поскольку взятие конуса сохраняет свойство ограниченности, все наши рассуждения применимы и в этой ситуации. Следовательно, определены ограниченные производные категории $\mathcal{D}^b(\mathcal{A}) = \mathrm{Com}^b(\mathcal{A})[\mathrm{Qis}^{-1}]$, $\mathcal{D}^+(\mathcal{A}) = \mathrm{Com}^+(\mathcal{A})[\mathrm{Qis}^{-1}]$ и $\mathcal{D}^-(\mathcal{A}) = \mathrm{Com}^-(\mathcal{A})[\mathrm{Qis}^{-1}]$, которые также являются локализациями ограниченных гомотопических категорий $\mathrm{Hot}^b(\mathcal{A})$, $\mathrm{Hot}^+(\mathcal{A})$ и $\mathrm{Hot}^-(\mathcal{A})$, и в частности аддитивны.

Еще один вариант — рассмотреть категорию n-периодических комплексов (и n-периодических морфизмов). Она даст n-периодическую производную категорию.

Гомологическая алгебра 7
29.10.2008

Триангулированные категории

Часть 27. Аксиомы

Триангулированная категория — это аддитивная категория $\mathcal{T}$ со следующими структурами

- автоэквивалентностью, которая традиционно обозначается $[1] : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$, $X \mapsto X[1]$;
- классом последовательностей вида $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$;

(автоэквивалентность называется функтором сдвига, а последовательности — выделенными треугольниками), удовлетворяющие следующим аксиомам

TR1: (1) для всякого объекта X треугольник $0 \to X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X \to 0[1]$ выделен;
(2) всякий треугольник изоморфный выделенному выделен;
(3) всякий морфизм $u : X \to Y$ можно дополнить до выделенного треугольника;

TR2: треугольник $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ выделен $\Longleftrightarrow$ треугольник $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1]$ выделен;

TR3: если трекгольники $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ и $X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} X'[1]$ выделены, а $f : X \to X'$ и $g : Y \to Y'$ — морфизмы, такие что $gu = u'f$, то существует морфизм $h : Z \to Z'$, такой что $hv = v'g$ и $f[1]w = w'h$

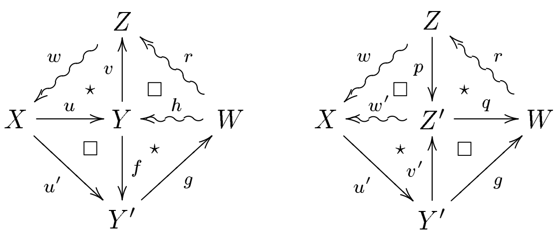
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "h"'] & X[1] \arrow[d, "{f[1]}"'] \\
X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & X'[1]
\end{tikzcd}$$

TR4: если $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ и $Y \xrightarrow{f} Y' \xrightarrow{g} W \xrightarrow{h} Y[1]$ — выделенные тругольники, то существует коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "p"'] & X[1] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"'] \\
X \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "g"'] & Z' \arrow[r, "w'"] \arrow[d, "q"'] & X[1] \arrow[d, "{u[1]}"'] \\
 & W \arrow[r, "\mathrm{id}_W"] \arrow[d, "h"'] & W \arrow[r, "h"] \arrow[d, "r"'] & Y[1] \\
 & Y[1] \arrow[r, "{v[1]}"] & Z[1] &
\end{tikzcd}$$

в которой две верхние строки и два средних столбца — выделенные треугольники.

Последняя из аксом обычно называется аксиомой октаэдра, поскольку соответствующую диаграмму можно переписать в виде октаэдра, который сверху и снизу выглядит следующим образом:



Здесь волнистые стрелки изображают морфизмы в объект сдвинутый на единицу, треугольники помеченные квадратом коммутативны, а звездой — выделены.

Пример 27.1. Введем на категории $\mathsf{k}-\mathsf{mod}$ векторных пространств триангулированную структуру следующим образом. Положим $[1] = \mathrm{id}$, а выделенными треугольниками будем называть треугольники вида $U \oplus V \to V \oplus W \to W \oplus U \to U \oplus V$, где каждый морфизм является композицией проекции на второе слагаемое и вложением первого.

Упражнение 27.2. Проверьте триангулированность этой категории.

Упражнение 27.3. Проверьте, что если $\mathcal{T}$ триангулирована, то $\mathcal{T}^\circ$ тоже триангулирована.

Часть 28. Свойства

По определению функтор сдвига является эквивалентностью, значит существует квазиобратный к нему функтор $[-1] : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$, так что $X[1][-1] \cong X \cong X[-1][1]$. Гораздо удобнее считать функтор сдвига автоморфизмом, а функтор $[-1]$ обратным к нему. Этого всегда можно добиться, заменив категорию на эквивалентную.

Упражнение 28.1. Докажите, что существует категория $\mathcal{T}'$, автоморфизм $[1] : \mathcal{T}' \to \mathcal{T}'$ и эквивалентность $\Phi : \mathcal{T}' \to \mathcal{T}$, такие что $\Phi \circ [1] \cong [1] \circ \Phi$. (Указание: $\operatorname{Ob}\mathcal{T}' = \{ (X_i, \phi_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mid X_i \in \operatorname{Ob}\mathcal{T},\ \phi_i : X_i[1] \xrightarrow{\cong} X_{i+1} \}$, $\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}'}((X_i, \phi_i), (Y_i, \psi_i)) = \{ (f_i \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(X_i, Y_i)) \mid f_{i+1} \circ \phi_i = \psi_i \circ f_i[1] \}$, $(X_i, \phi_i)[1] := (X_{i+1}, \phi_{i+1})$, $\Phi(X_i, \phi_i) := X_0$, $\Phi(f_i) := f_0$.) Проверьте, что если $\mathcal{T}$ триангулирована, то и $\mathcal{T}'$ триангулирована.

В дальнейшем для упрощения формул мы будем считать функтор сдвига автоморфизмом. Пользуясь функтором сдвига и аксиомой (TR2) всякий выделенный треугольник можно продолжить до бесконечной в обе стороны последовательности

$$\dots \xrightarrow{w[-2]} X[-1] \xrightarrow{-u[-1]} Y[-1] \xrightarrow{-v[-1]} Z[-1] \xrightarrow{-w[-1]} X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1] \xrightarrow{-v[1]} Z[1] \xrightarrow{-w[1]} X[2] \xrightarrow{u[2]} \dots,$$

в которой любой четырехэлементный сегмент является выделенным треугольником. Такая последовательность называется **спиралью**, а входящие в нее треугольники — **витками**.

Предложение 28.2. *Пусть $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ — выделенный тругольник. Тогда для любого объекта $U \in \mathcal{T}$ последовательности*

$$\dots \to \operatorname{Hom}(U, X[i]) \xrightarrow{u_*[i]} \operatorname{Hom}(U, Y[i]) \xrightarrow{v_*[i]} \operatorname{Hom}(U, Z[i]) \xrightarrow{w_*[i]} \operatorname{Hom}(U, X[i+1]) \xrightarrow{u_*[i+1]} \operatorname{Hom}(U, Y[i+1]) \to \dots,$$

$$\dots \to \operatorname{Hom}(Z[i], U) \xrightarrow{v^*[i]} \operatorname{Hom}(Y[i], U) \xrightarrow{u^*[i]} \operatorname{Hom}(X[i], U) \xrightarrow{w^*[i-1]} \operatorname{Hom}(Z[i-1], U) \xrightarrow{v^*[i-1]} \operatorname{Hom}(Y[i-1], U) \to \dots$$

точны.

Доказательство. Для первой последовательности достаточно проверить точность в члене $\operatorname{Hom}(U, Y)$. Пусть $g = u_*(f) : U \to Y$, где $f : U \to X$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\mathrm{id}_U"] \arrow[d, "f"'] & U \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & 0 \arrow[r] & U[1] \arrow[d, "f[1]"'] \\
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & X[1]
\end{tikzcd}$$

Верхняя строчка — выделенный треугольник по (TR1) и (TR2), а квадрат коммутативен. Значит, по (TR3) она дополняется морфизмом $h : 0 \to Z$ до коммутативной диаграммы. Следовательно, $v_*(g) = vg = h0 = 0$.

Пусть теперь $v_*(g) = 0$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & U[1] \arrow[r, "-\mathrm{id}_U"] & U[1] \arrow[d, "g[1]"'] \\
Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & X[1] \arrow[r, "-u[1]"] & X[1]
\end{tikzcd}$$

Верхняя и нижняя строчки выделены по (TR1) и (TR2), а квадрат коммутативен. Значит, по (TR3) она дополняется морфизмом $f' : U[1] \to X[1]$ до коммутативной диаграммы. Следовательно, $-g[1] = -u[1] \circ f[1]$, откуда $g = uf = u_*(f)$. Точность второй последовательности проверяется аналогично. $\square$

Следствие 28.3. *Если морфизмы f и g в аксиоме (TR3) изоморфизмы, то h тоже изоморфизм.*

Доказательство. Возьмем произвольный объект U и рассмотрим диаграмму точных последовательностей, полученных из двух выделенных треугольников

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(U,X) \arrow[r, "u_*"] \arrow[d, "f_*"'] & \mathrm{Hom}(U,Y) \arrow[r, "v_*"] \arrow[d, "g_*"'] & \mathrm{Hom}(U,Z) \arrow[r, "w_*"] \arrow[d, "h_*"'] & \mathrm{Hom}(U,X[1]) \arrow[r, "u_*[1]"] \arrow[d, "f[1]_*"'] & \mathrm{Hom}(U,Y[1]) \arrow[d, "g[1]_*"'] \\
\mathrm{Hom}(U,X') \arrow[r, "u'_*"] & \mathrm{Hom}(U,Y') \arrow[r, "v'_*"] & \mathrm{Hom}(U,Z') \arrow[r, "w'_*"] & \mathrm{Hom}(U,X'[1]) \arrow[r, "u'_*[1]"] & \mathrm{Hom}(U,Y'[1])
\end{tikzcd}$$

Она очевидно коммутативна, причем стрелки f_*, g_* $f[1]_*$ и $g[1]_*$ изоморфизмы. Значит по лемме о пяти гомоморфизмах морфизм h_* тоже изоморфизм. Значит $h_* : h_Z \to h_{Z'}$ — изоморфизм, откуда $h : Z \to Z'$ тоже изоморфизм. □

Упражнение 28.4. Покажите, что в выделенном треугольнике $vu = 0$, $wv = 0$ и $u[1]w = 0$.

Следствие 28.5. *Выделенный треугольник, дополняющий по аксиоме (TR1) морфизм $u : X \to Y$, определен однозначно с точностью до изоморфизма.*

Следствие 28.6. *Пусть трекгольники $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ и $X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} X'[1]$ выделены, а $g : Y \to Y'$ — морфизм, такой что $v'gu = 0$. Тогда существует морфизмы $f : X \to X'$ и $h : Z \to Z'$, задающие морфизм треугольников. Если при это $\mathrm{Hom}(X, Z'[-1]) = 0$, то такой морфизм треугольников — единственный.*

Доказательство. Рассмотрим морфизм $gu : X \to Y'$. Тогда по условию $v'_*(gu) = v'gu = 0$, значит найдется $f : X \to X'$, такой что $gu = u'_*(f) = u'f$. Теперь пользуясь аксиомой (TR3) получаем морфизм h.

Пусть теперь $\mathrm{Hom}(X, Z'[-1]) = 0$. В силу точности последовательности, морфизм f, такой что $u'_*(f) = gu$ определен однозначно с точностью до $w'[-1]_*(\mathrm{Hom}(X, Z'[-1])) = 0$, то есть однозначно. Аналогично, для морфизма h имеем $v^*(h) = v'g$, поэтому h определен однозначно с точностью до $w'^*(\mathrm{Hom}(X[1], Z')) = 0$, то есть однозначно. □

Второй частью этого следствия мы будем очень часто пользоваться в дальнейшем!

Часть 29. Триангулированность гомотопической категории

Рассмотрим гомотопическую категорию $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$ абелевой категории $\mathcal{A}$. Рассмотрим функтор сдвига $[1] : \mathrm{Hot}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Hot}(\mathcal{A})$, индуцированный сдвигом комплексов. Назовем треугольник в $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$ выделенным, если он изоморфен в $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$ треугольнику вида $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{i_u} C(u) \xrightarrow{p_u} X[1]$.

Наша цель — доказать триангулированность гомотопической категории. Начнем с леммы.

Лемма 29.1. *Пусть $0 \to X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \to 0$ — почленно расщепимая точная тройка комплексов, а $s^n : Z^n \to Y^n$ и $p^n : Y^n \to X^n$ — набор расщепляющих морфизмов. Положим $w^n = -p^{n+1} \circ d_Y^n \circ s^n : Z^n \to X^{n+1}$. Тогда треугольник $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ выделен в $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$.*

Доказательство. Заметим, что

$$uw = -upd_Ys = (sv - \mathrm{id}_Y)d_Ys = svd_Ys - d_Ys = sd_Zvs - d_Ys = sd_Z - d_Ys,$$

$$wv = -pd_Ysv = -pd_Y(\mathrm{id}_Y - up) = -pd_Y + pd_Yup = -pd_Y + pud_Xp = -pd_Y + d_Xp.$$

Отсюда следует, что

$$ud_Xw = d_Yuw = d_Y(sd_Z - d_Ys) = d_Ysd_Z = (sd_Z - uw)d_Z = -uwd_Z,$$

и так как u вложение, w — морфизм комплексов $Z \to X[1]$. Рассмотрим теперь морфизмы $f^n : Z^n \to C(u)^n$ и $g^n : C(u)^n \to Z^n$, заданные формулами

$$f^n = \left(\begin{smallmatrix} s^n \\ w^n \end{smallmatrix} \right), \qquad g^n = (v^n, 0)$$

Тогда

$$d_Cf - fd_Z = \left(\begin{smallmatrix} d_Ys + uw - sd_Z \\ -d_Xw - wd_Z \end{smallmatrix} \right) = 0, \qquad gd_C - d_Zg = (vd_Z - d_Zv, vu) = 0,$$

значит f и g — морфизмы комплексов. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, equal] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, shift right, "f"'] & X[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "i_u"] & C(u) \arrow[r, "p_u"] \arrow[u, shift right, "g"'] & X[1]
\end{tikzcd}$$

Легко видеть, что

$$i_u - fv = \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{id}_Y - sv \\ -wv \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} up \\ pd_Y - d_X p \end{smallmatrix}\right) = d_C \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ p \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ p \end{smallmatrix}\right) d_Y,$$

так что $fv \sim_h i_u$. Аналогично,

$$wg - p_u = (wv, -\mathrm{id}_X) = (-pd_Y + d_X p, -\mathrm{id}_X) = (p, 0)d_C + d_{X[1]}(p, 0),$$

так что $wg \sim_h p_u$. При этом очевидно, что $p_u f = w$ и $gi_u = v$, поэтому отображения вверх и вниз являются морфизмами треугольников. Остается заметить, что $gf = vs = \mathrm{id}_Z$, в то время как

$$\mathrm{id}_C - fg = \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{id}_Y - sv & 0 \\ -wv & \mathrm{id}_X \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} up & , & 0 \\ pd_Y - d_X p & , & \mathrm{id}_X \end{pmatrix} = d_C \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right) d_C,$$

то есть $fg \sim_h \mathrm{id}_C$. □

Теорема 29.2. *Гомотопическая категория триангулирована. Более того, всякий выделенный треугольник в* $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$ *изоморфен треугольнику, получающемуся из почленно расщепимой точной тройки комплексов.*

Доказательство. Ясно, что $C(0 \to X) = X$, поэтому (TR1.1) верно. При этом (TR1.2) и (TR1.3) сразу следуют из определения.

Теперь проверим (TR2). Пусть первый треугольник изоморфен треугольнику $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{i_u} C(u) \xrightarrow{p_u} X[1]$. Тогда второй изоморфен треугольнику $Y \xrightarrow{i_u} C(u) \xrightarrow{p_u} X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1]$. Но заметим, что последовательность комплексов $0 \to Y \xrightarrow{i_u} C(u) \xrightarrow{p_u} X[1] \to 0$ точна и почленно расщепима, поэтому достаточно заметить, что морфизм w, построенный в лемме совпадает с $-u[1]$.

Пусть теперь второй треугольник выделен. Применяя дважды предыдущее рассуждение, получаем, что треугольник $X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1] \xrightarrow{-v[1]} Z[1] \xrightarrow{-w[1]} X[2]$ тоже выделен. Но множество выделенных треугольников очевидно инвариантно относительно функтора сдвига, скомпонированного с заменой знака на морфизмах.

Заметим, что приведенные выше рассуждения уже доказывают вторую часть теоремы.

Теперь проверим аксиому (TR3). Достаточно рассмотреть случай, когда первый треугольник имеет вид $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{i_u} C(u) \xrightarrow{p_u} X[1]$, а второй — $X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{i_{u'}} C(u') \xrightarrow{p_{u'}} X'[1]$. Пусть $f : X \to X'$ и $g : Y \to Y'$ — такие морфизмы, что квадрат коммутативен в $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$, то есть $gu - u'f = dh + hd$. Рассмотрим тогда отображение $C(u)^n = Y^n \oplus X^{n+1} \to Y'^n \oplus X'^{n+1} = C(u')^n$, заданное матрицей

$$c(h) = \begin{pmatrix} g & h \\ 0 & f \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что

$$d_{C(u')}c(h) - c(h)d_{C(u)} = \begin{pmatrix} dg - gd & , & dh + hd + u'f - gu \\ 0 & , & fd - df \end{pmatrix} = 0,$$

значит $c(h)$ — морфизм комплексов. При этом очевидно $c(h)i_u = i_{u'}g$, $p_{u'}c(h) = f[1]p_u$, так что $c(h)$ дает искомый морфизм треугольников.

Наконец, проверим аксиому (TR4). Ввиду сказанного выше достаточно рассмотреть случай, когда оба треугольника получаются из почленно расщепимых троек комплексов. Иными словами, имеем

$$Y'^n = X^n \oplus Z^n \oplus W^n, \qquad d_{Y'} = \begin{pmatrix} d_X & x & y \\ 0 & d_Z & z \\ 0 & 0 & d_W \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $F_{[i,j]}$ подфактор комплекса Y' натянутый на слагаемые с номерами от i до j, так что $Y' = F_{[0,2]}$. Получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & F_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & F_{[0,1]} \arrow[r] \arrow[d] & F_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & F_0 \arrow[r] & F_{[0,2]} \arrow[r] \arrow[d] & F_{[1,2]} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & F_2 \arrow[r, equal] \arrow[d] & F_2 \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

с точными строками и столбцами. Простое вычисление показывает, что морфизмы, достраивающие строки и столбцы до выделенных треугольников, имеют вид

$$x : F_1 \to F_0[1], \qquad (x, y) : F_{[1,2]} \to F_0[1], \qquad \left(\begin{smallmatrix} y \\ z \end{smallmatrix}\right) : F_2 \to F_{[0,1]}[1], \qquad \text{и} \qquad z : F_2 \to F_1[1].$$

Отсюда сразу следует коммутативность двух квадратов в диаграмме октаэдра, а для коммутативности последнего квадрата надо проверить, что морфизмы

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & y \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right) : F_{[1,2]} \to F_{[0,1]}[1] \qquad \text{и} \qquad \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) : F_{[1,2]} \to F_{[0,1]}[1]$$

совпадают, то есть их разность гомотопна нулю. Но

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) d_{F_{[1,2]}} + d_{F_{[0,1]}[1]} \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} d & z \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} d & x \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -x & 0 \\ 0 & z \end{smallmatrix}\right),$$

что и требовалось. □

Часть 30. Локализация триангулированных категорий

Предположим, $\mathcal{T}$ — триангулированная категория, S — класс морфизмов в $\mathcal{T}$, а $\mathcal{T}[S^{-1}]$ — локализация. Мы уже знаем, что если S удовлетворяет условиям Оре, то категория $\mathcal{T}[S^{-1}]$ аддитивна. Возникает вопрос, является ли она триангулированной.

Скажем, что класс S **согласован с триангулированной структурой**, если выполняются свойства

(4) $s \in S \Longleftrightarrow s[1] \in S$;
(5) если морфизмы f и g в аксиоме (TR3) лежат в S, то морфизм h тоже можно выбрать лежащим в S.

Лемма 30.1. *Пусть $\mathcal{T}$ — триангулированная категория, а класс S удовлетворяет условиям Оре и согласован с триангулированной структурой. Тогда $\mathcal{T}[S^{-1}]$ обладает естественной структурой триангулированной категории.*

Доказательство. По доказанному на прошлой лекции категория $\mathcal{T}$ аддитивна. Поэтому начать надо с описания триангулированной структуры на $\mathcal{T}[S^{-1}]$. Во-первых, определим функтор сдвига. На объектах он будет действовать так же как и в категории $\mathcal{T}$, а левую дробь $s^{-1} \circ f$ переводить в $s[1]^{-1} \circ f[1]$. В силу условия (4) это опять левая дробь, причем такое действие очевидно согласовано с отношением эквивалентности дробей, а композиция левых дробей переходит в композицию. Поэтому получаем корректно определенный эндофунктор категории $\mathcal{T}[S^{-1}]$. Очевидно, что он будет автоэквивалентностью (или даже автоморфизмом, если это выполнялось в $\mathcal{T}$).

Будем считать треугольник в $\mathcal{T}[S^{-1}]$ выделенным, если он изоморфен выделенному треугольнику в $\mathcal{T}$.

Теперь проверим аксиомы. Аксиомы (TR1.1), (TR1.2) и (TR2) очевидны. Проверим (TR1.3). Пусть $s^{-1} \circ f : X \to Y$ — морфизм, где $s : Y \to Y'$, $f : X \to Y'$. Дополним в $\mathcal{T}$ морфизм $f : X \to Y'$ до выделенного треугольника $X \xrightarrow{f} Y' \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X$ и рассмотрим в $\mathcal{T}[S^{-1}]$ коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "s^{-1}\circ f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"'] & Y \arrow[r, "gs"] \arrow[d, "s"'] & Z \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\mathrm{id}_Z"'] & X[1] \arrow[d, "\mathrm{id}_{X[1]}"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y' \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r, "h"] & X[1]
\end{tikzcd}$$

Она является изоморфизмом треугольников, поэтому верхняя строка выделена в $\mathcal{T}[S^{-1}]$.

Теперь проверим (TR3). Можно считать, переходя к изоморфным треугольникам, можно считать, что у нас есть диаграмма

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] & X[1] \arrow[d, "f[1]"] \\
X'' & Y'' & & X''[1] \\
X' \arrow[r, "u'"] \arrow[u, "s"'] & Y' \arrow[r, "v'"] \arrow[u, "t"'] & Z' \arrow[r, "w'"] & X'[1] \arrow[u, "s[1]"']
\end{tikzcd}$$

в которой $s, t \in S$ и $u' \circ s^{-1} \circ f = t^{-1} \circ g \circ u$. Рассмотрим морфизм $t \circ u' \circ s^{-1} : X'' \to Y''$ в $\mathcal{T}[S^{-1}]$. Благодаря условиям Оре его можно переписать виде $r^{-1} \circ u''$, где $u'' : X'' \to Y'''$, $r : Y'' \to Y'''$, $r \in S$. Заметим, что $t^{-1} \circ g \circ u = (rt)^{-1} \circ (rg) \circ u$, при этом $u'' \circ s = (rt) \circ u'$ по построению, откуда в свою очередь следует, что $(rg) \circ u = (rt) \circ t^{-1} \circ g \circ u = (rt) \circ u' \circ s^{-1} \circ f = u'' \circ s \circ s^{-1} \circ f = u'' \circ f$. Поэтому, заменяя Y'' на Y''', g на rg, а t на rt, можно считать, что существует морфизм $u'' : X'' \to Y''$, такой что оба квадрата коммутативны. Достраивая этот морфизм до точного треугольника, получаем диаграмму

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] & X[1] \arrow[d, "f[1]"] \\
X'' \arrow[r, "u''"] & Y'' \arrow[r, "v''"] & Z'' \arrow[r, "w''"] & X''[1] \\
X' \arrow[r, "u'"] \arrow[u, "s"'] & Y' \arrow[r, "v'"] \arrow[u, "t"'] & Z \arrow[r, "w'"] & X'[1] \arrow[u, "s[1]"']
\end{tikzcd}$$

Применяя (TR3) в $\mathcal{T}$ строим морфизмы $h : Z \to Z''$ и $q : Z' \to Z''$, так чтобы получались морфизмы треугольников. В силу свойства (5) можно считать, что $q \in S$. Значит морфизмы $s^{-1} \circ f$, $t^{-1} \circ g$ и $q^{-1} \circ h$ задают морфизм из верхнего треугольника в нижний в категории $\mathcal{T}[S^{-1}]$, что и требовалось.

Остается проверить (TR4). Пусть даны два выделенных в $\mathcal{T}[S^{-1}]$ треугольника с общей вершиной. По определению, каждый из них изоморфен треугольнику, выделенному в $\mathcal{T}$. Пользуясь условиями Оре и теми же рассуждениями, что м в доказательстве (TR1.3), легко показать, что эти треугольники можно заменить на изоморфные им в $\mathcal{T}$ выделенные треугольники с общей вершиной. Теперь применяя (TR4) в $\mathcal{T}$ строим диаграмму октаэдра, которая очевидно дает искомую диаграмму октаэдра $\mathcal{T}[S^{-1}]$. □

Следствие 30.2. *Производная категория триангулирована.*

Доказательство. Достаточно проверить, что класс квазиизоморфизмов в $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$ удовлетворяет условиям (4) и (5). Условие (4) очевидно, так как $H^i(s[1]) = H^{i+1}(s)$. Для условия (5) очевидно достаточно проверить, что если один из морфизмов f или g тождественный, а второй — казиизоморфизм, то можно выбрать h квазиизоморфизмом. Пусть $f = \mathrm{id}_X$. Достроим треугольник $X \to Y \to Z \to X[1]$ и морфизм $g : Y \to Y'$ до диаграмм октаэдра. Заметим, что в ней вторая строка изоморфна второму из наших треугольников, поэтому достаточно проверить, что $p : Z \to Z'$ квазиизоморфизм. Но так как g квазиизоморфизм, W ацикличен, поэтому p — квазиизоморфизм.

Пусть теперь $g = \mathrm{id}_Y$. Достроим морфизм $f : X \to X'$ до выделенного треугольника $X \to X' \to X'' \to X[1]$, после чего этот треугольник и треугольник $X' \to Y' \to Z' \to X'[1]$ достроим до диаграммы октаэдра. Заметим, что вторая строка в ней изоморфна первому из исходных треугольников, поэтому надо проверить что морфизм $Z \to Z'$ в возникающем треугольнике $X'' \to Z \to Z' \to X''[1]$ является квазиизоморфизмом. Но это очевидно, так как X'' ацикличен поскольку $f : X \to X'$ квазиизоморфизм. $\square$

Легко видеть, что ограниченные варианты производной категории, так же как и ограниченные варианты гомотопической категории триангулированы.

Триангулированные подкатегории и факторкатегории

Часть 31. Точные функторы

Пусть $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}'$ — триангулированные категории. Аддитивный функтор $F : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ называется **точным**, если

- существует изоморфизм функторов $\theta : F \circ [1] \to [1] \circ F$;
- F переводит выделенные треугольники в выделенные, то есть для всякого выделенного треугольника $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ в $\mathcal{T}$ треугольник $F(X) \xrightarrow{F(u)} F(Y) \xrightarrow{F(v)} F(Z) \xrightarrow{\theta_X \circ F(w)} F(X)[1]$ выделен в $\mathcal{T}'$.

Более правильно было бы называть точным функтором пару (F, θ).

Легко видеть, что тождественный функтор, функтор сдвига (и все его степени) являются точными. Другой пример точного функтора такой.

Лемма 31.1. *Если $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — аддитивный функтор между абелевыми категориями, то он индуцирует точный функтор $F : \mathrm{Hot}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Hot}(\mathcal{B})$.*

Доказательство. Почленно применяя функтор F к комплексам, получаем функтор $\mathrm{Com}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Com}(\mathcal{B})$. Ясно, что он переводит гомотопные морфизмы в гомотопные, поэтому индуцирует функтор между гомотопическими категориями, который коммутирует с функтором сдвига. Кроме того, ясно, что он переводит конус морфизма в конус морфизма, и значит точен. □

Обозначим категорию точных функторов между триангулированными категориями $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}'$ через $\mathsf{Fun}_{\mathsf{ex}}(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$.

Лемма 31.2. *Пусть $F : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ — точный функтор. Если функтор $G : \mathcal{T}' \to \mathcal{T}$ сопряжен к F, то он также точен.*

Доказательство. Пусть например G сопряжен к F справа. Вначале проверим первое свойство. Пусть $X \in \mathcal{T}$, $Y \in \mathcal{T}'$. Тогда имеем цепочку функториальных изоморфизмов

$$\mathrm{Hom}(X, G(Y[1])) \cong \mathrm{Hom}(F(X), Y[1]) \cong \mathrm{Hom}(F(X)[-1], Y) \cong$$
$$\cong \mathrm{Hom}(F(X[-1]), Y) \cong \mathrm{Hom}(X[-1], G(Y)) \cong \mathrm{Hom}(X, G(Y)[1])$$

(первый и четвертый изоморфизмы — сопряженность функторов, второй и пятый очевидны, а третий — коммутирование F со сдвигом). По лемме Ионеды получаем изоморфизм $G(Y[1]) \cong G(Y)[1]$, очевидно функториальный. Остается проверить второе свойство. Пусть $X \to Y \to Z \to X[1]$ — выделенный треугольник в $\mathcal{T}'$. Рассмотрим треугольник $G(X) \to G(Y) \to G(Z) \to G(X)[1]$, полученный применением функтора G с использованием изоморфизма $G(X[1]) \cong G(X)[1]$, построенного выше. Дополним также морфизм $G(X) \to G(Y)$ до выделенного треугольника $G(X) \to G(Y) \to W \to G(X)[1]$. Остается проверить, что эти треугольники изоморфны, то есть построить изоморфизм $W \to G(Z)$, такой что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
G(X) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & G(Y) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & W \arrow[r] \arrow[d, dashed] & G(X)[1] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \\
G(X) \arrow[r] & G(Y) \arrow[r] & G(Z) \arrow[r] & G(X)[1]
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Для этого рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
F(G(X)) \arrow[r] \arrow[d, "\eta"'] & F(G(Y)) \arrow[r] \arrow[d, "\eta"'] & F(W) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & F(G(X))[1] \arrow[d, "\eta"'] \\
X \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & X[1]
\end{tikzcd}$$

где $\eta : F \circ G \to \mathrm{id}$ — морфизм сопряжения. По аксиоме (TR3) существует морфизм $F(W) \to Z$, делающий диаграмму коммутативной. Рассмотрим соответствующий ему морфизм $W \to G(Z)$. Легко видеть, что он также делает диаграмму коммутативной. Остается проверить, что он изоморфизм. Для этого возьмем произвольный объект $U \in \mathcal{T}$ и рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(U, G(X)) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \mathrm{Hom}(U, G(Y)) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \mathrm{Hom}(U, W) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(U, G(X)[1]) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \mathrm{Hom}(U, G(Y)[1]) \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \\
\mathrm{Hom}(U, G(X)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(U, G(Y)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(U, G(Z)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(U, G(X)[1]) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(U, G(Y)[1])
\end{tikzcd}$$

Ее верхняя строка точна так как треугольник $G(X) \to G(Y) \to W \to G(X)[1]$ выделен, а нижняя точна так как она по сопряженности изоморфна строке

$$\mathrm{Hom}(F(U), X) \to \mathrm{Hom}(F(U), Y) \to \mathrm{Hom}(F(U), Z) \to \mathrm{Hom}(F(U), X[1]) \to \mathrm{Hom}(F(U), Y[1]),$$

получающейся из выделенного треугольника $X \to Y \to Z \to X[1]$. По лемме о пяти гомоморфизмах заключаем, что $\mathrm{Hom}(U, W) \to \mathrm{Hom}(U, G(Z))$ — изоморфизм, значит $W \to G(Z)$ — изоморфизм. □

Часть 32. Триангулированные подкатегории

Пусть $\mathcal{T}$ — триангулированные категория. Подкатегория $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ называется **триангулированной подкатегорией**, если на $\mathcal{S}$ существует структура триангулированной категории, такая что функтор вложения точен.

Лемма 32.1. *Пусть $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ — строго полная подкатегория (то есть со всяким объектом содержит все изоморфные ему в $\mathcal{T}$ объекты). Тогда $\mathcal{S}$ триангулированная подкатегория $\iff$ $\mathcal{S}$ замкнута относительно функтора сдвига и взятия конуса морфизмов.*

Доказательство. Пусть на $\mathcal{S}$ задана структура триангулированной категории, такая что функтор вложения точен. Тогда для всякого $X \in \mathcal{S}$ имеем $X[1]_{\mathcal{S}} \cong X[1]_{\mathcal{T}}$. Левая часть лежит в $\mathcal{S}$, значит и правая тоже лежит, так что $\mathcal{S}$ замкнута относительно сдвигов. Пусть также $X \to Y$ — морфизм в $\mathcal{S}$. Дополним его в $\mathcal{S}$ до выделенного треугольника $X \to Y \to Z \to X[1]$. Тогда этот же треугольник будет выделен в $\mathcal{T}$, так что конус данного морфизма изоморфен объекту Z, лежащему в $\mathcal{S}$. Значит $\mathcal{S}$ замкнута относительно взятия конусов морфизмов.

Обратно, пусть $\mathcal{S}$ замкнута относительно функтора сдвига и взятия конуса морфизмов. Определим сдвиг в $\mathcal{S}$ как ограничение на $\mathcal{S}$ сдвига в $\mathcal{T}$, а треугольник будем считать выделенным, если он выделен в $\mathcal{T}$. Легко видеть, что все аксиомы выполнены (для (TR1.3) и (TR4) нужна инвариантность $\mathcal{S}$ относительно взятия конусов, остальное следует из полноты). □

Данная лемма позволяет построить много новых примеров триангулированных категорий.

Упражнение 32.2. Покажите, что подкатегории $\mathrm{Hot}^*(\mathcal{A})$, где $* \in \{+, -, b\}$ — триангулированные подкатегории в $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$.

Пусть $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ — класс объектов, замкнутый относительно прямых сумм и изоморфизмов, а $\mathrm{Hot}^*(\mathcal{E})$ — полная подкатегория в $\mathrm{Hot}^*(\mathcal{A})$, объекты которой — комплексы, все члены которых лежат в $\mathcal{E}$.

Следствие 32.3. *Категория $\mathrm{Hot}^*(\mathcal{E})$ — строго полная триангулированная подкатегория в $\mathrm{Hot}^*(\mathcal{A})$.*

Доказательство. Замкнутость относительно сдвигов очевидна, а замкнутость относительно конусов следует из явной конструкции конуса в $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$. □

Другой способ такой. Пусть $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ — замкнутая относительно расширений абелева подкатегория (то есть если в точной последовательности $0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$ объекты A_1 и A_3 лежат в $\mathcal{B}$, то A_2 тоже лежит в $\mathcal{B}$). Пусть $\mathrm{Hot}^*_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ — полная подкатегория в $\mathrm{Hot}^*(\mathcal{A})$, объекты которой — комплексы, все *когомологии* которых лежат в $\mathcal{B}$.

Следствие 32.4. *Категория $\mathrm{Hot}^*_{\mathcal{B}}(\mathcal{E})$ — строго полная триангулированная подкатегория в $\mathrm{Hot}^*(\mathcal{E})$.*

Доказательство. Замкнутость относительно сдвигов очевидна, а замкнутость относительно конусов следует из явной длинной точной последовательности когомологий выделенного треугольника в $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$. $\square$

Упражнение 32.5. Покажите, что когомологически ограниченные подкатегории $\mathrm{Hot}_{\mathcal{B}}(\mathcal{E})^* \subset \mathrm{Hot}_{\mathcal{B}}(\mathcal{E})$ — строго полные триангулированные подкатегории в $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$.

Позже мы увидим, что категории $\mathrm{Hot}_{\mathcal{B}}(\mathcal{E})^*$ и $\mathrm{Hot}^*_{\mathcal{B}}(\mathcal{E})$ часто эквивалентны.

Пусть $\mathcal{T}$ — триангулированная категория, а $\mathcal{E} \subset \mathcal{T}$ — какое-то множество ее объектов. Обозначим через $\langle\mathcal{E}\rangle$ минимальную строго полную триангулированную подкатегорию в $\mathcal{T}$, содержащую $\mathcal{E}$.

Упражнение 32.6. Покажите, что $\langle\mathcal{E}\rangle$ получается последовательным прибавлением конечных прямых сумм и конусов морфизмов.

Упражнение 32.7. Покажите, что $\mathcal{D}^b(\mathcal{A}) = \langle\mathcal{A}\rangle$.

Упражнение 32.8. Покажите, что
(a) $\mathcal{D}^b(\mathbb{Z}-\mathsf{mod}) = \langle\mathbb{Z}\rangle$;
(b) если кольцо R имеет конечную гомологическую размерность, то $\mathcal{D}^b(R-\mathsf{mod}) = \langle\mathrm{Proj}(R)\rangle$;
(c) если X — гладкое многообразие, то $\mathcal{D}^b(\mathsf{Coh}X) = \langle\mathsf{VB}(X)\rangle$.

В общем случае, категория $\langle\mathrm{Proj}(\mathcal{A})\rangle \subset \mathcal{D}^b(\mathcal{A})$ (или $\langle\mathsf{VB}(X)\rangle \subset \mathcal{D}^b(\mathsf{Coh}X)$ в геометрическом случае) называется категорией совершенных комплексов. Будем обозначать ее $\mathcal{D}^{\mathsf{perf}}(\mathcal{A})$ и $\mathcal{D}^{\mathsf{perf}}(X)$ соответственно.

Часть 33. Триангулированные подкатегории и локализация

Пусть S — класс морфизмов в триангулированной категории $\mathcal{T}$, удовлетворяющий условиям Оре и согласованный с триангулированной структурой.

Упражнение 33.1. Проверьте, что (a) функтор локализации $Q : \mathcal{T} \to \mathcal{T}[S^{-1}]$ точен; (b) если $F : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ точный функтор, такой что $F(S) \subset \mathrm{Iso}$, то функтор $F' : \mathcal{T}[S^{-1}] \to \mathcal{T}'$, такой что $F = F' \circ Q$ тоже точен.

Пусть теперь $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ — строго полная триангулированная подкатегория. Положим $S' = \mathcal{T}' \cap S$.

Лемма 33.2. *Пусть либо S удовлетворяет левым условиям Оре и выполнено свойство*

(6) *если $X \in \mathcal{T}'$, то для всякого $s \in S$, $s : X \to Y$, найдется $s' \in S$, такой что $s's \in S'$,*

либо S удовлетворяет правым условиям Оре и выполнено свойство

(6′) *если $X \in \mathcal{T}'$, то для всякого $s \in S$, $s : Y \to X$, найдется $s' \in S$, такой что $ss' \in S'$,*

Тогда класс S' удовлетворяет (левым или правым) условиям Оре и согласован с триангулированной структурой в $\mathcal{T}'$, а категория $\mathcal{T}'[S'^{-1}] \subset \mathcal{T}[S^{-1}]$ — строго полная триангулированная подкатегория.

Доказательство. Будем считать, что выполнены левые условия Оре и условие (6). Насыщенность класса S' очевидна. Пусть $X \xleftarrow{t} W \xrightarrow{g} Y$ — правая S'-дробь в $\mathcal{T}'$. Пусть $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{s} Y$ соответствующая ей левая S-дробь в $\mathcal{T}$. Найдем морфизм $s' : Z \to Z'$ в S, такой что $Z' \in \mathcal{T}'$. Тогда $X \xrightarrow{s'f} Z' \xleftarrow{s's} Y$ — левая S'-дробь в $\mathcal{T}'$, такая что $s'sg = s'ft$. Третье условие Оре проверяется аналогично. Согласованность с триангулированной структурой очевидна.

Рассмотрим теперь функтор $\mathcal{T}'[S'^{-1}] \to \mathcal{T}[S^{-1}]$, индуцированный функтором $\mathcal{T}' \to \mathcal{T} \to \mathcal{T}[S^{-1}]$ (который очевидно переводит морфизмы из S' в изоморфизмы). Ясно, что он тождественен на объектах, а на морфизмах устроен так: левая S'-дробь $s^{-1} \circ f$ переходит в ту же левую дробь, рассматриваемую как S-дробь. Остается проверить, что левые S'-дроби эквивалентны тогда и только тогда, когда они эквивалентны как S-дроби, и что всякая S-дробь (с началом и концом в $\mathcal{T}'$) эквивалентна некоторой S'-дроби.

В самом деле, пусть, например $s_1^{-1} \circ f_1 \sim_S s_2^{-1} \circ f_2$, где $s_i \in S'$. Тогда найдется $t \in S$, так что $ts_1 = ts_2$, $tf_1 = tf_2$. Но тогда по свойству (6) найдется $t' \in S$, так что $t't \in S'$, причем $t'ts_1 = t'ts_2$, $t'tf_1 = t'tf_2$, так что $s_1^{-1} \circ f_1 \sim_{S'} s_2^{-1} \circ f_2$. Аналогично, пусть $s^{-1} \circ f$ — левая S-дробь с концом в $\mathcal{T}'$. Найдем $s' \in S$, так что $s's \in S'$. Тогда $s^{-1} \circ f \sim_S (s's)^{-1} \circ (s'f)$, а это левая S'-дробь. $\square$

Это несложное утверждение имеет массу применений. Пусть $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ — абелева подкатегория, а $\mathcal{D}^*_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) = \mathrm{Hot}^*_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})[\mathrm{Qis}^{-1}]$.

Лемма 33.3. *Категория $D^*_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ — строго полная триангулированная подкатегория в $\mathcal{D}^*(\mathcal{A})$.*

Доказательство. Заметим, что $\mathrm{Hot}^*_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ — строго полная триангулированная подкатегория в $\mathrm{Hot}^*(\mathcal{A})$ (в силу 32.4). При этом условие (6) очевидно выполнено, если у комплекса X когомологии лежат в $\mathcal{B}$, а Y ему квазиизоморфен, то у Y тоже когомологии лежат в $\mathcal{B}$. $\square$

Вложение $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ индуцирует вложение $\mathrm{Hot}^*(\mathcal{B}) \to \mathrm{Hot}^*(\mathcal{A})$, которое очевидно пропускается через $\mathrm{Hot}^*_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$.

Лемма 33.4. *Пусть $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ замкнута относительно расширений. Предположим, что для всякого эпиморфизма $f : A \to B$, где $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ найдется $B' \subset A$, такой что $B' \in \mathcal{B}$ и $f_{|B'} : B' \to B$ — эпимофризм. Тогда $\mathcal{D}^-_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) \cong \mathcal{D}^-(\mathcal{B})$ и $\mathcal{D}^b_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) \cong \mathcal{D}^b(\mathcal{B})$.*

Доказательство. Заметим, что $\mathrm{Hot}^*(\mathcal{B})$ — строго полная триангулированная подкатегория в $\mathrm{Hot}^*(\mathcal{A})$ (в силу 32.4). Проверим при $* = -, b$ условие (6). Для этого проверим, что всякий ограниченный сверху комплекс $A^\bullet$ с когомологиями в $\mathcal{B}$, содержит квазиизоморфный ему подкомплекс $B \in \mathrm{Com}(\mathcal{B})$. Будем строить B почленно, начиная сверху. Пусть $A^k = 0$ при всех $k > n$. Положим тогда и $B^k = 0$ при всех $k > n$. Пусть теперь B^k построены при $k \geqslant m$ так, что $H^k(B) = H^k(A)$ при $k \geqslant m+1$, а отображение $H^m(B) \to H^m(A)$ сюръективно. Построим B^{m-1}. Пусть $I^m = \mathrm{Im}(A^{m-1} \to A^m) \subset A^m$, $K^{m-1} = \mathrm{Ker}(A^{m-1} \to A^m)$. Найдем $B^{m-1}_0 \subset A^{m-1}$, такой что морфизм $B^{m-1}_0 \to A^{m-1} \to I^m$ — сюръекция на $I^m \cap B^m = \mathrm{Ker}(B^m \to A^m/I^m) \subset I^m$ (для этого воспользуемся условием по отношению к эпиморфизму $\mathrm{Ker}(A^{m-1} \oplus (I^m \cap B^m) \to I^m) \to I^m \cap B^m$). Кроме того, найдем в K^{m-1} подобъект $B^{m-1}_1 \subset K^{m-1}$, такой что морфизм $B^{m-1}_1 \to H^{m-1}(A)$ — сюръекция. Наконец, положим $B^{m-1} = B^{m-1}_0 + B^{m-1}_1 = \mathrm{Im}(B^{m-1}_0 \oplus B^{m-1}_1 \to A^{m-1})$. По построению $H^m(B) = H^m(A)$, а морфизм $H^{m-1}(B) \to H^{m-1}(A)$ сюръективен. Продолжая эту процедуру построим комплекс B.

Остается заметить, что мы не только проверили свойство (6), которое влечет строгую полноту функтора вложения $D^*(\mathcal{B}) \to \mathcal{D}^*(\mathcal{A})$, но и проверили, что этот функтор существенно сюръективен на подкатегорию $D^*_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$. Значит $D^*(\mathcal{B}) \cong \mathcal{D}^*_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$. $\square$

Упражнение 33.5. Покажите, что условия леммы выполнены для вложений категорий $R{-}\mathsf{mod} \subset R{-}\mathsf{Mod}$ и $\mathsf{Coh}(X) \subset \mathsf{QCoh}(X)$. В частности $\mathcal{D}^-(R{-}\mathsf{mod}) \cong \mathcal{D}^-_{R-\mathsf{mod}}(R{-}\mathsf{Mod})$ и $\mathcal{D}^-(\mathsf{Coh}(X)) \cong \mathcal{D}^-_{\mathsf{Coh}(X)}(\mathsf{QCoh}(X))$.

Часть 34. Триангулированные факторкатегории

Пусть $\mathcal{T}$ триангулированная категория, а $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$ — строго полная триангулированная подкатегория. Триангулированной факторкатегорией $\mathcal{T}/\mathcal{N}$ называется триангулированная категория вместе с точным функтором $Q : \mathcal{T} \to \mathcal{T}/\mathcal{N}$, так что $Q(\mathcal{N}) = 0$ и для любой триангулированной категории $\mathcal{T}'$ и точного функтора $F : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$, такого что $F(\mathcal{N}) = 0$ существует единственный (с точностью до изоморфизма) функтор $F' : \mathcal{T}/\mathcal{N} \to \mathcal{T}'$, такой что $F \cong F' \circ Q$.

Оказывается, триангулированные факторкатегория всегда существует и является локализацией исходной категории. В самом деле, пусть $S(\mathcal{N})$ — класс всех морфизмов $s : X \to Y$, таких что третья вершина выделенного треугольника $X \to Y \to Z \to X[1]$ лежит в $\mathcal{N}$.

Лемма 34.1. *Класс $S(\mathcal{N})$ удовлетворяет условиям Оре и согласован с триангулированной структурой, а категория $\mathcal{T}[S(\mathcal{N})^{-1}]$ с функтором локализации $Q : \mathcal{T} \to \mathcal{T}[S(\mathcal{N})^{-1}]$ является факторкатегорией $\mathcal{T}/\mathcal{N}$.*

Доказательство. Проверим условия Оре. Начнем с условия (1). Пусть $f = gh$. Дополним морфизмы g и h до точных треугольников и применим аксиому октаэдра

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "h"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r] \arrow[d] & X[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "f"] & Y' \arrow[r] \arrow[d] & Z' \arrow[r] \arrow[d] & X[1] \arrow[d, "h[1]"'] \\
 & W \arrow[r, equal] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d] & Y[1] \\
 & Y[1] \arrow[r] & Z[1] &
\end{tikzcd}$$

Если два из трех морфизмов f, g и h лежат в $S(\mathcal{N})$, то две из трех вершин выделенного треугольника $Z \to Z' \to W \to Z[1]$ лежат в $\mathcal{N}$. Но тогда и третья вершина лежит там же, так как $\mathcal{N}$ триангулирована, а значит и третий морфизм лежит в $S(\mathcal{N})$.

Теперь проверим (2). Далее, пусть $X \xleftarrow{t} W \xrightarrow{g} Y$ — правая $S(\mathcal{N})$-дробь. Дополним морфизм $W \xrightarrow{\binom{t}{g}} X \oplus Y$ до выделенного треугольника $W \xrightarrow{\binom{t}{g}} X \oplus Y \xrightarrow{(-f,s)} Z \to W[1]$. Так как композиция морфизмов нулевая — имеем $sg = ft$, поэтому достаточно проверить, что $s \in S(\mathcal{N})$. Для этого применим аксиому октаэдра к треугольникам $Y \to X \oplus Y \to X \to Y[1]$ и $X \oplus Y \to Z \to W[1]$:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & X \oplus Y \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & Y[1] \arrow[d, equal] \\
Y \arrow[r, "s"] & Z \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & Y[1] \arrow[d] \\
 & W[1] \arrow[r, equal] \arrow[d] & W[1] \arrow[r] \arrow[d, "t[1]"] & X[1] \oplus Y[1] \\
 & X[1] \oplus Y[1] \arrow[r] & X[1] &
\end{tikzcd}$$

Так как $t \in S(\mathcal{N})$, объект N лежит в $\mathcal{N}$, откуда получаем, что $s \in S(\mathcal{N})$.

Проверим теперь (3). Пусть $fs = 0$, $s \in S(\mathcal{N})$, $s : X \to Y$, $f : Y \to Z$. Дополним s до выделенного треугольника $X \to Y \to N \to X[1]$. Тогда $N \in \mathcal{N}$. Из $fs = 0$ следует существование $g : N \to Z$, такого что композиция $Y \to N \to Z$ равна f. Дополним g до выделенного треугольника $N \to Z \to W \to N[1]$. Тогда морфизм $t : Z \to W$ лежит в $S(\mathcal{N})$, а по построению $tf = 0$.

Теперь проверим согласованность с триангулированной структурой. Условие (4) очевидно. Пусть $f, g \in S(N)$. Дополним морфизм $u'f = gu : X \to Y'$ до выделенного треугольника $X \to Y' \to W$. Применяя аксиому октаэдра в категории $\mathcal{T}$ получим диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h_1"] & X[1] \arrow[d] \\
X \arrow[r, "gu"] & Y' \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d] & X[1] \\
& N_1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & N_1 \arrow[d] & \\
& Y[1] \arrow[r] & Z[1] &
\end{tikzcd}
\quad \text{и} \quad
\begin{tikzcd}
Y' \arrow[r] \arrow[d, equal] & W \arrow[r] \arrow[d, "h_2"] & X[1] \arrow[r, "(u'f)[1]"] \arrow[d, "f[1]"] & Y'[1] \arrow[d, equal] \\
Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] \arrow[d] & X'[1] \arrow[r, "u'[1]"] \arrow[d] & Y'[1] \\
& N_2 \arrow[r, equal] \arrow[d] & N_2 \arrow[d] & \\
& W[1] \arrow[r] & X[2] &
\end{tikzcd}
$$

Если морфизмы $g : Y \to Y'$ и $f : X \to X'$ лежат в $S(\mathcal{N})$, то $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$, значит $h_1, h_2 \in S(\mathcal{N})$, поэтому $h_2 h_1 : Z \to Z'$ — искомый морфизм.

Остается проверить, что триангулированная категория $\mathcal{T}[S(\mathcal{N})^{-1}]$ с функтором $Q : \mathcal{T} \to \mathcal{T}[S(\mathcal{N})^{-1}]$ удовлетворяет универсальному свойству факторкатегории. Во-первых, заметим, что $Q(\mathcal{N}) = 0$. В самом деле, если $N \in \mathcal{N}$, то морфизм $0 \to N$ лежит в $S(\mathcal{N})$ (так как его конус равен N), значит $0 = Q(0) \cong Q(N)$. Во-вторых, пусть $F : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ точный функтор, такой что $F(\mathcal{N}) = 0$. Возьмем произвольный морфизм $s : X \to Y$, такой что $s \in S(\mathcal{N})$ и дополним его до выделенного треугольника $X \to Y \to N \to X[1]$ (заметим, что $N \in \mathcal{N}$ по определению класса $S(\mathcal{N})$). Применяя функтор F получим выделенный (в силу точности функтора F) треугольник $F(X) \to F(Y) \to F(N) \to F(X)[1]$ в $\mathcal{T}'$. Так как $F(N) = 0$, морфизм $F(s)$ — изоморфизм. Значит $F(S(\mathcal{N})) \subset \mathrm{Iso}$, следовательно функтор F раскладывается в композицию $F \cong F' \circ Q$, причем единственным способом. $\square$

Упражнение 34.2. Пусть $X \to Y \to Z \to X[1]$ — выделенный треугольник. Покажите, что
(a) если морфизм $Z \to X[1]$ — нулевой, то треугольник изоморфен треугольнику $X \xrightarrow{i_X} X \oplus Z \xrightarrow{p_Z} Z \xrightarrow{0} X[1]$;
(b) если $Z = 0$, то морфизм $X \to Y$ — изоморфизм.

Упражнение 34.3. Покажите, что $\mathcal{D}^*(\mathcal{A}) = \mathrm{Hot}^*(\mathcal{A}) / \mathrm{Acycl}^*(\mathcal{A})$.

Упражнение 34.4. Покажите, что $\mathrm{Ker}\, Q : \mathcal{T} \to \mathcal{T}/\mathcal{N}$ получается добавлением к $\mathcal{N}$ прямых слагаемых.

Полезно переписать на языке факторкатегорий лемму 33.2.

Упражнение 34.5. Пусть $F : \mathcal{T}' \to \mathcal{T}$ — точный функтор, а $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$ — строго полная подкатегория. Положим $\mathcal{N}' = F^{-1}(\mathcal{N})$. Докажите, что существует точный функтор $F' : \mathcal{T}'/\mathcal{N}' \to \mathcal{T}/\mathcal{N}$, такой что $F' \circ Q' \cong Q \circ F$. Проверьте, что если F строго полон и выполнено одно из свойств

($6''$) если $X \in \mathcal{T}'$, $N \in \mathcal{N}$ то всякий морфизм $N \to F(X)$ может быть представлен в виде композиции $N \to F(N') \to F(X)$, где $N' \in \mathcal{N}'$ или
($6'''$) если $X \in \mathcal{T}'$, $N \in \mathcal{N}$ то всякий морфизм $F(X) \to X$ может быть представлен в виде композиции $F(X) \to F(N') \to N$, где $N' \in \mathcal{N}'$,

то функтор F' строго полон.

Приведем несколько примеров.

Лемма 34.6. *Композиция функтора вложения* $\mathrm{Hot}^*(\mathrm{Proj}\,\mathcal{A}) \to \mathrm{Hot}^*(\mathcal{A})$ *и проекции* $Q : \mathrm{Hot}^*(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^*(\mathcal{A})$ *— строго полное вложение для* $* = -, b$*. Если к тому же проективных объектов в* $\mathcal{A}$ *достаточно много, то* $\mathrm{Hot}^-(\mathrm{Proj}\,\mathcal{A}) \cong \mathcal{D}^-(\mathcal{A})$, $\mathrm{Hot}^-(\mathrm{Proj}\,\mathcal{A})^b \cong \mathcal{D}^b(\mathcal{A})$.

Аналогично, функтор $\mathrm{Hot}^*(\mathrm{Inj}\,\mathcal{A}) \to \mathrm{Hot}^*(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^*(\mathcal{A})$ *— строго полное вложение для* $* = +, b$*, а если инъективных объектов в* $\mathcal{A}$ *достаточно много, то* $\mathrm{Hot}^+(\mathrm{Inj}\,\mathcal{A}) \cong \mathcal{D}^+(\mathcal{A})$, $\mathrm{Hot}^+(\mathrm{Inj}\,\mathcal{A})^b \cong \mathcal{D}^b(\mathcal{A})$.

Доказательство. Заметим, что $\mathrm{Acycl}^-(\mathcal{A}) \cap \mathrm{Hot}^-(\mathrm{Proj}\,\mathcal{A}) = 0$. В самом деле, если $P^\bullet$ — ограниченный сверху ацикличный комплекс, состоящий из проективных объектов, то он гомотопен нулю (и $P^\bullet$ и 0 являются проективными резольвентами нуля, а проективная резольвента единственна с точностью до изоморфизма, единственного с точностью до гомотопии). Поэтому для строго полноты достаточно заметить, что условие ($6'''$) выполняется. В самом деле, всякий морфизм из ограниченного сверху комплекса, состоящего из проективных объектов в ацикличный комплекс гомотопен нулю. Наконец, если проективных объектов достаточно много, то всякий ограниченный сверху комплекс имеет проективную резольвенту, значит функтор $\mathrm{Hot}^*(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^*(\mathcal{A})$ существенно сюръективен. $\square$

Интересно рассмотреть категорию $\mathcal{D}^{\mathsf{sing}}(\mathcal{A}) := \mathcal{D}^b(\mathcal{A})/D^{\mathsf{perf}}(\mathcal{A})$, которая называется производной категорией особенностей.

Упражнение 34.7. Пусть $\mathcal{A} = \mathsf{k}[x]/x^2-\mathsf{mod}$. Докажите, что $\mathcal{D}^{\mathsf{sing}}(\mathcal{A}) \cong \mathsf{k}-\mathsf{mod}$.

Производные функторы — построение

Часть 35. Определение

Пусть $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — аддитивный функтор между абелевыми категориями. Обозначим индуцированный точный функтор между гомотопическими категориями также через $F : \mathrm{Hot}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Hot}(\mathcal{B})$.

Лемма 35.1. *Функтор F сохраняет квазиизоморфизмы $\Longleftrightarrow$ F точен (то есть сохраняет точные тройки).*

Доказательство. Пусть $0 \to X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \to 0$ — точная тройка. Значит морфизм v индуцирует квазиизоморфизм комплекса $\{ X \to Y \}$ и Z. Следовательно $F(v)$ должен индуцировать квазиизоморфизм комплексов $\{ F(X) \to F(Y) \}$ и $F(Z)$, то есть последовательность $0 \to F(X) \to F(Y) \to F(Z) \to 0$ должна быть точна. $\square$

Если функтор $F : \mathrm{Hot}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Hot}(\mathcal{B})$ сохраняет квазиизоморфизмы, то в силу универсального свойства функтора локализации существует функтор $\mathcal{D}(F) : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{B})$, такой что

$$(*) \qquad \mathcal{D}(F) \circ Q_{\mathcal{A}} \cong Q_{\mathcal{B}} \circ F.$$

В этом случае функтор $\mathcal{D}(F)$ называется **производным** от функтора F.

Однако, если функтор $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ не является точным, построить функтор $\mathcal{D}(F)$, удовлетворяющий свойству $(*)$, нельзя. Единственное что можно — это добиться некоторого приближения к этому свойству.

Точный функтор $RF : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{B})$ называется **правым производным** от F, если задан морфизм функторов

$$(\dagger) \qquad \rho_F : Q_{\mathcal{B}} \circ F \to RF \circ Q_{\mathcal{A}},$$

удовлетворяющий универсальному свойству:

- для всякого точного функтора $G : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{B})$ и всякого морфизма функторов $\phi : Q_{\mathcal{B}} \circ F \to G \circ Q_{\mathcal{A}}$ существует единственный морфизм функторов $\phi' : RF \to G$, такой что диаграмма

$$\begin{tikzcd} Q_{\mathcal{B}} \circ F \arrow[r, "\rho_F"] \arrow[dr, "\phi"'] & RF \circ Q_{\mathcal{A}} \arrow[d, "\phi'"] \\ & G \circ Q_{\mathcal{A}} \end{tikzcd}$$

  коммутативна.

Аналогично, точный функтор $LF : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{B})$ называется **левым производным** от функтора F, если задан морфизм функторов

$$(\ddagger) \qquad \lambda_F : LF \circ Q_{\mathcal{A}} \to Q_{\mathcal{B}} \circ F,$$

удовлетворяющий универсальному свойству:

- для всякого точного функтора $G : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{B})$ и всякого морфизма функторов $\phi : G \circ Q_{\mathcal{A}} \to Q_{\mathcal{B}} \circ F$ существует единственный морфизм функторов $\phi' : G \to LF$, такой что диаграмма

$$\begin{tikzcd} G \circ Q_{\mathcal{A}} \arrow[d, "\phi'"'] \arrow[dr, "\phi"] & \\ LF \circ Q_{\mathcal{A}} \arrow[r, "\lambda_F"'] & Q_{\mathcal{B}} \circ F \end{tikzcd}$$

  коммутативна.

Легко видеть, что если $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ точен, то $\mathcal{D}(F)$ является и правым и левым производным функтором от F одновременно. Кроме того, ясно, что правый (или левый) производный функтор единственен (если существует).

Часть 36. Локализация функторов и полуортогональные разложения

Определение производного функтора является специальным случаем понятия локализации функтора.

Пусть $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}'$ — триангулированные категории, $F : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ — точный функтор, а $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$ — строго полная триангулированная подкатегория. Если $F(\mathcal{N}) = 0$, то функтор F пропускается через $\mathcal{T}/\mathcal{N}$. В общем же случае, такого не бывает.

Точный функтор $RF : \mathcal{T}/\mathcal{N} \to \mathcal{T}'$ вместе с морфизмом $\rho : F \to RF \circ Q$ называется **правой локализацией** F **относительно** $\mathcal{N}$, если всякий морфизм функторов $F \to G \circ Q$ (где $G : \mathcal{T}/\mathcal{N} \to \mathcal{T}'$ — точный функтор) пропускается единственным образом через морфизм $RF \to G$. Аналогично, точный функтор $LF : \mathcal{T}/\mathcal{N} \to \mathcal{T}'$ вместе с морфизмом $\lambda : LF \circ Q \to F$ называется **левой локализацией** F **относительно** $\mathcal{N}$, если всякий морфизм функторов $G \circ Q \to F$ (где $G : \mathcal{T}/\mathcal{N} \to \mathcal{T}'$ — точный функтор) пропускается единственным образом через морфизм $G \to LF$.

$$
\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "\rho_F"] \arrow[dr, "\phi"'] & RF \circ Q \arrow[d, "\phi'"] \\
& G \circ Q
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G \circ Q \arrow[d, "\phi'"'] \arrow[dr, "\phi"] & \\
LF \circ Q \arrow[r, "\lambda_F"'] & F
\end{tikzcd}
$$

Ясно, что при $\mathcal{T} = \mathrm{Hot}(\mathcal{A})$, $\mathcal{N} = \mathrm{Acycl}(\mathcal{A})$, $\mathcal{T}' = \mathcal{D}(\mathcal{B})$ правая (левая) локализация функтора $Q_{\mathcal{B}} \circ F$ является правым (левым) производным функтором. Поэтому вопрос существования производных функторов является частным случаем вопроса существования локализаций.

Аналогично случаю производных функторов, имеем

Лемма 36.1. *Если $F(\mathcal{N}) = 0$, то существует функтор $F' : \mathcal{T}/\mathcal{N} \to \mathcal{T}'$, являющийся и правой и левой локализацией F одновременно.*

Доказательство. Если $F(\mathcal{N}) = 0$, то существует $F' : \mathcal{T}/\mathcal{N} \to \mathcal{T}'$, такой что $F' \circ Q = F$. Обозначим через ρ и λ взаимно обратные морфизмы $F \to F' \circ Q$ и $F' \circ Q \to F$. Ясно, что они дают искомые локализации. □

Чуть сложнее проверить следующий критерий.

Предложение 36.2. *Предположим, что функтор вложения $\mathcal{N} \to \mathcal{T}$ имеет правый сопряженный функтор $\mathcal{T} \to \mathcal{N}$. Тогда всякий точный функтор $F : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ имеет правую локализацию.*

Для доказательства нам понадобится некоторая подготовка.

Лемма 36.3. *Пусть $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ и $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ — строго полные триангулированные подкатегории. Предположим*

- $\mathrm{Hom}(B, A) = 0$ *для всех $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$;*
- *для всякого объекта $X \in \mathcal{T}$ существует выделенный треугольник $B_X \to X \to A_X \to B_X[1]$, в котором $A_X \in \mathcal{A}$, а $B_X \in \mathcal{B}$.*

Тогда функторы вложения $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{T}$ и $\beta : \mathcal{B} \to \mathcal{T}$ имеют левый и правый сопряженный функторы $\alpha^* : \mathcal{T} \to \mathcal{A}$ и $\beta^! : \mathcal{T} \to \mathcal{B}$ соответственно, а треугольник функториален и изоморфен треугольнику

$$\beta\beta^! X \to X \to \alpha\alpha^* X \to \beta\beta^! X[1],$$

в котором первые два морфизма индуцированы сопряженностью функторов.

Доказательство. Пусть $X, Y \in \mathcal{T}$, а $B_X \to X \to A_X \to B_X[1]$ и $B_Y \to Y \to A_Y \to B_Y[1]$ — соответствующие треугольники. Пусть $f : X \to Y$ — произвольный морфизм. Ясно, что композиция $B_X \to X \to Y \to A_Y$ равна нулю (так как $\mathrm{Hom}(B_X, A_Y) = 0$), поэтому этот морфизм продолжается до морфизма треугольников

$$
\begin{tikzcd}
B_X \arrow[r] \arrow[d, dashed, "B_f"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & A_X \arrow[r] \arrow[d, dashed, "A_f"] & B_X[1] \\
B_Y \arrow[r] & Y \arrow[r] & A_Y \arrow[r] & B_Y[1]
\end{tikzcd}
$$

Так как $\mathrm{Hom}(B_X, A_Y[-1]) = 0$ такое продолжение единственно. Отсюда следует, что отображения $X \mapsto A_X$, $f \mapsto A_f$, а также $X \mapsto B_X$, $f \mapsto B_f$ являются функторами $\mathcal{T} \to \mathcal{A}$ и $\mathcal{T} \to \mathcal{B}$ соответственно.

Применим теперь к треугольнику $B_X \to X \to A_X \to B_X[1]$ функтор $\mathrm{Hom}(B, -)$ с $B \in \mathcal{B}$. Так как $\mathrm{Hom}(B, A_X) = 0$, получим изоморфизм $\mathrm{Hom}(\beta(B), X) \cong \mathrm{Hom}(B, B_X)$. Отсюда следует, что функтор $X \mapsto B_X$ сопряжен справа к β. Аналогично проверяется, что функтор $X \mapsto A_X$ сопряжен к α слева. □

Если выполнены условия леммы, то говорят, что подкатегории $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ образуют полуортогональное разложение категории $\mathcal{T}$ и пишут $\mathcal{T} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$.

Пусть теперь $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$ — произвольная полная триангулированная подкатегория. Обозначим через $\mathcal{N}^\perp \subset \mathcal{T}$ строго полную подкатегорию в $\mathcal{T}$, состоящую из всех $X \in \mathcal{T}$, таких что $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(N, X) = 0$ для всех $N \in \mathcal{N}$. Аналогично, обозначим через ${}^\perp\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$ строго полную подкатегорию в $\mathcal{T}$, состоящую из всех $X \in \mathcal{T}$, таких что $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, N) = 0$ для всех $N \in \mathcal{N}$. Эти подкатегории называются левым и правым ортогоналом к $\mathcal{N}$ соответственно.

Упражнение 36.4. Покажите, что $\mathcal{N}^\perp$ и ${}^\perp\mathcal{N}$ — триангулированные подкатегории.

Лемма 36.5. *Если функтор вложения $\mathcal{N} \to \mathcal{T}$ имеет правый сопряженный функтор, то $\mathcal{T} = \langle \mathcal{N}^\perp, \mathcal{N} \rangle$ — полуортогональное разложение. Аналогично, если функтор вложения $\mathcal{N} \to \mathcal{T}$ имеет левый сопряженный функтор, то $\mathcal{T} = \langle \mathcal{N}, {}^\perp\mathcal{N} \rangle$ — полуортогональное разложение.*

Доказательство. Надо проверить, что условия леммы 36.3 выполнены. Первое условие выполняется по определению ортогонала. Для второго условия, заметим, что $\mathrm{Hom}(N, \alpha\alpha^! X) = \mathrm{Hom}(N, \alpha^! X) \cong \mathrm{Hom}(\alpha N, X) = \mathrm{Hom}(N, X)$ для всех $N \in \mathcal{N}$, причем изоморфизм индуцирован естественным морфизмом $\alpha\alpha^! X \to X$. Дополним естественный морфизм $\alpha\alpha^! X \to X$ до выделенного треугольника

$$\alpha\alpha^! X \to X \to X' \to \alpha\alpha^! X[1].$$

Применяя к нему функтор $\mathrm{Hom}(N, -)$ с $N \in \mathcal{N}$, получаем $\mathrm{Hom}(N, X') = 0$, значит $X' \in \mathcal{N}^\perp$. Таким образом второе условие тоже выполнено. □

Подкатегория, функтор вложения которой имеет правый сопряженный называется допустимой справа, а подкатегория, функтор вложения которой имеет левый сопряженный называется допустимой слева. Если подкатегория допустима и слева и справа, она называется допустимой.

Доказательство предложения 36.2. По условию $\mathcal{N}$ допустима справа, поэтому $\mathcal{T} = \langle \mathcal{N}^\perp, \mathcal{N} \rangle$ — полуортогональное разложение. Обозначим функторы вложения категорий $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}^\perp$ через α и β соответственно.

Применим к треугольнику $\beta\beta^! X \to X \to \alpha\alpha^* X \to \beta\beta^! X[1]$ функтор Q. Так как $Q(\mathcal{N}) = 0$, а $\mathrm{Im}\,\beta \subset \mathcal{N}$, получаем треугольник $0 \to Q(X) \to Q\alpha\alpha^*(X) \to 0$, откуда получаем изоморфизм $Q \cong Q\alpha\alpha^*$.

Пусть $F : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ — точный функтор. Положим $\tilde{F} = F\alpha\alpha^*$ и пусть $\rho : F \to F\alpha\alpha^*$ — морфизм индуцированный естественным морфизмом $\mathrm{id} \to \alpha\alpha^*$. Пусть $\phi : F \to GQ$ — произвольный морфизм функторов. Компонируя с $\alpha\alpha^*$, получаем морфизм $\phi' : \tilde{F} = F\alpha\alpha^* \to GQ\alpha\alpha^* \cong GQ$, причем в силу функториальности $\phi' = \phi \circ \rho$. Единственность такого ϕ' очевидна. Остается заметить, что $\tilde{F}(\mathcal{N}) = 0$, поэтому $\tilde{F}$ раскладывается в композицию $\mathcal{T} \xrightarrow{Q} \mathcal{T}/\mathcal{N} \xrightarrow{RF} \mathcal{T}'$. Тогда RF — искомый функтор. □

Часть 37. Проективные и инъективные резольвенты

Предложение 36.2 (если оно применимо) дает эффективную конструкцию производных функторов.

Лемма 37.1. *Пусть в категории $\mathcal{A}$ достаточно много инъективных объектов. Тогда*

$$\mathrm{Hot}^+(\mathcal{A}) = \langle \mathrm{Hot}^+(\mathrm{Inj}(\mathcal{A})), \mathrm{Acycl}^+(\mathcal{A}) \rangle$$

— полуортогональное разложение. В частности, для всякого аддитивного функтора $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ на категории $\mathcal{D}^+(\mathcal{A})$ определен правый производный функтор RF.

Аналогично, пусть в категории $\mathcal{A}$ достаточно много проективных объектов. Тогда

$$\mathrm{Hot}^-(\mathcal{A}) = \langle \mathrm{Acycl}^-(\mathcal{A}), \mathrm{Hot}^-(\mathrm{Proj}(\mathcal{A})) \rangle$$

— полуортогональное разложение. В частности, для всякого аддитивного функтора $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ на категории $\mathcal{D}^-(\mathcal{A})$ определен левый производный функтор LF.

Доказательство. Если $I^\bullet$ — ограниченный снизу комплекс ацикличных объектов, а $X^\bullet$ — ацикличный комплекс, то всякий морфизм $I^\bullet \to X^\bullet$ гомотопен нулю (это мы доказывали в лекции 4, гомотопия строится по индукции). Поэтому категории полуортогональны. Далее, если $X^\bullet$ — произвольный ограниченный снизу комплекс, то у него есть инъективная резольвента, то есть квазиизоморфизм $X^\bullet \to I^\bullet$. Его конус — ацикличный комплекс. Полученный треугольник показывает, что у нас и в самом деле есть полуортогональное разложение. В частности, можно применить предложение 36.2 и получить правый производный функтор от произвольного аддитивного функтора F. Аналогичные рассуждения доказывают вторую часть леммы. □

Замечание 37.2. Согласно лемме, чтобы вычислить правый производный функтор RF на комплексе X, надо применить F почленно к какой-либо из его инъективных резольвент: $RF(X) = F(I(X))$. Аналогично, $LF(X) = F(P(X))$.

На самом деле, подход с полуортогональными разложениями позволяет доказывать весьма сильные результаты. Например, строить производные функторы на неограниченных производных категориях. Для этого нужны следующие понятия.

Комплекс $X \in \mathrm{Hot}(\mathcal{A})$ называется h-**инъективным**, если он лежит в правом ортогонале к $\mathrm{Acycl}(\mathcal{A})$. Аналогично, комплекс $X \in \mathrm{Hot}(\mathcal{A})$ называется h-**проективным**, если он лежит в левом ортогонале к $\mathrm{Acycl}(\mathcal{A})$. Обозначим через $\mathrm{hInj}(\mathcal{A})$ и $\mathrm{hProj}(\mathcal{A})$ категории h-инъективных и h-проективных объектов в $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$ соответственно. По определению

$$\mathrm{hInj}(\mathcal{A}) = \mathrm{Acycl}(\mathcal{A})^\perp, \qquad \mathrm{hProj}(\mathcal{A}) = {}^\perp\,\mathrm{Acycl}(\mathcal{A}).$$

Теорема 37.3 (Спальтенштейн)**.** (*i*) *Пусть R — произвольное кольцо. Тогда*

$$\mathrm{Hot}(R-\mathsf{Mod}) = \langle \mathrm{Acycl}(R-\mathsf{Mod}), \mathrm{hProj}(R-\mathsf{Mod})\rangle$$

— полуортогональное разложение. В частности, любой функтор на категории $R-\mathsf{Mod}$ имеет левый производный.

(*ii*) *Пусть X — топологическое пространство, а $\mathcal{R}$ — пучок колец на X. Обозначим через $\mathcal{R}-\mathsf{Mod}$ категорию пучков $\mathcal{R}$-модулей на X. Тогда*

$$\mathrm{Hot}(\mathcal{R}-\mathsf{Mod}) = \langle \mathrm{hInj}(\mathcal{R}-\mathsf{Mod}), \mathrm{Acycl}(\mathcal{R}-\mathsf{Mod})\rangle$$

— полуортогональное разложение. В частности, любой функтор на категории $\mathcal{R}-\mathsf{Mod}$ имеет правый производный.

Есть и разные вариации на эту тему.

Часть 38. Связь с классическими производными функторами

Лемма 38.1. *Пусть $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — точный слева функтор, а $RF : \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^+(\mathcal{B})$ — его правый производный. Определим функторы $R^iF : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ формулой*

$$R^iF(A) = H^i(RF(A)),$$

где $H^i : \mathcal{D}^+(\mathcal{B}) \to \mathcal{B}$ — функтор вычисления i-ых когомологий. Тогда R^iF — классические производные функторы от F. Аналогично, если $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — точный справа функтор, а $LF : \mathcal{D}^-(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^-(\mathcal{B})$ — его левый производный, то

$$L_iF(A) = H^{-i}(LF(A)),$$

— классические производные функторы от F.

Для доказательства в общем случае нам пока не хватает техники. Ограничимся случаем достаточного количества инъективных (проективных) объектов. В этом случае утверждение тавтологично.

Доказательство. Как было отмечено выше $RF(A) = F(I(A))$, где $I(A)$ — инъективная резольвента. Тогда $H^i(RF(A)) = H^i(F(I(A)))$, что равно $R^iF(A)$ согласно результатам лекции 4. □

Часть 39. Конструкция Делиня

Для описания производных функторов оказываются полезными понятия прямого и обратного предела функтора по категории. Напомним их.

Пусть S — (малая) категория, а $F : S \to \mathsf{Sets}$ — функтор. Определим

$$\begin{aligned} &\varinjlim_S F := \textstyle\coprod_{s\in S} F(s)/\{\, x_s \sim F(f)(x_s)_t \,\}_{f\in \mathrm{Hom}_S(s,t)},\\ &\varprojlim_S F := \{\, (x_s)_{s\in S} \in \textstyle\prod_{s\in S} F(s) \mid \forall f \in \mathrm{Hom}_S(s,t)\ F(f)(x_s) = x_t \,\}. \end{aligned}$$

Упражнение 39.1. Покажите, что (a) $\varinjlim$ и $\varprojlim$ — функторы из категории $\mathsf{Fun}(S,\mathsf{Sets})$ в Sets;
(b) $\varinjlim$ сопряжен слева, а $\varprojlim$ справа к функтору $\mathsf{Sets} \to \mathsf{Fun}(S,\mathsf{Sets})$, $X \mapsto F(s) := X$;
(c) $\mathrm{Hom}(\varinjlim_S F, X) = \varprojlim_S \mathrm{Hom}(F(s), X)$.

Если же функтор F принимает значения в произвольной категории $\mathcal{C}$, то по определению $\varinjlim_S F$ — это объект, представляющий функтор $X \mapsto \varinjlim_S \mathrm{Hom}(X, F(s))$, а $\varprojlim_S F$ — это объект, копредставляющий функтор $X \mapsto \varinjlim_S \mathrm{Hom}(F(s), X)$:

$$h_{\varinjlim_S F} = \varinjlim_S h_F, \qquad h^{\varprojlim_S F} = \varinjlim_S h^F.$$

Упражнение 39.2. Покажите, что если $\mathcal{A}$ — аддитивная категория, то
(a) функторы $\varinjlim, \varprojlim : \mathsf{Fun}_{\mathsf{add}}(S,\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ аддитивны; (b) $\mathrm{Ker}\, f = \varprojlim_{\bullet\to\bullet} f$, $\mathrm{Coker} = \varinjlim_{\bullet\to\bullet} f$.

Функтор $\Phi : T \to S$ называется **кофинальным**, если для всякого объекта $s \in S$

- найдется $t \in T$, так что $\mathrm{Hom}(s, \Phi(t)) \neq \emptyset$;
- для всяких $t_1, t_2 \in T$ и $f_1 : s \to \Phi(t_1)$, $f_2 : s \to \Phi(t_2)$ найдется $t \in T$ и морфизмы $g_1 : t_1 \to t$, $g_2 : t_2 \to t$, так что $\Phi(g_1) \circ f_1 = \Phi(g_2) \circ f_2$.

Категория S называется **фильтрованной**, если функтор $\Delta : S \to S \times S$ — кофинальный.

Упражнение 39.3. Если $\Phi : T \to S$ кофинальный функтор, то
(a) естественный морфизм $\varinjlim_T (F \circ \Phi) \to \varinjlim_S F$ — изоморфизм;
(b) естественный морфизм $\varprojlim_{S^\circ} F \to \varprojlim_{T^\circ} (F \circ \Phi)$ — изоморфизм.

Упражнение 39.4. Если категория S фильтрованая, то функтор $\varinjlim_S : \mathsf{Fun}_{\mathsf{add}}(S,\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ точен.

Пусть S — класс морфизмов в категории $\mathcal{C}$. Для каждого объекта $X \in \mathcal{T}$ обозначим через S^X категорию морфизмов $s : X \to Z$, лежащих в S, а через S_X — категорию морфизмов $s : Z \to X$, лежащих в S.

Упражнение 39.5. (a) Если S удовлетворяет условиям Оре, то категории S^X и S_X° фильтрованы, и для всякого морфизма $s : X \to Y$ лежащего в S функторы $S^Y \to S^X$ и $S_X^\circ \to S_Y^\circ$ кофинальны. (b) Если в категории $\mathcal{C}$ существуют прямые пределы, то функторы $X \mapsto \varinjlim_{S^X} Z$ и $X \mapsto \varprojlim_{S_X} Z$ переводят морфизмы из S в квазиизоморфизмы.

Из упражнения следует, что функторы $X \mapsto \varinjlim_{S^X} h_Z$ и $X \mapsto \varprojlim_{S_X} h_Z$ задают строго полное вложение локализации $\mathcal{C}[S^{-1}]$ в $\mathsf{Fun}(\mathcal{C},\mathsf{Sets})$.

Аналогичные соображения можно использовать для построения локализации функторов. Пусть $S = S(\mathcal{N})$ — класс морфизмов, соответствующий подкатегории $\mathcal{N}$. Пусть $F : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ — точный функтор. Предположим он имеет правую локализацию RF. Пусть G — произвольный точный функтор $\mathcal{T}/\mathcal{N} \to \mathcal{T}'$, а $\phi : F \to G \circ Q$

— морфизм функторов. Пусть $s : X \to Z$ — морфизм из S. Тогда возникает коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\rho_F(X)"'] \arrow[d, "F(s)"'] \arrow[rr, bend left, "\phi(X)"] & RF(Q(X)) \arrow[r, dotted, "\phi'(X)"'] \arrow[d, "\cong"', "RF(Q(s))"] & G(Q(X)) \arrow[d, "\cong"', "G(Q(s))"] \\
F(Z) \arrow[r, "\rho_F(Z)"] \arrow[rr, bend right, "\phi(Z)"'] & RF(Q(Z)) \arrow[r, dotted, "\phi'(Z)"] & G(Q(Z))
\end{tikzcd}$$

Заметим, что $Q(s)$ — изоморфизм, поэтому во-первых, морфизмы $(RF(Q(s)))^{-1} \circ \rho_F(X)$ индуцируют морфизм $\varinjlim_{S^X} F(Z) \to RF(X)$, который в силу универсального свойства "должен являться изоморфизмом". Проводя аналогичные рассуждения для левой локализации получаем равенства

$$(\star) \qquad RF(X) \cong \varinjlim_{S^X} F(Z), \qquad LF(X) \cong \varprojlim_{S_X} F(Z).$$

Сделаем эти рассуждения строгими. Для этого для каждого объекта $Z \in \mathcal{T}$ рассмотрим представимый функтор $h_{F(Z)} : \mathcal{T}'^{\circ} \to \mathsf{Ab}$. Определим функторы $rF(X) : \mathcal{T}'^{\circ} \to \mathsf{Ab}$ и $lF(X) : \mathcal{T}'^{\circ} \to \mathsf{Ab}$ формулами

$$rF(X) := \varinjlim_{S^X} h_{F(Z)}, \qquad lF(X) := \varprojlim_{S_X} h_{F(Z)}$$

Заметим, что если $F(\mathcal{N}) = 0$, то F переводит все морфизмы из S в изоморфизмы, поэтому все морфизмы в пределах — изоморфизмы, значит $rF(X) \cong h_{F(X)} \cong lF(X)$.

Лемма 39.6. *Если для всякого $X \in \mathcal{T}$ функтор $rF(X)$ представим, то функтор F имеет правую локализацию, причем $h_{RF(X)} \cong rF(X)$. Аналогично, если для всякого $X \in \mathcal{T}$ функтор $lF(X)$ представим, то функтор F имеет левую локализацию, причем $h_{LF(X)} \cong lF(X)$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный морфизм $f : X \to X'$ в $\mathcal{T}$. Пусть S^f — категория коммутативных квадратов

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & X' \arrow[d, "s'"] \\
Z \arrow[r, "\tilde{f}"] & Z'
\end{tikzcd}$$

где $s, s' \in S$. Имеем очевидные функторы $S^f \to S^X$ и $S^{X'}$, индуцирующие морфизмы пределов

$$\alpha_f : \varinjlim_{S^f} h_{F(Z)} \to \varinjlim_{S^X} h_{F(Z)} = rF(X) \quad \text{и} \quad \beta_f : \varinjlim_{S^f} h_{F(Z)} \to \varinjlim_{S^{X'}} h_{F(Z')} = rF(X')$$

(во втором случае используется морфизм $\tilde{f} : Z \to Z'$). Заметим, что α_f является изоморфизмом, так как функтор $S^f \to S^X$ кофинален (это одно из условий Оре). Поэтому композиция $\beta_f \circ \alpha_f^{-1}$ задает морфизм $rF(X) \to rF(X')$. Легко видеть, что тем самым определен функтор $rF : X \mapsto rF(X)$.

При этом, если морфизм f лежит в классе S, то существует также функтор $S^{X'} \to S^f$,

$$(s' : X' \to Z') \mapsto \begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s'f"'] & X' \arrow[d, "s'"] \\
Z' \arrow[r, "\mathrm{id}"] & Z'
\end{tikzcd}$$

Композиция функторов $S^{X'} \to S^f \to S^{X'}$ очевидно тождественна, а композиция $S^f \to S^{X'} \to S^f$ переводит

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & X' \arrow[d, "s'"] \\
Z \arrow[r, "\tilde{f}"] & Z'
\end{tikzcd} \quad \mapsto \quad \begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s'f"'] & X' \arrow[d, "s'"] \\
Z' \arrow[r, "\mathrm{id}"] & Z'
\end{tikzcd}$$

При этом диаграммы в правой части образуют кофинальную подкатегорию в S^f, откуда заключаем, что в этом случае морфизм β_f является изоморфизмом.

Пусть теперь $\tilde{F}(X) \in \mathcal{T}'$ — объект, представляющий функтор $rF(X)$. Из функториальности rF по X и леммы Ионеда следует, что $\tilde{F} : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ — функтор. При этом, так как rF переводит морфизмы из S в изоморфизмы, значит то же верно и для $\tilde{F}$, следовательно он пропускается через факторкатегорию $\tilde{F} : \mathcal{T}/\mathcal{N} \to \mathcal{T}'$.

Упражнение 39.7. Покажите, что функтор $\tilde{F}$ точен.

Проверим, что построенный функтор $\tilde{F}$ удовлетворяет универсальному свойству правого производного функтора.

По определению имеем

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}'}(Y, \tilde{F}(X)) = rF(X)(Y) = \varinjlim_{S^X} h_{F(Z)}(Y) = \varinjlim_{S^X} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}'}(Y, F(Z)).$$

Если $Y = F(X)$, то морфизм $\mathrm{id}_{F(X)} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}'}(F(X), F(X))$ (соответствующий морфизму $\mathrm{id}_X : X \to X$ из S^X) задает элемент предела, то есть морфизм $\rho_F(X) : F(X) \to \tilde{F}(X)$. Построение функториально по X, поэтому ρ_F — морфизм функторов $F \to \tilde{F} \circ Q$. Пусть теперь $\phi : F \to G \circ Q$ произвольный морфизм функторов. Построим морфизм $\phi' : \tilde{F} \to G$. Для этого достаточно для всех Y построить морфизмы $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}'}(Y, \tilde{F}(X)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}'}(Y, G(X))$, функториальные и по X и по Y. Рассмотрим произвольный каждого морфизм $s : X \to Z$ из S^X и произвольный морфизм $f : Y \to F(Z)$. Тогда последний из морфизмов в строке

$$Y \xrightarrow{f} F(Z) \xrightarrow{\phi_Z} G(Q(Z)) \xleftarrow{G(Q(s))} G(Q(X))$$

обратим, так что можно рассмотреть композицию $G(Q(s))^{-1} \circ \phi_Z \circ f : Y \to G(Q(X))$. Легко видеть, что тем самым получается морфизм $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}'}(Y, \tilde{F}(X)) = \varinjlim_{S^X} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}'}(Y, F(Z)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}'}(Y, G(X))$. Его функториальность очевидна, так что получаем искомый морфизм функторов. Чтобы проверить, что $\phi' \circ \rho_F = \phi$ достаточно подставить $Y = F(X)$, $\rho = \rho_F(X)$. Согласно определению последнего ϕ' переводит его в композицию $G(Q(\mathrm{id}_X))^{-1} \circ \phi_X \circ \mathrm{id}_{F(X)} = \phi_X$, что и требовалось.

Остается проверить, что построенный ϕ' единственен. В самом деле, так как в категории S^X есть начальный объект $\mathrm{id}_X : X \to X$, всякий морфизм $\phi' : \varinjlim_{S^X} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}'}(Y, F(Z)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}'}(Y, G(X))$ однозначно определяется морфизмом $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}'}(Y, F(X)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}'}(Y, G(X))$, то есть морфизмом $F(X) \to G(X)$, то есть композицией $\phi' \circ \rho_F$. $\square$

В качестве следствия получаем такое утверждение

Лемма 39.8. *Пусть в $\mathcal{T}$ есть строго полная триангулированная подкатегория $\mathcal{T}_0$, такая что $F(\mathcal{N}_0) = 0$, а для каждого объекта $X \in \mathcal{T}$ найдется морфизм $X \to X_0$, такой что $X_0 \in \mathcal{T}_0$, конус которого лежит в $\mathcal{N}$. Тогда функтор F имеет правый производный. Причем $RF(X) \cong F(X_0)$. Аналогично, если $F(\mathcal{N}_0) = 0$, а для каждого объекта $X \in \mathcal{T}$ найдется морфизм $X_0 \to X$, такой что $X_0 \in \mathcal{T}_0$, конус которого лежит в $\mathcal{N}$, то функтор F имеет левый производный, причем $LF(X) \cong F(X_0)$.*

Доказательство. В самом деле, функтор $rF(X)$ изоморфен функтору $rF(X_0)$. Пусть $S_0 = S \cap \mathcal{T}$. Тогда категория $S_0^{X_0} \subset S^{X_0}$ кофинальна (по условию!), поэтому $rF_0(X_0) = \varinjlim_{S_0^{X_0}} h_{F(Z)} = \varinjlim_{S_0^X} h_{F(Z)} = rF(X_0)$, так что остается проверить представимость функтора $rF_0(X_0)$. Но так как $F_0(\mathcal{N}_0) = 0$, функтор $rF_0(X_0)$ представим объектом $F_0(X_0) = F(X_0)$, так что $RF(X) \cong F(X_0)$. $\square$

Применяя к производным функторам, получаем следующее

Следствие 39.9. *Пусть $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — точный слева (справа) функтор. Если в $\mathcal{A}$ существует достаточно много F-ацикличных объектов, то F имеет правый (левый) производный функтор на категории $\mathcal{D}^+(\mathcal{A})$ (соотв. $\mathcal{D}^-(\mathcal{A})$), причем $RF(X) = F(A(X))$ (соотв. $LF(X) = F(A(X))$), где $A(X)$ — F-ацикличная резольвента.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{Acycl}^F(\mathcal{A})$ — F-ацикличные объекты. Положим $\mathcal{T}_0 = \mathrm{Hot}^*(\mathrm{Acycl}^F(\mathcal{A}))$, где $* = \pm$. Тогда условия леммы выполняются (то, что $F(\mathcal{N}_0) = 0$ было доказано в лекции 5). $\square$

Пусть $(\mathcal{T}/\mathcal{N})^F \subset \mathcal{T}/\mathcal{N}$ — строго полная подкатегория в $\mathcal{T}/\mathcal{N}$, состоящая из всех объектов X, для которых функтор $rF(X)$ представим, а $(\mathcal{T}/\mathcal{N})_F \subset \mathcal{T}/\mathcal{N}$ — строго полная подкатегория в $\mathcal{T}/\mathcal{N}$, состоящая из всех объектов X, для которых функтор $lF(X)$ представим.

Упражнение 39.10. Покажите, что категории $(\mathcal{T}/\mathcal{N})^F$ и $(\mathcal{T}/\mathcal{N})_F$ в $\mathcal{T}/\mathcal{N}$ — триангулированные.

Они называются областью определения функтора RF (соотв. LF).

Также можно получить следующую интерпретацию. Согласно ней, правая и левая локализации функтора существуют всегда, задаются формулами $(\star)$, но принимают значения в пополнении $\varinjlim \mathcal{T}'$ или $\varprojlim \mathcal{T}'$ категории $\mathcal{T}'$ относительно прямых или обратных пределов соответственно. Тогда область определения функторов RF и LF — это прообраз подкатегории $\mathcal{T}' \subset \varinjlim \mathcal{T}'$ и $\mathcal{T}' \subset \varprojlim \mathcal{T}'$ относительно RF и LF соответственно.

Производные функторы — свойства и примеры

Часть 40.

В лекции про точные функторы, я забыл рассказать про морфизмы точных функторов. Напомним, что точный функтор $\mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ — это пара (F, θ_F), где $\theta_F : F \circ [1]_\mathcal{T} \to [1]_{\mathcal{T}'} \circ F$ — изоморфизм функторов. Морфизм точных функторов $\phi : (F, \theta_F) \to (G, \theta_G)$ — это морфизм функторов $F \to G$, такой что диаграмма

$$\begin{tikzcd} F \circ [1]_\mathcal{T} \arrow[r, "\phi \circ [1]_\mathcal{T}"] \arrow[d, "\theta_F"'] & G \circ [1]_\mathcal{T} \arrow[d, "\theta_G"'] \\ {[1]_{\mathcal{T}'} \circ F} \arrow[r, "{[1]_{\mathcal{T}'} \circ \phi}"] & {[1]_{\mathcal{T}'} \circ G} \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Упражнение 40.1. Покажите, что композиция морфизмов точных функторов — морфизм точных функторов.

Упражнение 40.2. Покажите, что если $F : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ — точный функтор, а $G : \mathcal{T}' \to \mathcal{T}$ — его правый сопряженный (он автоматически точен), то морфизмы сопряжения $\mathrm{id}_\mathcal{T} \to G \circ F$ и $F \circ G \to \mathrm{id}_{\mathcal{T}'}$ — морфизмы точных функторов.

Напомним, что если $F : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ — точный функтор между триангулированными категориями, а $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$ — триангулированная подкатегория, то существует правый и левый функтор локализации RF, LF из $\mathcal{T}/\mathcal{N}$ в подходящее пополнение категории $\mathcal{T}'$, задаваемые формулами

$$\mathrm{Hom}(Y, RF(X)) = \varinjlim_{(s:X \to Z) \in S(\mathcal{N})} \mathrm{Hom}(Y, F(Z)), \qquad \mathrm{Hom}(LF(X), Y) = \varinjlim_{(s:Z \to X) \in S(\mathcal{N})} \mathrm{Hom}(F(Z), Y).$$

В категории $\mathcal{T}/\mathcal{N}$ есть максимальная подкатегория (область определения функтора локализации), на которой функтор локализации принимает значения в $\mathcal{T}'$. Это триангулированная подкатегория, а ограничение функтора локализации на эту категорию является точным функтором. Есть разные достаточные условия, обеспечивающие то, что функтор локализации всюду определен (допустимость подкатегории $\mathcal{N}$ в $\mathcal{T}$, или наличие подходящей подкатегории $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}$).

Упражнение 40.3. Покажите, что (a) морфизмы $\rho_F : F \to RF \circ Q$ и $\lambda_F : LF \circ Q \to F$ — морфизмы точных функторов. (b) если морфизм $\phi : F \to G \circ Q$ — морфизм точных функторов, то морфизм $\phi' : RF \to G$ — тоже морфизм точных функторов (аналогично для левой локализации).

В частном случае, когда $\mathcal{T} = \mathrm{Hot}^*(\mathcal{A})$, $\mathcal{T}' = \mathcal{D}^*(\mathcal{B})$, $\mathcal{N} = \mathrm{Acycl}^*(\mathcal{A})$, а функтор F индуцирован аддитивным функтором из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$, локализации называются производными функторами.

Пусть $F, G : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ — точные функторы, а $\phi : F \to G$ — морфизм функторов.

Лемма 40.4. *Существует единственный морфизм точных функторов $R\phi : RF \to RG$, такой что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\rho_F"'] & G \arrow[d, "\rho_G"] \\ RF \circ Q \arrow[r, "R\phi"] & RG \circ Q \end{tikzcd}$$

коммутативна. Он задается формулой $R\phi(X) = \varinjlim_{(s:X \to Z) \in S(\mathcal{N})} \phi(Z)$. *При этом* $R\phi \circ R\psi = R(\phi \circ \psi)$.

Аналогично для левых производных функторов.

Доказательство. Легко следует из универсального свойства производных функторов. В самом деле, рассмотрим морфизм функторов $\rho_G \circ \phi : F \to RG \circ Q$. По униврсальному равенству найдется морфизм функторов $R\phi$ с необходимыми свойствами. При этом равенство $R\phi \circ R\psi = R(\phi \circ \psi)$ тоже легко следует из универсального свойства.

С другой стороны, можно вывести все и из явной формулы и свойств пределов. □

Пусть $F : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ — точный функтор, а $G : \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ — его левый сопряженный (тоже автоматически точный). Пусть также $\mathcal{M} \subset \mathcal{S}$ и $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$ — триангулированные подкатегории. Обозначим через $RF : \mathcal{S}/\mathcal{M} \to \mathcal{T}/\mathcal{N}$ правую локализацию функтора $Q_{\mathcal{T}} \circ F$, а через $LG : \mathcal{T}/\mathcal{N} \to \mathcal{S}/\mathcal{M}$ левую локализацию функтора $Q_{\mathcal{S}} \circ G$.

Лемма 40.5. *Если функтор RF определен в X, а G определен в Y, то существует изоморфизм*

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{S}/\mathcal{M}}(LGY, X) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}/\mathcal{N}}(Y, RFX)$$

функториальный по X и Y. В частности, если RF и LG всюду определены, то они сопряжены.

Доказательство. Проще всего воспользоваться явными формулами. В левой и правой частях по определению стоят

$$\varinjlim_{(W\to Y)\in S(\mathcal{N})} \operatorname{Hom}_{\mathcal{S}}(G(W), X) \qquad \text{и} \qquad \varinjlim_{(X\to Z)\in S(\mathcal{M})} \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, F(Z))$$

соответственно. Рассмотрим также

$$\varinjlim_{(W\to Y)\in S(\mathcal{N}),\ (X\to Z)\in S(\mathcal{M})} \operatorname{Hom}_{\mathcal{S}}(G(W), Z),$$

то есть предел по категории $S(\mathcal{M})^X \times S(\mathcal{N})_Y$. Легко видеть, что функторы проекции $S(\mathcal{M})^X \times S(\mathcal{N})_Y \to S(\mathcal{M})^X, S(\mathcal{N})_Y$ кофинальны, поэтому индуцируют изоморфизмы этого предела с каждым из двух исходных (также надо учесть, что $\operatorname{Hom}_{\mathcal{S}}(G(W), X) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(Y, F(Z))$ ввиду сопряженности функторов F и G). □

Часть 41. Композиция производных функторов

Пусть $\mathcal{T}_1 \xrightarrow{F} \mathcal{T}_2 \xrightarrow{G} \mathcal{T}'$ — композиция точных функторов, а $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{T}_1$ и $\mathcal{N}_2 \subset \mathcal{T}_2$ — строго полные триангулированные подкатегории. Рассмотрим правые локализации $RF : \mathcal{T}_1/\mathcal{N}_1 \to \mathcal{T}_2/\mathcal{N}_2$, $RG : \mathcal{T}_2/\mathcal{N}_2 \to \mathcal{T}'$ и $R(G \circ F) : \mathcal{T}_1/\mathcal{N}_1 \to \mathcal{T}'$ (если они определены). Естественный вопрос — верно ли, что $R(G \circ F) \cong RG \circ RF$. Легко показать, что вообще говоря, это не так.

Пример 41.1. Приведем пример для левых производных функторов. Рассмотрим гомоморфизм алгебр $\mathsf{k}[x] \to \mathsf{k}$, $f(x) \mapsto f(0)$. Пусть $F : \mathsf{k}-\mathsf{mod} \to \mathsf{k}[x]-\mathsf{mod}$ — функтор ограничения, а $G : \mathsf{k}[x]-\mathsf{mod} \to \mathsf{k}-\mathsf{mod}$, $M \mapsto \mathsf{k} \otimes_{\mathsf{k}[x]} M$ — функтор индукции (геометрически $\mathsf{k}[x]-\mathsf{mod} = \mathsf{Coh}(\mathbb{A}^1)$, $\mathsf{k}-\mathsf{mod} = \mathsf{Coh}(\mathsf{pt})$, $F = i_*$, $G = i^*$, где $i : \mathsf{pt} \to \mathbb{A}^1$ — естественное вложение). Ясно, что $LF = F$, так как F точен, а $LG(M) = \mathsf{k} \overset{L}{\otimes}_{\mathsf{k}[x]} M$. Пользуясь резольвентой

$$0 \to \mathsf{k}[x] \xrightarrow{x} \mathsf{k}[x] \to \mathsf{k} \to 0,$$

легко показать, что $LG(LF(V)) \cong V \oplus V[1]$. При этом $G(F(V)) = V$, так что $L(G \circ F) = L\,\mathrm{id} = \mathrm{id}$.

Ввиду вышесказанного, полезно иметь условие, гарантриующее равенство производного функтора композиции и композиции производных функторов. Приведем одно достаточное условие.

Пусть $F : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ — точный функтор, а $Q : \mathcal{T} \to \mathcal{T}/\mathcal{N}$ — функтор локализации. Объект X называется **приспособленным для** F, если RF определен на X и естественный морфизм $\rho_F(X) : F(X) \to RF(Q(X))$ — изоморфизм.

Упражнение 41.2. Покажите, что все объекты, приспособленные для функтора F образуют полную триангулированную подкатегорию в $\mathcal{T}$.

Упражнение 41.3. Пусть $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — аддитивный функтор между абелевыми категориями, а $E \subset \mathcal{A}$ — класс объектов, замкнутый относительно прямых сумм и коядер мономорфизмов, такой что для любой точной тройки $0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$, если $A_1 \in E$, то тройка $0 \to F(A_1) \to F(A_2) \to F(A_3) \to 0$ точна. Если в $\mathcal{A}$ достаточно много объектов из E, то любой ограниченный снизу комплекс с членами в E приспособлен для F в $\operatorname{Hot}^+(\mathcal{A})$, а функтор RF всюду определен на $\mathcal{D}^+(\mathcal{A})$.

Говорят, что в категории $\mathcal{T}$ достаточно много приспособленных для F объектов, если для всякого $X \in \mathcal{T}$ найдется приспособленный для F объект $X_0 \in \mathcal{T}$ и морфизм $s : X \to X_0$, лежащий в $S(\mathcal{N})$ (в случае левой локализации требуется морфимз $X_0 \to X$).

Упражнение 41.4. Пусть $\mathcal{T}(F) \subset \mathcal{T}$ — строго полная триангулированная подкатегория, состоящая из всех объектов, приспособленных для F. Тогда $F(\mathcal{T}(F) \cap \mathcal{N}) = 0$. В частности, если в категории $\mathcal{T}$ достаточно много приспособленных для F объектов, то RF всюду определен и $RF(X) \cong F(X_0)$, где X_0 приспособленный для F объект, для которого существует морфизм $s : X \to X_0$ в $S(\mathcal{N})$.

Лемма 41.5. *Пусть $\mathcal{T}_1 \xrightarrow{F} \mathcal{T}_2 \xrightarrow{G} \mathcal{T}'$ — композиция точных функторов, а $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{T}_1$ и $\mathcal{N}_2 \subset \mathcal{T}_2$ — строго полные триангулированные подкатегории. Пусть в категории $\mathcal{T}_1$ достаточно много приспособленных для F объектов X, таких что объект $F(X)$ в $\mathcal{T}_2$ приспособлен для G. Тогда все эти объекты приспособлены для $G \circ F$, функтор RF определен всюду, функтор RG определен на $\operatorname{Im} RF$ и $R(G \circ F) \cong RG \circ RF$.*

Доказательство. Так как в $\mathcal{T}_1$ достаточно много приспособленных для F объектов, то RF определен всюду. Так как для каждого X в $\mathcal{T}_1$ найдется морфизм $s : X \to X_1$, такой что $s \in S(\mathcal{N}_1)$, X_1 приспособлен для F, а $F(X_1)$ приспособлен для G, то $RF(X) \cong RF(X_1) \cong F(X_1)$, а RG определен на $RF(X_1)$ по условию. Значит RG определен на $\operatorname{Im} RF$.

Пусть теперь $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}_1$ — строго полная подкатегория, состоящая из приспособленных для F объектов X_0, таких что $F(X_0)$ приспособлен для G. Эта подкатегория триангулирована (так как является пересечением триангулированной подкатегории и прообраза триангулированной подкатегории). В силу упражнения $F(\mathcal{T}_0 \cap \mathcal{N}_1) = 0$, значит тем более $G(F(\mathcal{T}_0 \cap \mathcal{N}_1)) = 0$. При этом для каждого объекта $X \in \mathcal{T}_1$ найдется морфизм $s : X \to X_0$ в $S(\mathcal{N}_1)$, такой что $X_0 \in \mathcal{T}_0$. Значит $R(G \circ F)$ всюду определен и $R(G \circ F)(X) = G(F(X_0))$. В частности, если $X \in \mathcal{T}_0$ можно взять $X_0 = X$, так что $R(G \circ F)(X) = G(F(X))$. □

Часть 42. Производные бифункторы

Пусть $X^{\bullet,\bullet}$ — бикомплекс над $\mathcal{A}$, то есть биградуированный объект над $\mathcal{A}$ с двумя дифференциалами $d_I : X^{m,n} \to X^{m+1,n}$ и $d_{II} : X^{m,n} \to X^{m,n+1}$, такими что

$$d_I^2 = 0, \qquad d_{II}^2 = 0, \qquad \text{и} \qquad d_I \circ d_{II} = d_{II} \circ d_I.$$

Легко видеть, что бикомплексы образуют абелеву категорию $\mathrm{Com}^2(\mathcal{A})$.

Определим функторы свертки $\mathsf{tot}_\oplus, \mathsf{tot}_\pi : \mathrm{Com}^2(\mathcal{A}) \to \mathrm{Com}(\mathcal{A})$ формулами

$$\begin{array}{rclcl} \mathsf{tot}_\oplus(X^{\bullet,\bullet}, d_I, d_{II}) & = & (\oplus_{m+n=k} X^{m,n}, & d^k_{|X^{m,n}} & = & d_I^{m,n} + (-1)^m d_{II}^{m,n}), \\ \mathsf{tot}_\pi(X^{\bullet,\bullet}, d_I, d_{II}) & = & (\prod_{m+n=k} X^{m,n}, & d^k_{m,n} & = & d_I^{m-1,n} + (-1)^m d_{II}^{m,n-1}). \end{array}$$

Чтобы первый из них был определен в категории $\mathcal{A}$ должны существовать бесконечные прямые суммы, а чтобы второй был определен — бесконечные прямые произведения. При этом, эти функторы всегда определены и совпадают на подкатегории бикомплексов, имеющих на каждой из диагоналей лишь конечное число ненулевых членов (в этом случае мы будем обозначать их просто tot).

Упражнение 42.1. Пусть $f : X^\bullet \to Y^\bullet$ — морфизм комплексов. Положим $Z^{-1,n} = X^n$, $Z^{0,n} = Y^n$, $Z^{m,n} = 0$ при $m \neq -1, 0$, $d_{II}^{-1,n} = d_X^n$, $d_I^{0,n} = d_Y^n$, а $d_{II}^{-1,n} = f^n$. Покажите, что $\mathsf{tot}(Z^{\bullet,\bullet}) = C(f)$.

На категории бикомплексов есть два функтора сдвига — по первой координате и по второй (меняющие знак соответствующего дифференциала). Обозначим их $[1]_I$ и $[1]_{II}$ соответственно. Ясно, что они коммутируют $[1]_I \circ [1]_{II} = [1]_{II} \circ [1]_I$.

Упражнение 42.2. Покажите, что существуют изоморфизмы функторов $\theta_I : \mathsf{tot}_* \circ [1]_I \to [1] \circ \mathsf{tot}_*$ и $\theta_I : \mathsf{tot}_* \circ [1]_I \to [1] \circ \mathsf{tot}_*$, такие что диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathsf{tot}_* \circ [1]_I \circ [1]_{II} \arrow[r, "\theta_I"] \arrow[d, "\theta_{II}"'] & {[1] \circ \mathsf{tot}_* \circ [1]_{II}} \arrow[d, "\theta_{II}"'] \\ {[1] \circ \mathsf{tot}_* \circ [1]_I} \arrow[r, "\theta_I"] & {[2] \circ \mathsf{tot}_*} \end{tikzcd}$$

антикоммутативна ($*$ заменяет $\oplus$ либо π).

Бифунктор $F : \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2 \to \mathcal{T}$ между триангулированными категориями называется точным, если

- заданы изоморфзмы $\theta_1 : F \circ [1]_{\mathcal{T}_1} \to [1]_{\mathcal{T}} \circ F$ и $\theta_2 : F \circ [1]_{\mathcal{T}_2} \to [1]_{\mathcal{T}} \circ F$, такие что диаграмма
$$\begin{tikzcd} F \circ [1]_{\mathcal{T}_1} \circ [1]_{\mathcal{T}_2} \arrow[r, "\theta_1"] \arrow[d, "\theta_2"'] & {[1]} \circ F \circ [1]_{\mathcal{T}_2} \arrow[d, "\theta_2"'] \\ {[1]} \circ F \circ [1]_{\mathcal{T}_1} \arrow[r, "\theta_1"] & {[2]} \circ F \end{tikzcd}$$
антикоммутативна;
- для любого выделенного треугольника $X_1 \to X_2 \to X_3 \to X_1[1]_{\mathcal{T}_1}$ в $\mathcal{T}_1$ и любого $Y \in \mathcal{T}_2$ треугольник $F(X_1, Y) \to F(X_2, Y) \to F(X_3, Y) \to F(X_1, Y)[1]_{\mathcal{T}}$ выделен в $\mathcal{T}$;
- для любого выделенного треугольника $Y_1 \to Y_2 \to Y_3 \to Y_1[1]_{\mathcal{T}_2}$ в $\mathcal{T}_2$ и любого $X \in \mathcal{T}_1$ треугольник $F(X, Y_1) \to F(X, Y_2) \to F(X, Y_3) \to F(X, Y_1)[1]_{\mathcal{T}}$ выделен в $\mathcal{T}$.

Упражнение 42.3. Покажите, что для любого аддитивного бифунктора $F : \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}$ бифунктор $F_* : \mathrm{Hot}^*(\mathcal{A}_1) \times \mathrm{Hot}^*(\mathcal{A}_2) \to \mathrm{Hot}^*(\mathcal{A})$, заданный формулой
$$(X^\bullet, Y^\bullet) \mapsto \mathsf{tot}_*(F(X^\bullet, Y^\bullet))$$
точен.

Пусть $F : \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2 \to \mathcal{T}$ — бифунктор, а $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{T}_1$, $\mathcal{N}_2 \subset \mathcal{T}_2$ — триангулированные подкатегории. Бифунктор $RF : (\mathcal{T}_1/\mathcal{N}_1) \times (\mathcal{T}_2/\mathcal{N}_2) \to \mathcal{T}$ называется правой локализацией бифунктора F, если задан морфизм бифункторов $\rho : F \to RF \circ Q$, такой что для любого бифунктора $G : (\mathcal{T}_1/\mathcal{N}_1) \times (\mathcal{T}_2/\mathcal{N}_2) \to \mathcal{T}$ и морфизма бифункторов $\phi : F \to G \circ Q$ существует единственный морфизм бифункторов $\phi' : RF \to G$, такой что $\phi' \circ \rho = \phi$.

Упражнение 42.4. Преположим, что существует полуортогональное разложение $\mathcal{T}_1 = (\mathcal{I}_1, \mathcal{N}_1)$, а функтор F переводит $\mathcal{I}_1 \times \mathcal{N}_2$ в ноль. Тогда он имеет правый производный RF и $RF(X, Y) = F(X_I, Y)$, где X_I — проекция X на I.

Упражнение 42.5. Преположим, что существует триангулированные подкатегории $\mathcal{T}_{01} \subset \mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_{02} \subset \mathcal{T}_2$ такая что если $\mathcal{N}_{0i} = \mathcal{T}_{0i} \cap \mathcal{N}_i$, то $F(\mathcal{N}_{01} \times \mathcal{T}_{02}) = 0$ и $F(\mathcal{T}_{01} \times \mathcal{N}_{02}) = 0$, и для всяких объектов $X \in \mathcal{T}_1$, $Y \in \mathcal{T}_2$ существуют морфизмы $s : X \to X_0$, $t : Y \to Y_0$, лежащие в $S(\mathcal{N}_1)$ и $S(\mathcal{N}_2)$ соответственно. Докажите, что существует правый производный функтор RF, причем $RF(X, Y) = F(X_0, Y_0)$.

Упражнение 42.6. Сформулируйте и докажите теорему о производном функторе композиции бифункторов.

Часть 43. Производные функторы в алгебраической геометрии

Пусть X — схема.

Упражнение 43.1. Покажите, что (a) если $U \subset X$ — аффинное подмножество, $j : U \to X$ — вложение, а F — квазикорентный пучок на U, соответствующий инъективному модулю, то j_*F — инъективный объект в $\mathsf{QCoh}(X)$; (b) если X квазикомпактна (имеет конечное покрытие открытыми аффинными множествами), то в $\mathsf{QCoh}(X)$ достаточно инъективных объектов. В частности, любой точный справа функтор из $\mathsf{QCoh}(X)$ имеет правый производный на $\mathcal{D}^+(\mathsf{QCoh}(X))$.

В частности, если X квазикомпактна, то функтор Γ глобальных сечений имеет правый производный функтор $R\Gamma$ на категории $\mathcal{D}^+(\mathsf{QCoh}(X))$, Аналогично, если $f : X \to Y$ — морфизм из квазикомпактной схемы X, то существует правый производный функтор $Rf_* : \mathcal{D}^+(\mathsf{QCoh}(X)) \to \mathcal{D}^+(\mathsf{QCoh}(Y))$.

Упражнение 43.2. Покажите, что любая квазипроективная схема квазикомпактна.

С проективными объектами в категории $\mathsf{QCoh}(X)$ ситуация противоположная — их, как правило нет вообще (единственное по существо исключение — аффинный случай). Однако, для вычисления левого производного функтора от обратного образа и тензорного произведения часто достаточно локально свободных пучков. Обозначим класс локально свободных пучков на X через $\mathsf{LF}(X)$.

Упражнение 43.3. Пусть $f : X \to Y$ — морфизм схем. Покажите, что класс $\mathsf{LF}(Y)$ удовлетворяет условиям упражнения 41.3 для функтора $f^* : \mathsf{QCoh}(Y) \to \mathsf{QCoh}(X)$. В частности, если на Y достаточно много локально свободных пучков, то существует левый производный функтор $Lf^* : \mathcal{D}^-(\mathsf{QCoh}(Y)) \to \mathcal{D}^-(\mathsf{QCoh}(X))$.

Упражнение 43.4. Покажите, что на любой квазипроективной схеме достаточно много локально свободных пучков.

Упражнение 43.5. Пусть $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 = \mathrm{Hot}^-(\mathsf{QCoh}(X))$, $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2 = \mathrm{Acycl}^-(\mathsf{QCoh}(X))$, $\mathcal{T} = \mathcal{D}^-(\mathsf{QCoh}(X))$, а $F(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet) = Q(\mathsf{tot}_\oplus(\mathcal{F}^\bullet \otimes \mathcal{G}^\bullet))$. Пусть на X достаточно много локально свободных пучков. Покажите, что если $\mathcal{T}_{01} = \mathrm{Hot}^-(\mathsf{LF}(X))$, $\mathcal{T}_{02} = \mathcal{T}_2$, то условия упражнения 42.5 (для левых локализаций) выполнены. В частности, существует левый производный функтор $\overset{L}{\otimes} : \mathcal{D}^-(\mathsf{QCoh}(X)) \times \mathcal{D}^-(\mathsf{QCoh}(X)) \to \mathcal{D}^-(\mathsf{QCoh}(X))$.

Упражнение 43.6. Пусть $\mathcal{T}_1 = \mathrm{Hot}^-(\mathsf{QCoh}(X))$, $\mathcal{T}_2 = \mathrm{Hot}^+(\mathsf{QCoh}(X))$, $\mathcal{N}_{1,2} = \mathrm{Acycl}^\mp(\mathsf{QCoh}(X))$, $\mathcal{T} = \mathcal{D}^+(\mathsf{QCoh}(X))$, а $F(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet) = Q(\mathsf{tot}_\pi(\mathcal{H}om(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet)))$.
(a) Пусть на X достаточно много локально свободных пучков. Покажите, что если $\mathcal{T}_{01} = \mathrm{Hot}^-(\mathsf{LF}(X))$, $\mathcal{T}_{02} = \mathcal{T}_2$, то условия упражнения 42.5 выполнены. В частности, существует правый производный функтор $R\mathcal{H}om : \mathcal{D}^-(\mathsf{QCoh}(X))^\circ \times \mathcal{D}^+(\mathsf{QCoh}(X)) \to \mathcal{D}^+(\mathsf{QCoh}(X))$.
(b) Пусть X квазикомпактна. Покажите, что если $\mathcal{T}_{01} = \mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_{02} = \mathrm{Hot}^+(\mathrm{Inj}(\mathsf{QCoh}(X)))$, то условия упражнения 42.5 выполнены и функтор $R\mathcal{H}om : \mathcal{D}^-(\mathsf{QCoh}(X))^\circ \times \mathcal{D}^+(\mathsf{QCoh}(X)) \to \mathcal{D}^+(\mathsf{QCoh}(X))$ существует.

Упражнение 43.7. Пусть $\mathcal{T}_1 = \mathrm{Hot}^-(\mathsf{QCoh}(X))$, $\mathcal{T}_2 = \mathrm{Hot}^+(\mathsf{QCoh}(X))$, $\mathcal{N}_{1,2} = \mathrm{Acycl}^\mp(\mathsf{QCoh}(X))$, $\mathcal{T} = \mathcal{D}^+(\mathsf{Ab})$, а $F(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet) = Q(\mathsf{tot}_\pi(\mathrm{Hom}(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet)))$. Покажите, что если схема X квазикомпактна, а $\mathcal{T}_{01} = \mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_{02} = \mathrm{Hot}^+(\mathrm{Inj}(\mathsf{QCoh}(X)))$, то условия упражнения 42.5 выполнены. В частности, существует правый производный функтор $R\,\mathrm{Hom} : \mathcal{D}^-(\mathsf{QCoh}(X))^\circ \times \mathcal{D}^+(\mathsf{QCoh}(X)) \to \mathcal{D}^+(\mathsf{Ab})$.

На самом деле, производные функторы от всех вышеперечисленных существуют и на неограниченных производных категориях. Это доказывается с помощью результатов типа теоремы Спальтенштейна.

Между перечисленными выше функторами есть множество соотношений. Во-первых, соотношения сопряженности.

Лемма 43.8. *Функтор Lf^* сопряжен слева к функтору Rf_*.*

Доказательство. Немедленно следует из сопряженности функторов f^* и f_*. □

Лемма 43.9. *Функтор $- \overset{L}{\otimes} \mathcal{F}$ сопряжен слева к функтору $R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, -)$.*

Доказательство. Немедленно следует из сопряженности функторов $- \otimes \mathcal{F}$ и $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, -)$. □

Кроме того, выполнены следующие соотношения

Упражнение 43.10. Пусть $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ — морфизмы схем. Покажите, что (a) $L(g \circ f)^* \cong Lf^* \circ Lg^*$; (b) $R(g \circ f)_* \cong Rg_* \circ Rf_*$; (c) $R\Gamma(X, -) \cong R\Gamma(Y, -) \circ Rf_*$.

Упражнение 43.11. Пусть X — схема. Покажите, что (a) $R\Gamma(X, R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})) \cong R\,\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$;
(b) $(\mathcal{F} \overset{L}{\otimes} \mathcal{G}) \overset{L}{\otimes} \mathcal{H} \cong \mathcal{F} \overset{L}{\otimes} (\mathcal{G} \overset{L}{\otimes} \mathcal{H})$; (c) $\mathcal{F} \overset{L}{\otimes} \mathcal{G} \cong \mathcal{G} \overset{L}{\otimes} \mathcal{F}$.

Упражнение 43.12. Пусть $f : X \to Y$ — морфизм схем. Покажите, что $Lf^*(\mathcal{F} \overset{L}{\otimes} \mathcal{G}) \cong (Lf^*\mathcal{F}) \overset{L}{\otimes} (Lf^*\mathcal{G})$.

Лемма 43.13. *Пусть $f : X \to Y$ — морфизм схем. Тогда* (a) $Rf_* R\mathcal{H}om(Lf^*\mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, Rf_*\mathcal{G})$;
(b) (формула проекции) $Rf_*(Lf^*\mathcal{F} \overset{L}{\otimes} \mathcal{G}) \cong \mathcal{F} \overset{L}{\otimes} Rf_*\mathcal{G}$.

Доказательство. Докажем вначале (a). Заметим, что

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{H}, Rf_* R\mathcal{H}om(Lf^*\mathcal{F}, \mathcal{G})) \cong \mathrm{Hom}(Lf^*\mathcal{H}, R\mathcal{H}om(Lf^*\mathcal{F}, \mathcal{G})) \cong \mathrm{Hom}(Lf^*\mathcal{H} \overset{L}{\otimes} Lf^*\mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong$$
$$\cong \mathrm{Hom}(Lf^*(\mathcal{H} \overset{L}{\otimes} \mathcal{F}), \mathcal{G}) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{H} \overset{L}{\otimes} \mathcal{F}, Rf_*\mathcal{G}) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{H}, R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, Rf_*\mathcal{G})).$$

Значит наши функторы изоморфны.

Теперь проверим (b). Заметим, что

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F} \overset{L}{\otimes} Rf_*\mathcal{G}, Rf_*(Lf^*\mathcal{F} \overset{L}{\otimes} \mathcal{G})) \cong \mathrm{Hom}(Lf^*(\mathcal{F} \overset{L}{\otimes} Rf_*\mathcal{G}), Lf^*\mathcal{F} \overset{L}{\otimes} \mathcal{G}) \cong \mathrm{Hom}(Lf^*\mathcal{F} \overset{L}{\otimes} Lf^*Rf_*\mathcal{G}, Lf^*\mathcal{F} \overset{L}{\otimes} \mathcal{G}).$$

Поэтому морфизм сопряженности $Lf^*Rf_*\mathcal{G} \to \mathcal{G}$ индуцирует морфизм $\mathcal{F} \overset{L}{\otimes} Rf_*\mathcal{G} \to Rf_*(Lf^*\mathcal{F} \overset{L}{\otimes} \mathcal{G})$. Легко видеть, что он является изоморфизмом, если $\mathcal{F}$ — ограниченный сверху комплекс локально свободных пучков, а $\mathcal{G}$ — ограниченный снизу комплекс инъективных квазикогерентных пучков. Это дает искомый изоморфизм на $\mathcal{D}^-(\mathsf{QCoh}(Y)) \times \mathcal{D}^+(\mathsf{QCoh}(X))$ в силу обычной формулы проекции — $f_*(f^*\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) \cong \mathcal{F} \otimes f_*\mathcal{G}$, для локально свободных $\mathcal{F}$. Можно далее показать, что он продолжается до изоморфизма на всей неограниченной категории. $\square$

Упражнение 43.14. Покажите, что $R\mathcal{H}om(\mathcal{G}, \mathcal{H} \overset{L}{\otimes} \mathcal{F}) \cong R\mathcal{H}om(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \overset{L}{\otimes} \mathcal{F} \cong R\mathcal{H}om(\mathcal{G} \overset{L}{\otimes} \mathcal{F}^\vee, \mathcal{H})$, для всех $\mathcal{F} \in \mathcal{D}^{\mathsf{perf}}(X)$, где $\mathcal{F}^\vee = R\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$.

Гомологическая алгебра 11
03.12.2008

Каноническая фильтрация и t-структуры

Часть 44. Каноническая фильтрации

Для вычисления значения производного функтора на данном объекте триангулированной категории редко используют явные проективные или инъективные резольвенты. Как правило пользуются тем, что известна некоторая “фильтрация” этого объекта и значения производного функтора на “факторах” этой фильтрации. Правда обычное понятие фильтрации не имеет особого смысла в триангулированных категориях ввиду следующего обстоятельства.

Лемма 44.1. *Пусть $f : X \to Y$ — морфизм в триангулированной категории $\mathcal{T}$. Если f — мономорфизм, то f — вложение прямым слагаемым, а если f — эпиморфизм, то f — проекция на прямое слагаемое.*

Доказательство. Понятия мономорфизма и эпиморфизма имеют смысл, так как триангулированная категория аддитивна. Пусть f — мономорфизм. Значит функтор $Z \mapsto \operatorname{Ker}(\operatorname{Hom}(Z, X) \to \operatorname{Hom}(Z, Y))$ представим и представляется объектом 0. Иначе говоря, для любого Z морфизм $\operatorname{Hom}(Z, X) \to \operatorname{Hom}(Z, Y)$ — вложение. Достроим морфизм f до выделенного треугольника $Z \to X \to Y \to Z[1]$. Так как композиция $Z \to X \to Y$ равна нулю, то морфизм $Z \to X$ тоже равен нулю. Значит f — вложение прямым слагаемым. Случай эпиморфизма разбирается аналогично. $\square$

Фильтрацией на объекте X триангулированной категории $\mathcal{T}$ называется любая коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & F^{p+1}X \arrow[r] \arrow[d] & F^pX \arrow[r] \arrow[d] & F^{p-1}X \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, equal] & X \arrow[r, equal] & X \arrow[r, equal] & X \arrow[r, equal] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Фильтрация называется **конечной**, если при $p \gg 0$ морфизм $F^pX \to X$ — изоморфизм, а при $p \ll 0$ $F^pX = 0$. Конусы морфизмов $F^{p+1}X \to F^pX$ называются факторами фильтрации:

$$\operatorname{gr}^p_F X = C(F^{p+1}X \to F^pX).$$

Они определены с точностью до (неканонического) изоморфизма.

Есть два важных примера. Рассмотрим комплекс $X^\bullet$ в гомотопической категории $\operatorname{Hot}(\mathcal{A})$.

Глупой фильтрацией на $X^\bullet$ называется фильтрация $F^pX = \sigma_{\geqslant p}X$, где

$$(\sigma_{\geqslant p}X)^k = \begin{cases} X^k, & \text{если } k \geqslant p \\ 0, & \text{если } k < p \end{cases}$$

Канонической фильтрацией на $X^\bullet$ называется фильтрация $F^pX = \tau_{\leqslant -p}X$, где

$$(\tau_{\leqslant -p}X)^k = \begin{cases} X^k, & \text{если } k < -p \\ \operatorname{Ker} d^p_X, & \text{если } k = p \\ 0, & \text{если } k < p \end{cases}$$

Упражнение 44.2. Покажите, что $\operatorname{gr}^p_\sigma X \cong X^p$, $\operatorname{gr}^p_\tau X \cong H^p(X)$.

Обе приведенные фильтрации функториальны в гомотопической категории — всякий морфизм $f : X \to Y$ индуцирует морфизмы $\sigma_{\geqslant p}f : \sigma_{\geqslant p}X \to \sigma_{\geqslant p}Y$ и $\tau_{\leqslant -p}f : \tau_{\leqslant -p}X \to \tau_{\leqslant -p}Y$, коммутирующие со всеми морфизмами фильтрации. Однако, при попытке опустить эти филтрации на производную категорию, результат оказывается противоположным. В самом деле, приведенное упражнение показывает, что глупая фильтрация не опускается на производную категорию, так как у квазиизоморфных комплексов могут быть совершенно разные члены.

Лемма 44.3. *Если $s : X \to Y$ квазиизоморфизм, то $\tau_{\leqslant -p}s : \tau_{\leqslant -p}X \to \tau_{\leqslant -p}Y$ — квазиизоморфизмы.*

Доказательство. Рассмотрим коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd} \tau_{\leqslant -p}X \arrow[r, "\tau_{\leqslant -p}s"] \arrow[d] & \tau_{\leqslant -p}Y \arrow[d] \\ X \arrow[r, "s"] & Y \end{tikzcd}$$

Переходя к когомологиям, получаем коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd} H^k(\tau_{\leqslant -p}X) \arrow[r, "H^k(\tau_{\leqslant -p}s)"] \arrow[d] & H^k(\tau_{\leqslant -p}Y) \arrow[d] \\ H^k(X) \arrow[r, "H^k(s)"] & H^k(Y) \end{tikzcd}$$

Если $k \leqslant -p$, то вертикальные стрелки — изоморфизмы. Нижняя стрелка тоже изоморфизм. Значит и верхняя стрелка изоморфизм. С другой стороны, при $k > -p$ имеем $H^k(\tau_{\leqslant -p}X) = H^k(\tau_{\leqslant -p}Y) = 0$, поэтому верхняя стрелка изоморфизм и в этом случае. Значит $\tau_{\leqslant -p}s$ — квазиизоморфизм. □

Согласно универсальному свойству локализации, функторы $\tau_{\geqslant -p}$ опускаются на производную категорию. Значит для любого объекта X в $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ имеем каноническую фильтрацию $\tau_{\geqslant -p}X$, такую что $\mathsf{gr}^p_\tau X \cong H^p(X)$, причем функториальную.

Упражнение 44.4. Покажите, что существуют также функторы $\tau_{\geqslant q} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{A})$ и морфизмы функторов $\tau_{\leqslant q} \to \mathrm{id} \to \tau_{\geqslant g+1} \to [1] \circ \tau_{\leqslant q}$, такие что для любого X треугольник $\tau_{\leqslant q}X \to X \to \tau_{\geqslant q+1}X \to (\tau_{\leqslant q}X)[1]$ выделен.

Часть 45. Стандартная t-структура

Свойства функторов обрезания относительно канонической фильтрации аксиоматизируются понятием t-структуры. По определению, t-структура на триангулированной категории $\mathcal{T}$ — это пара строго полных (но не триангулированных!) подкатегорий $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$, удовлетворяющих следующим свойствам. Обозначим

$$\mathcal{T}^{\leqslant t} := \mathcal{T}^{\leqslant 0}[-t], \qquad \mathcal{T}^{\geqslant t} := \mathcal{T}^{\geqslant 0}[-t].$$

Тогда

(1) $\mathcal{T}^{\leqslant -1} \subset \mathcal{T}^{\leqslant 0}$, $\mathcal{T}^{\geqslant 1} \subset \mathcal{T}^{\geqslant 0}$;
(2) $\mathrm{Hom}(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 1}) = 0$;
(3) для любого объекта $X \in \mathcal{T}$ существует выделенный треугольник $X_{\leqslant 0} \to X \to X_{\geqslant 1} \to X_{\leqslant 0}[1]$, такой что $X_{\leqslant 0} \in \mathcal{T}^{\leqslant 0}$, а $X_{\geqslant 1} \in \mathcal{T}^{\geqslant 1}$.

t-структура $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ называется невырожденной, если $\bigcap_{t=-\infty}^{\infty} \mathcal{T}^{\leqslant t} = \bigcap_{t=-\infty}^{\infty} \mathcal{T}^{\geqslant t} = 0$.

Если $\mathcal{T} = \mathcal{D}(\mathcal{A})$ — производная категория, на ней существует t-структура, называемая стандартной.

Лемма 45.1. *Положим*

$$\mathcal{D}^{\leqslant 0}(\mathcal{A}) := \{\, X \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \mid H^p(X) = 0 \forall p > 0 \,\}, \qquad \mathcal{D}^{\geqslant 0}(\mathcal{A}) := \{\, X \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \mid H^p(X) = 0 \forall p < 0 \,\}.$$

Тогда $(\mathcal{D}^{\leqslant 0}(\mathcal{A}), \mathcal{D}^{\geqslant 0}(\mathcal{A}))$ *— невырожденная t-структура.*

Доказательство. Свойство (1) очевидно, а свойство (3) следует из упражнений. Остается проверить свойство (2). Пусть $X \in \mathcal{D}^{\leqslant 0}(\mathcal{A})$, $Y \in \mathcal{D}^{\geqslant 1}(\mathcal{A})$. Меняя X на квазиизоморфный ему комплекс $\tau_{\leqslant 0}X$ можно считать, что члены комплекса X равны нулю в положительных степенях. По определению $\mathrm{Hom}(X, Y)$ — множество классов эквивалентности левых дробей $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{s} Y$, где s — квазиизоморфизм. Так как $Y \in \mathcal{D}^{\geqslant 1}(\mathcal{A})$, то и $Z \in \mathcal{D}^{\geqslant 1}(\mathcal{A})$, поэтому морфизм $Z \to \tau_{\geqslant 1}Z$ — квазиизоморфизм, поэтому всякая такая дробь эквивалентна дроби $X \to \tau_{\geqslant 1}Z \leftarrow Y$. Но у комплекса $\tau_{\geqslant 1}Z$ все члены в неположительных степенях равны нулю, а у комплекса X — все члены в положительных степенях равны нулю, поэтому в гомотопической категории

$\mathrm{Hom}(X, \tau_{\geqslant 1} Z) = 0$. Значит всякая дробь эквивалентна нулю. Таким образом, перед нами t-структура. Ее невырожденность очевидна — указанное пересечение состоит из ацикличных комплексов, а они в производной категории равны нулю. $\square$

Лемма 45.2. *Для любых объектов $X, Y \in \mathcal{A}$ имеем*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(X, Y[t]) \cong \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0 \\ \mathrm{Ext}^t_I(X, Y), & \text{если } t \geqslant 0 \end{cases}$$

В частности, функтор вложения $\mathcal{A} \to \mathcal{D}(\mathcal{A})$ — строго полный. Более того, он индуцирует эквивалентность $\mathcal{A}$ и подкатегории $\mathcal{D}^0(\mathcal{A}) := \mathcal{D}^{\leqslant 0}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{D}^{\geqslant 0}(\mathcal{A})$.

Доказательство. Если $t < 0$, то зануление морфизмов доказано в предыдущей лемме. Пусть $t > 0$. Заменяя в левой дроби $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{s} Y[t]$, представляющей морфизм $X \to Y[t]$ объект Z на $\tau_{\geqslant -t} Z$, можно считать, что комплекс Z сосредоточен в степенях $\geqslant -t$. Конус морфизма s — это комплекс $0 \to Y \to Z^{-t} \to Z^{1-t} \to \dots$. Так как s — квазиизоморфизм, он ацикличен. В частности, морфизм $Y \to Z^{-t}$ — вложение, а комплекс $0 \to Y \to Z^{-t} \to \dots \to Z^{-1} \to \mathrm{Ker}\, d^0_Z \to 0$ — точная последовательность, задающая класс $\epsilon_s \in \mathrm{Ext}^t_I(\mathrm{Ker}\, d^0_Z, Y)$. Морфизм $f : X \to Z$ задается морфизмом $X \to \mathrm{Ker}\, d^0_Z$, компонируя который с ϵ_s получаем класс $\epsilon_s \circ f \in \mathrm{Ext}^t_I(X, Y)$.

Обратно, рассмотрим расширение $0 \to Y \to Z^{-t} \to \dots \to Z^{-1} \to X \to 0$. Положим $Z^0 = X$, тогда $Z^\bullet$ — комплекс, вложение $Y \to Z^{-t}$ индуцирует квазиизоморфизм $s : Y[t] \to Z$, а изоморфизм $X \to Z^0$ — морфизм $X \to Z$. В итоге получаем левую дробь $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{s} Y[t]$.

Покажем, что тем самым мы построили взаимно обратные отображения между $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(X, Y[t])$ и $\mathrm{Ext}^t_I(X, Y)$. Во-первых, надо проверить корректность. Пусть $t : Z \to V$ — квазиизоморфизм комплексов, сосредоточенных в степенях $\geqslant -t$. Легко видеть, что он индуцирует элементарную эквивалентность соответствующих расширений. Обратно, элементарная эквивалентность расширений очевидно дает эквивалентность соответствующих левых дробей.

Осталось проверить взаимную обратность построенных отображений. Тождественность одной из композиций очевидна — если мы начнем с расширения, построим по нему левую дробь, а затем по ней расширение — получим то же, с чего и начали. Обратно, если мы начнем с левой дроби, построим по ней расширение, а затем левую дробь, то в результате комплекс Z заменится на квазиизомрфный ему комплекс Z', причем морфизмы $s : Y[t] \to Z$ и $f : X \to Z$ пропустятся через Z'. Поэтому полученная левая дробь будет эквивалентна исходной.

Пусть, наконец, $t = 0$. Всякий морфизм $X \to Y$ представляется в виде левой дроби $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{s} Y$, где комплекс Z сосредоточен в неотрицательных степенях. Конус морфизма s — это комплекс $0 \to Y \to Z^0 \to Z^1 \to \dots$. Так как s — квазиизоморфизм, он ацикличен. Поэтому последовательность $0 \to \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(X, Z^0) \to \mathrm{Hom}(X, Z^1)$ точна слева. Но это в точности означает, что любой морфизм из X в $C(s)$ и в $C(s)[-1]$ гомотопен нулю! Из выделенного в $\mathrm{Hot}(\mathcal{A})$ треугольника $C(s)[-1] \to Y \to Z \to C(s)$ получаем изоморфизм $\mathrm{Hom}(X, Y) \cong \mathrm{Hom}(X, Z)$. Это доказывает то, что функтор $\mathcal{A} \to \mathcal{D}(\mathcal{A})$ строго полон.

Остается проверить, что категория $\mathcal{D}^0(\mathcal{A})$ является существенным образом категории $\mathcal{A}$. В самом деле, образ $\mathcal{A}$ очевидно лежит в $\mathcal{D}^0(\mathcal{A})$. С другой стороны, если $X \in \mathcal{D}^0(\mathcal{A})$, то морфизмы $X \to \tau_{\geqslant 0} X$ и $\tau_{\leqslant 0}\tau_{\geqslant 0} X$ — квазиизоморфизмы, а $\tau_{\leqslant 0}\tau_{\geqslant 0} X$ — комплекс, сосредоточенный в степени 0, то есть лежащий в образе функтора. Значит всякий объект в $\mathcal{D}^0(\mathcal{A})$ изоморфен объекту в $\mathcal{A}$. $\square$

Упражнение 45.3. Пусть $X, Y \in \mathcal{A}$. Покажите, что функтор $E^i(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(X, Y[i])$ является δ-функтором по обоим аргументам. При этом если в $\mathcal{A}$ достаточно много проективных объектов, то он стирающий по первому аргументу, а если достаточно много инъективных, то по второму.

Ясно, что стандартная t-структура индуцирует t-структуры и на ограниченных вариантах производной категории. Все они тоже называются стандартными.

Пусть $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ — t-структура. Обозначим $\mathcal{T}^{[a,b]} := \mathcal{T}^{\geqslant a} \cap \mathcal{T}^{\leqslant b}$. t-структура называется ограниченной, если $\mathcal{T} = \bigcup_{a \leqslant b} \mathcal{T}^{[a,b]}$.

Упражнение 45.4. Покажите, что стандартная t-структура на $\mathcal{D}^*(\mathcal{A})$ ограничена $\iff * = b$.

Часть 46. Свойства t-структур

Как видно из определения, понятие t-структуры очень похоже на понятие полуортогонального разложения. Отличие в том, что в полуортогональном разложении подкатегории должны быть инвариантными относительно всех сдвигов, а не только относительно положительных или отрицательных.

Лемма 46.1. *Если $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ — t-структура на триангулированной категории $\mathcal{T}$, то существуют функторы $\tau_{\leqslant t} : \mathcal{T} \to \mathcal{T}^{\leqslant t}$, $\tau_{\geqslant t} : \mathcal{T} \to \mathcal{T}^{\geqslant t}$, и морфизмы функторов $\tau_{\leqslant t} \to \mathrm{id} \to \tau_{\geqslant t+1} \to [1] \circ \tau_{\leqslant t}$, такие что для любого X треугольник $\tau_{\leqslant t} X \to X \to \tau_{\geqslant t+1} X \to (\tau_{\leqslant t} X)[1]$ выделен.*

Доказательство. Рассмотрим вначале случай $t = 0$. Для всяких $X, Y \in \mathcal{T}$ по свойству (3) определения t-структуры найдутся выделенные треугольники $X_{\leqslant 0} \to X \to X_{\geqslant 1} \to X_{\leqslant 0}[1]$ и $Y_{\leqslant 0} \to Y \to Y_{\geqslant 1} \to Y_{\leqslant 0}[1]$ в которых $X_{\leqslant 0}, Y_{\leqslant 0} \in \mathcal{T}^{\leqslant 0}$, а $X_{\geqslant 1}, Y_{\geqslant 1} \in \mathcal{T}^{\geqslant 1}$. Заметим, что $\mathrm{Hom}(X_{\leqslant 0}, Y_{\geqslant 1}) = 0$ по свойству (2), поэтому для любого морфизма $f : X \to Y$ найдутся морфизмы $f_{\leqslant 0} : X_{\leqslant 0} \to Y_{\leqslant 0}$ и $f_{\geqslant 1} : X_{\geqslant 1} \to Y_{\geqslant 1}$, образующие морфизм треугольников. Более того, $\mathrm{Hom}(X_{\leqslant 0}, Y_{\geqslant 1}[-1]) = 0$ по свойству (2), так как $Y_{\geqslant 1}[1] \in \mathcal{T}^{\geqslant 2} \subset \mathcal{T}^{\geqslant 1}$ по свойству (1), а $X_{\leqslant 0} \in \mathcal{T}^{\leqslant 0}$. Поэтому такие морфизмы однозначно определены. Следовательно, сопоставление $X \mapsto X_{\leqslant 0}$, $f \mapsto f_{\leqslant 0}$ является функтором $\mathcal{T} \to \mathcal{T}^{\leqslant 0}$ (обозначим его $\tau_{\leqslant 0}$), а сопоставление $X \mapsto X_{\geqslant 1}$, $f \mapsto f_{\leqslant 1}$ является функтором $\mathcal{T} \to \mathcal{T}^{\geqslant 0}$ (обозначим его $\tau_{\geqslant 0}$). При этом морфизмы в треугольниках задают искомые морфизмы функторов. Остается заметить, что положив $\tau_{\leqslant t} := [-t] \circ \tau_{\leqslant 0} \circ [t]$, $\tau_{\geqslant t+1} := [-t] \circ \tau_{\geqslant 1} \circ [t]$, получим остальные функторы. □

Упражнение 46.2. Пусть $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ — t-структура. Покажите, что (a) $\mathcal{T}^{\leqslant 0}[1] \subset \mathcal{T}^{\leqslant 0}$, а $\mathcal{T}^{\geqslant 0}[-1] \subset \mathcal{T}^{\geqslant 0}$;
(b) $\mathcal{T}^{\leqslant 0}$ и $\mathcal{T}^{\geqslant 0}$ замкнуты относительно расширений (подкатегория $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}$ замкнута относительно расширений, если для любого выделенного треугольника $X \to Y \to Z \to X[1]$ с $X, Z \in \mathcal{C}$ выполнено $Y \in \mathcal{C}$);
(c) функтор $\tau_{\leqslant 0}$ сопряжен справа к функтору вложения $\mathcal{T}^{\leqslant 0} \to \mathcal{T}$, а функтор $\tau_{\geqslant 0}$ сопряжен слева к функтору вложения $\mathcal{T}^{\geqslant 0} \to \mathcal{T}$.

Упражнение 46.3. Пусть $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ — t-структура. Покажите, что
(a) $\tau_{\leqslant p} \circ [q] \cong [q] \circ \tau_{\leqslant p+q}$, $\tau_{\geqslant p} \circ [q] \cong [q] \circ \tau_{\geqslant p+q}$;
(b) морфизм функторов $\tau_{\leqslant p} \to \mathrm{id}$ при ограничении на $\mathcal{T}^{\leqslant p}$ становится изоморфизмом.

Всякая t-структура однозначно восстанавливается по любой из подкатегорий $\mathcal{T}^{\leqslant 0}$ или $\mathcal{T}^{\geqslant 0}$.

Лемма 46.4. *Пусть $\mathcal{T}^{\leqslant 0} \subset \mathcal{T}$ — полная подкатегория, такая что*

- *$\mathcal{T}^{\leqslant 0}[1] \subset \mathcal{T}^{\leqslant 0}$;*
- *$\mathcal{T}^{\leqslant 0}$ замкнута относительно расширений;*
- *функтор вложения $\mathcal{T}^{\leqslant 0} \to \mathcal{T}$ допускает правый сопряженный.*

Тогда существует t-структура $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ на $\mathcal{T}$ с $\mathcal{T}^{\geqslant 1} = (\mathcal{T}^{\leqslant 0})^{\perp}$.

Доказательство. Определим $\mathcal{T}^{\geqslant 0}$ как $(\mathcal{T}^{\leqslant 0})^{\perp}[1]$. Тогда свойство (1) для категории $\mathcal{T}^{\leqslant 0}$ очевидно. Проверим его для категории $\mathcal{T}^{\geqslant 0}$. Пусть $Y \in \mathcal{T}^{\geqslant 1}$. Надо проверить, что $Y \in \mathcal{T}^{\geqslant 0}$, то есть что $Y[-1] \in \mathcal{T}^{\geqslant 1}$, то есть что $\mathrm{Hom}(X, Y[-1]) = 0$ для всех $X \in \mathcal{T}^{\leqslant 0}$. Но ясно, что $\mathrm{Hom}(X, Y[-1]) = \mathrm{Hom}(X[1], Y) = 0$, так как $X[1] \in \mathcal{T}^{\leqslant 0}[1] = \mathcal{T}^{\leqslant -1} \subset \mathcal{T}^{\leqslant 0}$, а $Y \in \mathcal{T}^{\geqslant 1}$. Далее, свойство (2) выполнено по определению категории $\mathcal{T}^{\geqslant 1}$. Остается проверить (3). Обозначим функтор вложения $\mathcal{T}^{\leqslant 0} \to \mathcal{T}$ через i, а его правый сопряженный через $i^!$. Тогда для всякого X имеем естественный морфизм $ii^! X \to X$. Заметим сразу, что из сопряженности следует, что если $Y \in \mathcal{T}^{\leqslant 0}$, то любой морфизм $Y \to X$ единственным образом поднимается до морфизма $Y \to ii^! X$.

Дополним теперь морфизм $ii^! X \to X$ до выделенного треугольника $ii^! X \to X \to X' \to ii^! X[1]$. Покажем, что $X' \in \mathcal{T}^{\geqslant 1}$. Для этого возьмем произвольный $Y \in \mathcal{T}^{\leqslant 0}$ и произвольный морфизм $f : Y \to X'$. Дополним композицию $Y \to X' \to ii^! X[1]$ до морфизма выделенных треугольников

$$\begin{tikzcd}
ii^! X \arrow[r] \arrow[d, equal] & \tilde{Y} \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{f}"] \arrow[dl, dashed, "\hat{f}"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "f"] & ii^! X[1] \arrow[d, equal] \\
ii^! X \arrow[r] & X \arrow[r] & X' \arrow[r] & ii^! X[1]
\end{tikzcd}$$

Так как $\mathcal{T}^{\leqslant 0}$ замкнута относительно расширений, $\tilde{Y} \in \mathcal{T}^{\leqslant 0}$. Следовательно, морфизм $\tilde{f} : \tilde{Y} \to X$ поднимается до морфизма $\hat{f} : \tilde{Y} \to ii^! X$. А из единственности поднятия, следует коммутативность левого верхнего треугольника в диаграмме. Из нее же следует, что морфизм $ii^! X \to \tilde{Y}$ — вложение прямого слагаемого, а значит морфизм $Y \to ii^! X$ равен нулю. Но это в свою очередь означает, что f поднимается до морфизма $Y \to X$, который в свою очередь поднимается до морфизма $Y \to ii^! X$. Значит f пропускается через композицию $ii^! X \to X \to X'$, а значит равен нулю. □

Замечательным наблюдением является следующая

Теорема 46.5. *Пусть $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ — невырожденная t-структура на триангулированной категории $\mathcal{T}$. Тогда категория $\mathcal{T}^0 = \mathcal{T}^{\leqslant 0} \cap \mathcal{T}^{\geqslant 0}$ — абелева.*

Доказательство. Прямая сумма объектов является их расширением, а категории $\mathcal{T}^{\leqslant 0}$ и $\mathcal{T}^{\geqslant 0}$ замкнуты относительно расширений. Значит $\mathcal{T}^0$ тоже замкнута относительно расширений, и в частности относительно прямых сумм. Следовательно, $\mathcal{T}^0$ — аддитивная подкатегория в $\mathcal{T}$.

Проверим существование ядер и коядер в $\mathcal{T}^0$. Пусть $X, Y \in \mathcal{T}^0$, а $f : X \to Y$ — морфизм. Дополним его до выделенного треугольника

$$U \xrightarrow{u} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{v} U[1].$$

Заметим, что $U \in \mathcal{T}^{[0,1]}$. В самом деле, $X, Y[-1] \in \mathcal{T}^{[0,1]}$, а $\mathcal{T}^{[0,1]} = \mathcal{T}^{\geqslant 0} \cap \mathcal{T}^{\leqslant 1}$ замкнута относительно расширений. Пусть $K = \tau_{\leqslant 0} U$, $C = \tau_{\geqslant 0}(U[1]) = (\tau_{\geqslant 1} U)[1]$ и рассмотрим композиции $K \to U \to X$ и $Y \to U[1] \to C$. Покажем, что они являются ядром и коядром f соответственно. В самом деле, пусть $Z \in \mathcal{T}^0$ и $g : Z \to X$ — такой морфизм, что $f \circ g = 0$:

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, dashed, "g'"'] \arrow[d, "g"] & & \\
U \arrow[r, "u"] & X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "v"] & U[1]
\end{tikzcd}$$

Тогда существует $g' : Z \to U$, такой что $u \circ g' = g$. При этом $\mathrm{Hom}(Z, Y[-1]) = 0$, так как $Z \in \mathcal{T}^0 \subset \mathcal{T}^{\leqslant 0}$, а $Y[-1] \in \mathcal{T}^0[-1] \subset \mathcal{T}^{\geqslant 0}[-1] = \mathcal{T}^{\geqslant 1}$. Поэтому такой морфизм g' единственен. Наконец, так как $Z \in \mathcal{T}^0$ морфизм $g' : Z \to U$ единственным образом поднимается до морфизма $g'' : Z \to \tau_{\leqslant 0} U = K$. Таким образом, универсальное свойство ядра выполнено. Так же проверяется универсальное свойство коядра.

Остается проверить, что коядро ядра равно ядру коядра. Для этого построим диаграмму октаэдра

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r] \arrow[d, equal] & U \arrow[r] \arrow[d] & C[-1] \arrow[r] \arrow[d] & K[1] \arrow[d, equal] \\
K \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[r] \arrow[d] & K[1] \arrow[d] \\
 & Y \arrow[r, equal] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & U[1] \\
 & U[1] \arrow[r] & C &
\end{tikzcd}$$

Так как $X \in \mathcal{T}^0$, а $K[1] \in \mathcal{T}^{-1}$, из второй строчки следует, что $V \in \mathcal{T}^{[-1,0]}$. С другой стороны, $C[-1] \in \mathcal{T}^1$, $Y \in \mathcal{T}^0$ значит $V \in \mathcal{T}[0,1]$. Сравнивая, получаем, что $V \in \mathcal{T}^{[-1,0]} \cap \mathcal{T}^{[0,1]} \subset \mathcal{T}^{\leqslant 0} \cap \mathcal{T}^{\geqslant 0} = \mathcal{T}^0$. Остается заметить, что коядро ядра — это $\tau_{\geqslant 0} V \cong V$, а ядро коядра — $\tau_{\leqslant 0} V \cong V$, так что и коядро ядра и ядро коядра совпадают с V. □

Абелева категория $\mathcal{T}^0$ называется сердцевиной t-структуры $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$. Ясно, что сердцевина стандартной t-структуры на $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ совпадает с $\mathcal{A}$.

Упражнение 46.6. Покажите, что аддитивная подкатегория $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ является сердцевиной ограниченной t-структуры на $\mathcal{T} \iff \mathrm{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{A}[-t]) = 0$ для $t > 0$, и для любого объекта $X \in \mathcal{T}$ существует конечная фильтрация $F^\bullet X$, такая что $\mathsf{gr}^p_F(X) \in \mathcal{A}[p]$ для всех p.

Если $\mathcal{T} = \mathcal{D}(\mathcal{A})$, то помимо стандартной t-структуры на X существует и множество других. Например, на множестве всех t-структур действует группа автоэквивалентностей.

Упражнение 46.7. Опишите все t-структуры в $\mathcal{D}^b(\mathsf{k}-\mathsf{mod})$.

Бывают и более экзотические примеры.

Упражнение 46.8. Пусть $\mathcal{T} = \mathcal{D}(\mathbb{Z}\text{–}\mathsf{mod})$ — производная категория конечно порожденных абелевых групп. Пусть

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{\leqslant 0} &= \{ X \in \mathcal{D}(\mathbb{Z}-\mathsf{mod}) \mid H^t(X) = 0 \text{ при } t > 0, \text{ а } H^0(X) \text{ — группа кручения} \} \\ \mathcal{T}^{\geqslant 1} &= \{ X \in \mathcal{D}(\mathbb{Z}-\mathsf{mod}) \mid H^t(X) = 0 \text{ при } t < 0, \text{ а } H^0(X) \text{ — группа без кручения} \} \end{aligned}$$

Покажите, что $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ — невырожденаая t-структура.

Лемма 46.9. *Пусть $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ — t-структура. Если $X, Y \in \mathcal{T}^0$, то $\mathrm{Hom}(X, Y[1]) \cong \mathrm{Ext}^1_I(X, Y)$.*

Доказательство. Пусть $f : X \to Y[1]$ — морфизм. Достроим его до выделенного треугольника $Y \to Z \to X \to Y[1]$. Тогда $Z \in \mathcal{T}^0$, а последовательность $0 \to Y \to Z \to X \to 0$ в $\mathcal{T}^0$ точна. Таким образом, получаем класс в $\mathrm{Ext}^1_I(X, Y)$.

Обратно, пусть $0 \to Y \to Z \to X \to 0$ — точная тройка в $\mathcal{T}^0$. Достроим морфизм $Y \to Z$ в $\mathcal{T}$ до выделенного треугольника $Y \to Z \to X' \to Y[1]$. Так как $Y \to Z$ — вложение в $\mathcal{T}^0$, то X' есть коядро этого морфизма, то есть $X' \cong X$. Тем самым получаем морфизм $X \cong X' \to Y[1]$. Построенные отображения очевидно взаимно обратны. □

По аналогии часто используется обозначение $\mathrm{Ext}^i(X, Y) := \mathrm{Hom}(X, Y[i])$. В отличии от случая $i = 1$, для $i > 1$ он не обязан являться изоморфизмом.

Естественный вопрос — насколько отличается производная категория от сердцевины t-структуры от исходной триангулированной категории. Наиболее сложный вопрос здесь — построение функтора $\mathcal{D}(\mathcal{T}^0) \to \mathcal{T}$, тождественного на подкатегории $\mathcal{T}^0$. В общей ситуации такой функтор построить невозможно (ввиду нефункториальности конуса). Чтобы это сделать, нужно иметь дополнительную структуру на категории $\mathcal{T}$. Здесь есть разные варианты, наиболее распространенный — структура f-категории (аксиоматизация фильтрованной производной категории). После того, как функтор построен остается следующее условие — надо чтобы морфизм $\mathrm{Ext}^i_I(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y[i])$, индуцированный этим функтором, был изоморфизмом. Это условие, на самом деле эквивалентно такому: всякий морфизм $X \to Y[i]$ в категории $\mathcal{T}$, где $X, Y \in \mathcal{T}^0$ раскладывался в композицию $X \to X_1[1] \to X_2[2] \to \cdots \to X_{i-1}[i-1] \to Y[i]$, где $X_1, X_2, \ldots, X_{i-1} \in \mathcal{T}^0$ (иначе говоря $\mathrm{Ext}^\bullet$ в категории $\mathcal{T}$ порождается Ext^1).

Часть 47. Когомологии относительно t-структуры

Лемма 47.1. *Пусть $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ — t-структура. Тогда для всех $a \leqslant b$ существует канонические изоморфизмы функторов $\tau_{\leqslant a}\tau_{\leqslant b} \cong \tau_{\leqslant b}\tau_{\leqslant a} \cong \tau_{\leqslant a}$ и $\tau_{\geqslant a}\tau_{\geqslant b} \cong \tau_{\geqslant b}\tau_{\geqslant a} \cong \tau_{\geqslant b}$.*

Доказательство. Функтор вложения $\mathcal{T}^{\leqslant a} \to \mathcal{T}$ раскладывается в композицию $\mathcal{T}^{\leqslant a} \to \mathcal{T}^{\leqslant b} \to \mathcal{T}$. Поэтому его сопряженный функтор $\tau_{\leqslant a}$ раскладывается в композицию $\tau_{\leqslant a}\tau_{\leqslant b}$. С другой стороны, так как функтор $\tau_{\leqslant b}$ тождественен на $\mathcal{T}^{\leqslant b}$, а образ $\tau_{\leqslant a}$ лежит в $\mathcal{T}^{\leqslant a} \subset \mathcal{T}^{\leqslant b}$, получаем второй изоморфизм. □

Лемма 47.2. *Пусть $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ — t-структура. Тогда для всех $a \leqslant b$ существует канонический изоморфизм функторов $\tau_{\leqslant b}\tau_{\geqslant a} \cong \tau_{\geqslant a}\tau_{\leqslant b}$.*

Доказательство. Пользуясь изоморфизмом $\tau_{\leqslant a-1}\tau_{\leqslant b}\cong\tau_{\leqslant a-1}$ построим диаграмму октаэдра

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leqslant a-1}X \arrow[r] \arrow[d, equal] & \tau_{\leqslant b}X \arrow[r] \arrow[d] & \tau_{\geqslant a}\tau_{\leqslant b}X \arrow[r] \arrow[d] & \tau_{\leqslant a-1}X[1] \arrow[d, equal] \\
\tau_{\leqslant a-1}X \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & \tau_{\geqslant a}X \arrow[r] \arrow[d] & \tau_{\leqslant a-1}X[1] \\
& \tau_{\geqslant b+1}X \arrow[r, equal] \arrow[d] & \tau_{\geqslant b+1}X \arrow[d] & \\
& \tau_{\leqslant b}X[1] \arrow[r] & \tau_{\geqslant a}\tau_{\leqslant b}X[1] &
\end{tikzcd}$$

Из верхней строчки следует, что $\tau_{\geqslant a}\tau_{\leqslant b}X\subset\mathcal{T}^{\geqslant b}$. При этом $\tau_{\geqslant b+1}X\in\mathcal{T}^{\geqslant b+1}$. Поэтому третий столбец является разложением объекта $\tau_{\geqslant a}X$ относительно пары $(\mathcal{T}^{\leqslant b},\mathcal{T}^{\geqslant b+1})$. Так как такое разложение единственно, получаем изоморфизм $\tau_{\geqslant a}\tau_{\leqslant b}X\cong\tau_{\leqslant b}\tau_{\geqslant a}$, функториальность которого легко проверяется. □

Рассмотрим случай $a=b$ и определим **функтор когомологий относительно t-структуры** формулой

$$H^a(X)=(\tau_{\leqslant a}\tau_{\geqslant a}X)[a].$$

Упражнение 47.3. Покажите, что для стандартной t-структуры функторы H^a являются обычными функторами когомологий.

Упражнение 47.4. Покажите, что если $X\in\mathcal{T}^{\leqslant p}$, $Y\in\mathcal{T}^{\geqslant p}$, то всякий морфизм $X\to Y$ единственным образом представляется в виде композиции

$$X=\tau_{\leqslant p}X\to\tau_{\geqslant p}\tau_{\leqslant p}X=H^p(X)[-p]\to H^p(Y)[-p]=\tau_{\leqslant p}\tau_{\geqslant p}Y\to\tau_{\geqslant p}Y=Y.$$

В частности $\operatorname{Hom}(X,Y)=\operatorname{Hom}(H^p(X),H^p(Y))$.

Лемма 47.5. *Пусть $(\mathcal{T}^{\leqslant 0},\mathcal{T}^{\geqslant 0})$ — t-структура. Тогда выполнен изоморфизм $H^{p+q}(X)\cong H^p(X[q])$. Кроме того, если $X\to Y\to Z\to X[1]$ — выделенный треугольник, то*

$$\dots\to H^p(X)\to H^p(Y)\to H^p(Z)\to H^{p+1}(X)\to\dots$$

— длинная точная последовательность.

Доказательство. Изоморфизм легко следует из упражнения 46.3:

$$H^p(X[q])=(\tau_{\leqslant p}\tau_{\geqslant p}(X[q]))[p]\cong(\tau_{\leqslant p+q}\tau_{\geqslant p+q}X)[p+q]=H^{p+q}(X).$$

Установим теперь точность последовательности когомологий. Прокручивая треугольник, можно все свести к точности последовательности $H^0(X)\to H^0(Y)\to H^0(Z)$ в среднем члене. Вначале проверим следующий факт — если $X\in\mathcal{T}^{\leqslant 0}$, то треугольник $\tau_{\leqslant 0}X\to\tau_{\leqslant 0}Y\to\tau_{\leqslant 0}Z\to(\tau_{\leqslant 0}X)[1]$ выделен, а последовательность $H^0(X)\to H^0(Y)\to H^0(Z)\to 0$ точна справа. В самом деле, построим диаграмму октаэдра

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leqslant 0}X \arrow[r] \arrow[d, equal] & \tau_{\leqslant 0}Y \arrow[r] \arrow[d] & U \arrow[r] \arrow[d] & (\tau_{\leqslant 0}X)[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & X[1] \\
& \tau_{\geqslant 1}Y \arrow[r, equal] \arrow[d] & \tau_{\geqslant 1}Y \arrow[d] & \\
& (\tau_{\leqslant 0}Y)[1] \arrow[r] & U[1] &
\end{tikzcd}$$

Из верхней строки видно, что $U\in\mathcal{T}^{\leqslant 0}$. При этом $\tau_{\geqslant 1}Y\in\mathcal{T}^{\geqslant 1}$. Поэтому из третьего столбца следует, что $\tau_{\geqslant 1}Y\cong\tau_{\geqslant 1}Z$, $U\cong\tau_{\leqslant 0}Z$. В частности, верхняя строка дает нужный треугольник. Возьмем теперь произвольный $V\in\mathcal{T}^0$ и применим к треугольнику функтор $\operatorname{Hom}(-,V)$. Получим точную последовательность

$$\operatorname{Hom}((\tau_{\leqslant 0}X)[1],V)\to\operatorname{Hom}(\tau_{\leqslant 0}Z,V)\to\operatorname{Hom}(\tau_{\leqslant 0}Y,V)\to\operatorname{Hom}(\tau_{\leqslant 0}X,V).$$

Заметим теперь, что $\mathrm{Hom}((\tau_{\leqslant 0}X)[1], V) = 0$, так как $(\tau_{\leqslant 0}X)[1] \in \mathcal{T}^{\leqslant -1}$, а $V \in \mathcal{T}^{\geqslant 0}$. Кроме того, из упражнения 47.4 следует, что $\mathrm{Hom}(\tau_{\leqslant 0}X, V) = \mathrm{Hom}(H^0(\tau_{\leqslant 0}X), H^0(V)) = \mathrm{Hom}(H^0(X), V)$ и аналогично с заменой X на Y и Z. Поэтому получаем точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(H^0(Z), V) \to \mathrm{Hom}(H^0(Y), V) \to \mathrm{Hom}(H^0(X), V).$$

Так как V произвольно, отсюда следует точность справа последовательности $H^0(X) \to H^0(Y) \to H^0(Z) \to 0$.

Аналогично проверяется, что если $Z \in \mathcal{T}^{\geqslant 0}$, то треугольник $\tau_{\geqslant 0}X \to \tau_{\geqslant 0}Y \to \tau_{\geqslant 0}Z \to (\tau_{\geqslant 0}X)[1]$ выделен, а последовательность $0 \to H^0(X) \to H^0(Y) \to H^0(Z)$ точна слева.

Построим теперь такую диаграмму октаэдра

$$\begin{tikzcd}
\tau_{\leqslant 0}X \arrow[r] \arrow[d, equal] & X \arrow[r] \arrow[d] & \tau_{\geqslant 1}X \arrow[r] \arrow[d] & (\tau_{\leqslant 0}X)[1] \arrow[d, equal] \\
\tau_{\leqslant 0}X \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d] & (\tau_{\leqslant 0}X)[1] \\
& Z \arrow[r, equal] \arrow[d] & Z \arrow[d] & \\
& X[1] \arrow[r] & (\tau_{\geqslant 1}X)[1] &
\end{tikzcd}$$

Так как $\tau_{\leqslant 0}X \in \mathcal{T}^{\leqslant 0}$ и $H^0(\tau_{\leqslant 0}X) = H^0(X)$ из второй строчки получаем точную последовательность $H^0(X) \to H^0(Y) \to H^0(W) \to 0$. Так как $(\tau_{\geqslant 1}X)[1] \in \mathcal{T}^{\geqslant 0}$ и $H^0((\tau_{\geqslant 1}X)[1]) = H^1(X)$ из третьего столбца получаем точную последовательность $0 \to H^0(W) \to H^0(Z) \to H^1(X)$. Склеивая их, получаем точную последовательность $H^0(X) \to H^0(Y) \to H^0(Z) \to H^1(X)$. $\square$

Упражнение 47.6. Пусть $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ — невырожденаая t-структура. Покажите, что
(a) $X = 0 \iff \forall p\ H^p(X) = 0$; (b) морфизм $f : X \to Y$ — изофморфизм $\iff \forall p\ H^p(f)$ — изоморфизм.

Функтор $H : \mathcal{T} \to \mathcal{A}$ из триангулированной категории в абелеву называется когомологическим, если для всякого выделенного треугольника $X \to Y \to Z \to X[1]$ последовательность $\dots \to H^p(X) \to H^p(Y) \to H^p(Z) \to H^{p+1}(X) \to \dots$ точна. Предыдущую лемму можно переформулировать как утверждение о том, что функтор когомологий относительно t-структуры — когомологический. Другой пример когомологического функтора — функтор $\mathrm{Hom}(U, -)$.

Упражнение 47.7. Покажите, что композиция когомологического и точного функтора — когомологический функтор.

Пусть $(\mathcal{T}^{\leqslant 0}, \mathcal{T}^{\geqslant 0})$ — невырожденаая t-структура, а H^i — соответствующие функторы когомологий. Естественный вопрос — насколько объект $X \in \mathcal{T}$ определяется своими когомологиями $H^i(X)$. Если X имеет только одну нетривиальную когомологию $H^i(X)$, то он очевидно изоморфен $H^i(X)[-i]$.

Лемма 47.8. *Если X имеет ровно две нетривиальных когомологии $H^i(X)$ и $H^j(X)$ в степенях $i < j$, то X однозначно определяется морфизмом $H^j(X) \to H^i(X)[j - i + 1]$.*

Доказательство. Рассмотрим треугольник $\tau_{\leqslant i}X \to X \to \tau_{\geqslant i+1}X \to \tau_{\leqslant i}X[1]$. Так как $\tau_{\leqslant i}X$ и $\tau_{\geqslant i+1}X$ имеют только одну когомологию, то $\tau_{\leqslant i}X \cong H^i(X)[-i]$, $\tau_{\geqslant i+1}X \cong H^j(X)[-j]$. Поэтому треугольник имеет вид $H^i(X) \to X \to H^j(X)[-j] \to H^i(X)[1 - i]$. Так как треугольник однозначно (с точностью до изоморфизма) определяется морфизмом $H^j(X)[-j] \to H^i(X)[1 - i]$, то есть морфизмом $H^j(X) \to H^i(X)[j + 1 - i]$. $\square$

Морфизм $H^j(X) \to H^i(X)[j - i + 1]$ называется морфизмом склейки.

Упражнение 47.9. Опишите, какими данными определяется объект, имеющий ровно три нетривиальные когомологии.

Упражнение 47.10. Пусть $\mathcal{A}$ — абелева категория гомологической размерности 1 (то есть $\mathrm{Ext}^i_I(X, Y) = 0$ для $i \geqslant 2$ и всех $X, Y \in \mathcal{A}$). Докажите, что всякий объект $X \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ изоморфен $\oplus_i H^i(X)[-i]$.

DG-категории

Часть 48. DG-категории и DG-функторы

Важным источником триангулированных категорий являются DG-категории. DG-категория — это $\mathbb{Z}$-категория $\mathcal{A}$, на множествах морфизмов которой введена структура комплексов (то есть градуировка и дифференциал степени 1), такая что композиция морфизмов согласована с градуировкой и удовлетворяет правилу Лейбница. Иначе говоря, для любых $X, Y \in \mathcal{A}$ задан комплекс $(\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y), d^\bullet_{X,Y})$, так что

- если $f \in \mathrm{Hom}^k(X,Y)$, $g \in \mathrm{Hom}^l(Y,Z)$, то $g \circ f \in \mathrm{Hom}^{k+l}(X,Z)$;
- если $f \in \mathrm{Hom}^k(X,Y)$, $g \in \mathrm{Hom}^l(Y,Z)$, то $d_{X,Z}(g \circ f) = (d_{Y,Z}g) \circ f + (-1)^l g \circ (d_{X,Y}f)$.

Заметим, что тождественный морфизм обязан иметь степень ноль и быть замкнутым. В самом деле, пусть $\mathrm{id}_X = \sum e_i$, $e_i \in \mathrm{Hom}^i(X,X)$. Тогда $e_i = \mathrm{id}_X \circ e_i = \sum e_j \circ e_i$, откуда $e_0 \circ e_i = e_i$. С другой стороны, при $e_0 = e_0 \circ \mathrm{id}_X = \sum e_0 \circ e_i = \sum e_i$, откуда $e_i = 0$ при $i \neq 0$. Наконец, из тождества Лейбница следует, что $d(\mathrm{id}_X) = d(\mathrm{id}_X \circ \mathrm{id}_X) = d(\mathrm{id}_X) \circ \mathrm{id}_X + \mathrm{id}_X \circ d(\mathrm{id}_X) = 2d(\mathrm{id}_X)$, откуда $d(\mathrm{id}_X) = 0$.

DG-категория с одним объектом называется DG-алгеброй.

Всякую $\mathbb{Z}$-категорию можно рассматривать как DG-категорию, вводя на морфизмах тривиальную градуировку и дифференциал. Другой пример — категория комплексов. Пусть $\mathcal{B}$ — абелева категория. Рассмотрим категорию $\mathcal{C}_{\mathsf{dg}}(\mathcal{B})$, объекты которой — комплексы над $\mathcal{B}$, а морфизмы — формулой

$$\mathrm{Hom}^k(X^\bullet, Y^\bullet) = \prod_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(X^i, Y^{i+k}), \qquad d_{X,Y}(f) = (d_Y \circ f - (-1)^k f \circ d_X), \text{ если } f \in \mathrm{Hom}^k(X^\bullet, Y^\bullet).$$

Она является DG-категорией, так как

$$(d_{Y,Z}g)f + (-1)^l g(d_{X,Y}f) = (d_Z g - (-1)^l g d_Y)f + (-1)^l g(d_Y f - (-1)^k f d_X) =$$
$$= d_Z g f - (-1)^l g d_Y f + (-1)^l g d_Y f - (-1)^{k+l} g f d_X) = d_Z g f - (-1)^{k+l} g f d_X) = d_{X,Z}(gf).$$

Упражнение 48.1. Пусть $\mathcal{A}$ — DG-категория. Покажите, что если в категории $\mathcal{A}^\circ$ изменить определение композиции морфизмов $f \in \mathrm{Hom}^k$ и $g \in \mathrm{Hom}^l$ на множитель $(-1)^{kl}$, то получится DG-категория.

Упражнение 48.2. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ — DG-категории. Покажите, что категория $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'$ с классом объектов $\mathcal{A} \times \mathcal{A}'$ и морфизмами $\mathrm{Hom}^\bullet((X,X'),(Y,Y')) = \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{A}}(X,Y) \otimes \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{A}'}(X',Y')$ является DG-категорией.

Всякой DG-категории $\mathcal{A}$ можно сопоставить две $\mathbb{Z}$-категории $Z^0(\mathcal{A})$ и $H^0(\mathcal{A})$ с тем же множеством объектов и морфизмами

$$\mathrm{Hom}_{Z^0(\mathcal{A})}(X,Y) = \mathrm{Ker}\, d^0_{X,Y} \subset \mathrm{Hom}^0(X,Y), \qquad \mathrm{Hom}_{H^0(\mathcal{A})}(X,Y) = H^0(\mathrm{Hom}^\bullet(X,Y), d_{X,Y}).$$

Упражнение 48.3. Покажите, что $Z^0(\mathcal{C}_{\mathsf{dg}}(\mathcal{B})) = \mathrm{Com}(\mathcal{B})$, $H^0(\mathcal{C}_{\mathsf{dg}}(\mathcal{B})) = \mathrm{Hot}(\mathcal{B})$.

Упражнение 48.4. Покажите, что (a) $H^0(\mathcal{A}^\circ) = H^0(\mathcal{A})^\circ$; (b) $H^0(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2) = H^0(\mathcal{A}_1) \times H^0(\mathcal{A}_2)$.

Таким образом, категория $H^0(\mathcal{A})$ для DG-категории $\mathcal{A}$ является обобщением гомотопической категории. Естественный вопрос — в каких случаях категория $H^0(\mathcal{A})$ триангулирована. Ответить на него помогают следующие понятия.

Часть 49. DG-функторы и DG-модули

Функтор $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ между DG-категориями называется DG-функтором, если для всех $X, Y \in \mathcal{A}$ отображение $F : \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{A}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{A}'}(F(X), F(Y))$ является морфизмом комплексов (то есть сохраняет градуировку и коммутирует с дифференциалом).

Пусть $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ — DG-функторы. Определим $\mathrm{Hom}^n(F,G)$ как все наборы $\phi_X \in \mathrm{Hom}^n_{\mathcal{A}'}(F(X), G(X))$, такие что для всех $f \in \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{A}}(X,Y)$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\phi_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\phi_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

коммутативна. Дифференциалы в $\mathrm{Hom}^\bullet_{\mathcal{A}'}(F(X), G(X))$ индуцируют на $\mathrm{Hom}^\bullet(F,G) = \oplus_n \mathrm{Hom}^n(F,G)$ структуру комплекса.

Упражнение 49.1. Покажите, что
(a) всякий DG-функтор $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ индуцирует функтор $H^0(F) : H^0(\mathcal{A}) \to H^0(\mathcal{A}')$;
(b) если F, G — DG-функторы, то существует естественное вложение $H^0(\mathrm{Hom}^\bullet(F,G)) \subset \mathrm{Hom}(H^0(F), H^0(G))$.

Пусть $\mathcal{A}$ — DG-категория над полем k. **Левым DG-модулем над $\mathcal{A}$** называется DG-функтор $\mathcal{A} \to \mathcal{C}_{\mathsf{dg}}(\mathsf{k})$ из категории $\mathcal{A}$ в DG-категорию комплексов. **Правым DG-модулем над $\mathcal{A}$** называется DG-функтор $\mathcal{A}^\circ \to \mathcal{C}_{\mathsf{dg}}(\mathsf{k})$.

Пример 49.2. Рассмотрим алгебру A как DG-категорию с одним объектом, имеющим алгебру эндоморфизмов A. Тогда DG-модуль над A — это комплекс $X^\bullet$ и морфизм комплексов $f : A \to \mathrm{Hom}^\bullet(X,X)$, согласованный с умножением. Так как алгебра A сосредоточена в степени 0, морфизм f задается морфизмом $A \to \mathrm{Hom}^0(X,X) = \prod_i \mathrm{Hom}(X_i, X_i)$. Его компоненты $f_i : A \to \mathrm{Hom}(X_i, X_i)$ позволяют ввести действие алгебры A на каждом из X_i, причем легко видеть, что дифференциал комплекса X согласован с этим действием. Таким образом на X возникает структура комплекса A-модулей.

Пусть $\mathcal{A}$ — малая DG-категория. Все DG-модули над $\mathcal{A}$ образуют DG-категорию, в которой комплекс $\mathrm{Hom}^\bullet$ определяется как комплекс для DG-функторов. Эта категория обозначается $\mathcal{A}{-}\mathsf{DGMod}$.

Упражнение 49.3. Покажите, что если A — алгебра, то $A{-}\mathsf{DGMod} \cong \mathcal{C}_{\mathsf{dg}}(A{-}\mathsf{Mod})$.

Всякому объекту X категории A можно сопоставить левый и правый DG-модули

$$h^X = \mathrm{Hom}^\bullet(X, -), \qquad h_X = \mathrm{Hom}^\bullet(-, X).$$

Эти DG-модули называются **свободными** (легко видеть, что свободный DG-модуль над категорией A — это A, рассматриваемый как комплекс, сосредоточенный в степени 0). Легко видеть, что $h^\bullet : X \mapsto h^X$ и $h_\bullet : X \mapsto h_X$ — DG-функторы $\mathcal{A}^\circ \to \mathcal{A}{-}\mathsf{DGMod}$ и $\mathcal{A} \to \mathsf{DGMod}{-}\mathcal{A}$ соответственно.

Упражнение 49.4. Покажите, что функторы $h^\bullet$ и $h_\bullet$ строго полны.

Лемма 49.5. *Если $\mathcal{A}$ — малая DG-категория, то категория $\mathcal{H}(\mathcal{A}) := H^0(\mathcal{A}{-}\mathsf{DGMod})$ — триангулирована.*

Доказательство. Пусть M — DG-модуль над $\mathcal{A}$. Определим $M[1](X) = M(X)[1]$. Ясно, что $[1]$ — автоморфизм категории $\mathcal{A}{-}\mathsf{DGMod}$. Аналогично, пусть $f : M \to N$ — замкнутый морфизм $\mathcal{A}$-DG-модулей степени 0, то есть $f \in \mathrm{Hom}_{Z^0(\mathcal{A}-\mathsf{DGMod})}(M,N)$. Для каждого объекта X категории $\mathcal{A}$ он задает морфизм комплексов $f(A) : M(A) \to N(A)$. Определим DG-модуль $C(f)$ формулой

$$C(f)(A) = C(f(A)).$$

В силу функториальности конуса морфизма на категории комплексов, $C(f)$ является DG-функтором из категории $\mathcal{A}$ в $\mathcal{C}_{\mathsf{dg}}(\mathsf{k})$, то есть DG-модулем. При этом возникает естественный треугольник

$$M \to N \to C(f) \to M[1].$$

Определенный выше функтор сдвига и класс треугольников, изоморфных треугольникам указанного вида, задает на $\mathcal{H}(\mathcal{A}) = H^0(\mathcal{A}{-}\mathsf{DGMod})$ структуру триангулированной категории. В самом деле, доказательство триангулированности гомотопической категории дословно проходит и в этой ситуации — нужно только следить за функториальностью (по $\mathcal{A}$) всех возникающих морфизмов. $\square$

Часть 50. Производная категория DG-категории

Морфизм $\mathcal{A}$-DG-модулей $f : M \to N$ (замкнутый, степени 0) называется **квазиизоморфизмом**, если для всех $X \in \mathcal{A}$ морфизм комплексов $f_X : M(X) \to N(X)$ — квазиизоморфизм. Повторяя рассуждение для гомотопической категории, можно проверить следующее.

Упражнение 50.1. Пусть $\mathcal{A}$ — малая DG-категория. Докажите, что класс квазиизоморфизмов в категории $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ удовлетворяет условиям Оре и согласован с триангулированной структурой.

Локализация категории $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ относительно квазиизоморфизмов называется **производной категорией категории $\mathcal{A}$-DG-модулей** и обозначается $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. В силу предыдущего упражнения она триангулирована, а функтор локализации $\mathcal{H}(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}(\mathcal{A})$ — точен.

DG-модуль M над $\mathcal{A}$ называется **ацикличным**, если для всех $X \in \mathcal{A}$ комплекс $M(X)$ ацикличен. Обозначим через $\mathrm{Acycl}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}(\mathcal{A})$ подкатегорию ацикличных DG-модулей. Ясно, что $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{H}(\mathcal{A})/\,\mathrm{Acycl}(\mathcal{A})$.

Производные категории от малых DG-категорий — достаточно большой класс триангулированных категорий. Например, известно, что если X — схема достаточно общего вида (квазикомпактная и квазиотделимая), то категория $\mathcal{D}(\mathsf{QCoh}(X))$ эквивалентна категории $\mathcal{D}(A)$ для DG-категории с одним объектом! Ввиду вышесказанного очень полезна следующая теорема.

Теорема 50.2 (Keller)**.** *Подкатегория $\mathrm{Acycl}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}(\mathcal{A})$ допустима. В частности, всякий точный функтор $F : \mathcal{H}(\mathcal{A}) \to \mathcal{T}$ имеет левый и правый производные функторы $RF, LF : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{T}$.*

Правый и левый ортогоналы к $\mathrm{Acycl}(\mathcal{A})$ в $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ (то есть h-проективные и h-инъективные объекты) описать не очень просто. Хотя очевидно, что всякий представимый $\mathcal{A}$-модуль h-проективен, а всякий копредставимый $\mathcal{A}$-модуль h-инъективен.

Часть 51. Претриангулированные категории

Как уже отмечалось, категория $H^0(\mathcal{A})$ сама бывает триангулированной.

Лемма 51.1. *Вложение $h_\bullet : \mathcal{A} \to \mathsf{DGMod}-\mathcal{A}$ индуцирует функтор $H^0(\mathcal{A}) \to H^0(\mathsf{DGMod}-\mathcal{A}) = \mathcal{H}(\mathcal{A})$, являющийся строго полным.*

Доказательство. Согласно DG-лемме Ионеда (упражнение 49.4) функтор $h_\bullet$ индуцирует изоморфизм комплексов $\mathrm{Hom}^\bullet(X, Y) \to \mathrm{Hom}^\bullet(h_X, h_Y)$, значит $H^0(h_\bullet)$ индуцирует изоморфизм их нулевых когомологий. □

Функтор $H^0(\mathcal{A}) \to \mathcal{H}(\mathcal{A})$ совершенно не обязан быть эквивалентностью. Например, если $\mathcal{A} = A$ — категория с одним объектом, то его образ — сам комплекс A. Зато используя его легко установить критерий триангулированности категории $H^0(\mathcal{A})$. Будем говорить, что DG-модуль M **гомотопически представим**, если $M \cong h_X$ в категории $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ для какого-либо $X \in \mathcal{A}$.

Лемма 51.2. *Категория $H^0(\mathcal{A})$ триангулирована, если выполнены два условия:*

- *для любых $X \in \mathcal{A}$, $t \in \mathbb{Z}$ правый DG-модуль $h_X[t]$ гомотопически представим;*
- *для любого $f \in \mathrm{Hom}_{Z^0(\mathcal{A})}(X, Y)$ правый DG-модуль $C(h_f : h_X \to h_Y)$ гомотопически представим.*

Доказательство. Указанные условия гарантируют инвариантность образа категории $H^0(\mathcal{A})$ в $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ относительно сдвигов и конусов морфизмов, а значит его триангулированность. Но так как вкладывающий функтор строго полон, категория $H^0(\mathcal{A})$ эквивалентна своему образу, а значит и сама триангулирована. □

DG-категория $\mathcal{A}$, для которой выполнены условия леммы называется **претриангулированной**.

Упражнение 51.3. Покажите, что если $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ претриангулированные DG-категории, а $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ — DG-функтор, то функтор $H^0(F) : H^0(\mathcal{A}) \to H^0(\mathcal{A}')$ точен.

Для претриангулированной категории $\mathcal{A}$ категория $H^0(\mathcal{A})$ триангулирована. В противном случае, все равно можно рассмотреть триангулированную оболочку в $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ категории $H^0(\mathcal{A})$. Она обозначается $\mathcal{A}^{\mathsf{tr}}$.

Скрученным комплексом над $\mathcal{A}$ называется формальное выражение $(\oplus_{i=1}^n X_i[r_i], q)$, где

- $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{A}$;
- $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{Z}$; и
- $q = (q_{ij})$, $q_{ij} \in \mathrm{Hom}^{r_i - r_j + 1}(X_j, X_i)$,

таких что $dq + q^2 = 0$ (то есть $dq_{ij} + \sum_{k=1}^n q_{ik}q_{kj} = 0$ для всех i, j). Скрученный комплекс называется односторонним, если $q_{ij} = 0$ для $i \geqslant j$ (то есть матрица q строго верхнетреугольная). Всякий объект X категории $\mathcal{A}$ можно рассматривать как тривиальный скрученный комплекс, полагая $n = 1$, $X_1 = X$, $r_1 = 0$, $q_{11} = 0$. Кроме того, всякий замкнутый морфизм $f : X \to Y$ в категории $\mathcal{A}$ можно рассматривать как скрученный комплекс, полагая $n = 2$, $X_1 = Y$, $X_2 = X$, $r_1 = r_2 = 0$, $q_{12} = f$.

Упражнение 51.4. Введите на скрученных комплексах структуру DG-категории, такую что односторонние и тривиальный скрученные комплексы являются в ней DG-подкатегориями.

Категория скрученных комплексов над $\mathcal{A}$ обозначается $\mathsf{Tw}(\mathcal{A})$, а категория односторонних скрученных комплексов — $\mathsf{Tw}^+(\mathcal{A})$.

Упражнение 51.5. Постройте строго полный DG-функтор $\mathsf{tot} : \mathsf{Tw}(\mathcal{A}) \to \mathsf{DGMod}{-}\mathcal{A}$, такой что $\mathsf{tot}_{|\mathcal{A}} = h_\bullet$. Покажите, что функтор $H^0(\mathsf{tot}) : H^0(\mathsf{Tw}(\mathcal{A})) \to \mathcal{H}(\mathcal{A})$ строго полон, и что $H^0(\mathsf{Tw}^+(\mathcal{A})) = \mathcal{A}^{\mathsf{tr}}$. В частности, категория $\mathsf{Tw}^+(\mathcal{A})$ претриангулирована.

Упражнение 51.6. Пусть $\mathcal{A}$ — претриангулированная DG-категория. Покажите, что функтор $\mathcal{A} \to \mathsf{Tw}^+(\mathcal{A})$ имеет квазиобратный DG-функтор $\mathsf{tot}^+ : \mathsf{Tw}^+(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$, такой что $\mathsf{tot} \cong h_\bullet \circ \mathsf{tot}^+$. Проверьте, что сопоставление $f \in \mathrm{Hom}_{Z^0(\mathcal{A})}(X, Y) \mapsto C(f) := \mathsf{tot}^+(X \oplus Y, f) \in \mathcal{A}$ (“конус морфизма”) DG-функториально.

Часть 52. Оснащения

Оснащением триангулированной категории $\mathcal{T}$ называется претриангулированная DG-категория $\mathcal{A}$ и точная эквивалентность $\alpha : H^0(\mathcal{A}) \to \mathcal{T}$. Оснащением точного функтора $F : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ между оснащенными триангулированными категориями называется DG-функтор $\tilde{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ между оснащениями и морфизм функторов $\epsilon_F : F \circ \alpha \to \alpha' \circ H^0(\tilde{F})$, делающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} H^0(\mathcal{A}) \arrow[r, "H^0(\tilde{F})"] \arrow[d, "\alpha"'] & H^0(\mathcal{A}') \arrow[d, "\alpha'"] \\ \mathcal{T} \arrow[r, "F"] & \mathcal{T}' \end{tikzcd}$$

коммутативной. Оснащением морфизма $\phi : F \to G$ оснащенных функторов называется замкнутый морфизм DG-функторов $\tilde{\phi} : \tilde{F} \to \tilde{G}$, такой что диаграмма

$$\begin{tikzcd} F \circ \alpha \arrow[r, "\epsilon_F"] \arrow[d, "\phi"'] & \alpha' \circ \tilde{F} \arrow[d, "H^0(\tilde{\phi})"] \\ G \circ \alpha \arrow[r, "\epsilon_G"] & \alpha' \circ \tilde{G} \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Наличие оснащения на триангулированной категории имеет множество следствий. Например, такое.

Лемма 52.1. *Пусть $\mathcal{T}$ — оснащенная триангулированная категория. Тогда существует точный бифунктор $R\mathrm{Hom} : \mathcal{T}^\circ \times \mathcal{T} \to \mathcal{D}^b(\mathsf{k})$, такой что $H^i(R\mathrm{Hom}(X, Y)) = \mathrm{Hom}(X, Y[i])$.*

Доказательство. Пусть $(\mathcal{A}, \alpha)$ — оснащение для $\mathcal{T}$. По определению DG-категории имеем бифунктор $\mathrm{Hom}^\bullet : \mathcal{A}^\circ \times \mathcal{A} \to \mathcal{C}_{\mathsf{dg}}(\mathsf{k})$. Переходя к H^0 получаем точный бифунктор $H^0(\mathcal{A}^\circ) \times H^0(\mathcal{A}) \to H^0(\mathcal{C}_{\mathsf{dg}}(\mathsf{k}))$. Но $H^0(\mathcal{C}_{\mathsf{dg}}(\mathsf{k})) = \mathrm{Hot}(\mathsf{k}) = \mathcal{D}(\mathsf{k})$, поэтому пользуясь оснащением, получаем искомый бифунктор. □

Аналогично, наличие оснащения на морфизме функторов очень полезно.

Лемма 52.2. *Пусть* $\phi : F \to G$ *— морфимзм оснащенных функторов* $\mathcal{T} \to \mathcal{T}'$*, допускающий оснащение. Тогда существует точный функтор* $H : \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ *и морфизмы функторов* $\psi : G \to H$, $\chi : H \to F[1]$*, такие что для всех* X *в* $\mathcal{T}$ *треугольник* $F(X) \to G(X) \to H(X) \to F(X)[1]$ *точен.*

Доказательство. Пусть $\tilde{F}, \tilde{G}$ — оснащения функторов F, G, а $\tilde{\phi} : \tilde{F} \to \tilde{G}$ — оснащение морфизма ϕ. Положим $\tilde{H}(X) = C(\tilde{\phi}_X : \tilde{F}(X) \to \tilde{G}(X))$ и обозначим через $\tilde{\psi}_X$, $\tilde{\chi_X}$ морфизмы в каноническом треугольнике

$$\tilde{F}(X) \xrightarrow{\tilde{\phi}_X} \tilde{G}(X) \xrightarrow{\tilde{\psi}_X} \tilde{H}(X) \xrightarrow{\tilde{\chi}_X} \tilde{F}(X)[1]$$

Ввиду функториальности конуса, $\tilde{H}$ — DG-функтор из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}'$, а $\tilde{\psi}$ и $\tilde{\chi}$ — морфизмы DG-функторов. Переходя к H^0 получаем искомый треугольник на уровне триангулированных категорий. $\square$